



长郡中学 2020—2021 学年度高二第一学期入学考试

数 学

得分: _____

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 8 页。时量 120 分钟。满分 100 分。

第 I 卷

一、单项选择题(本题共 10 小题,每小题 3 分,共 30 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 \leq \frac{1}{4}\}$, 集合 $B = \{y \mid y = \sqrt{1-x^2}\}$, 则 $A \cap B =$

A. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ B. $[-1, 1]$ C. $[0, 1]$ D. $[0, \frac{1}{2}]$

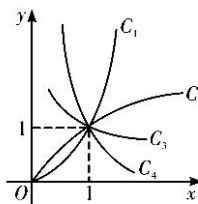
2. 若等差数列 $\{a_n\}$ 各项都是正数, $a_1 = 3$, $a_1 + a_2 + a_3 = 21$, 则 $a_3 + a_4 + a_5 =$

A. 21 B. 45 C. 63 D. 84

3. 如图是幂函数 $y = x^n$ 的部分图象, 已知 n 取 $\frac{1}{2}, 2, -2,$

$-\frac{1}{2}$ 这四个值, 则与曲线 C_1, C_2, C_3, C_4 相对应的 n 依次为

A. $2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2$ B. $-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2$
C. $-\frac{1}{2}, -2, 2, \frac{1}{2}$ D. $2, \frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}$



★4. 已知一组数据 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 的平均数是 2, 方差是 $\frac{1}{3}$, 那么另一组数据 $3x_1 - 2, 3x_2 - 2, 3x_3 - 2, 3x_4 - 2, 3x_5 - 2$ 的平均数和方差分别为

A. $2, \frac{1}{3}$ B. $2, 1$ C. $4, \frac{2}{3}$ D. $4, 3$

5. 阿波罗尼斯(约公元前 262 年至公元前 190 年)是古埃及希腊化时期的著名数学家, “阿波罗尼斯圆”是他的主要研究成果之一: “若动点 P 与两定点 M, N 的距离之比为 $\lambda (\lambda > 0, \text{且 } \lambda \neq 1)$, 则点 P 的轨迹就是圆”, 事实上, 互换该定理中的部分题设和结论, 得到的命题依然成立. 已知点 $M(2, 0)$, 点 P 为圆 $O: x^2 + y^2 = 16$ 上的点, 若存在 x 轴上的定点 $N(t, 0) (t > 4)$ 和常数 λ , 对满足已知条件的点 P 均有 $|PM| = \lambda |PN|$, 则 $\lambda =$

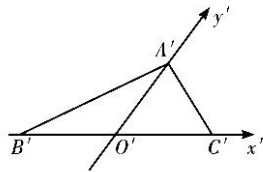
A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

★6. 若仅存在一个实数 $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使得曲线 $C: y = \sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) (\omega > 0)$ 关于直线 $x = t$ 对称, 则 ω 的取值范围是

A. $[\frac{1}{3}, \frac{7}{3})$ B. $[\frac{4}{3}, \frac{10}{3})$ C. $(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}]$ D. $(\frac{4}{3}, \frac{10}{3}]$



7. 已知一个正三棱锥的高为 3, 如下图是其底面用斜二测画法所画出的水平放置的直观图, 其中 O' 为 $B'C'$ 的中点, $O'A' = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则此正三棱锥的体积为



- A. $\sqrt{3}$ B. $3\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

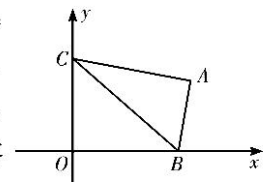
- ★8. 已知向量 $p = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|}$, 其中 a, b 均为非零向量, 则 $|p|$ 的取值范围是

- A. $[0, \sqrt{2}]$ B. $[0, 1]$ C. $(0, 2]$ D. $[0, 2]$

9. 已知过球面上 A, B, C 三点的截面和球心 O 的距离等于球半径的一半, 且 $AB = BC = CA = 2$, 则球 O 的体积为

- A. $\frac{256\pi}{81}$ B. $\frac{64\pi}{27}$ C. $\frac{16\pi}{9}$ D. $\frac{4\pi}{3}$

10. 如图, 直角 $\triangle ABC$ 的斜边 BC 长为 2, $\angle ACB = 30^\circ$, 且点 B, C 分别在 x 轴、 y 轴正半轴上滑动, 点 A 在线段 BC 的右上方. 设 $\vec{OA} = x\vec{OB} + y\vec{OC}$, ($x, y \in \mathbf{R}$), 记 $M = \vec{OA} \cdot \vec{OC}$, $N = x + y$, 分别考察 M, N 的所有运算结果, 则



- A. M 有最小值, N 有最大值 B. M 有最大值, N 有最小值
C. M 有最大值, N 有最大值 D. M 有最小值, N 有最小值

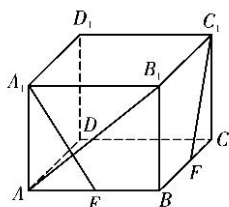
- 二、多项选择题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 3 分, 有选错的得 0 分, 部分选对得 1 分)

11. 下列关于函数 $f(x) = \frac{1-|x|}{1+|x|}$ 的说法中正确的是

- A. $f(x)$ 为奇函数
B. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减
C. 不等式 $f(x) < 0$ 的解集为 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
D. 不等式 $f(x) < 0$ 的解集为 $(-1, 0) \cup (0, 1)$

12. 如图, 在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = \sqrt{2}AA_1$, E, F 分别为 AB, BC 的中点, 异面直线 AB_1 与 C_1F 所成角的余弦值为 m , 则

- A. $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$
B. 直线 A_1E 与直线 C_1F 共面
C. $m = \frac{\sqrt{2}}{3}$
D. 直线 A_1E 与直线 C_1F 异面





13. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + f(-x) = 0$, $f(x+6) = -f(x)$, 且对任意的 $x_1, x_2 \in [-3, 0]$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 都有 $x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) < x_1 f(x_2) + x_2 f(x_1)$, 则以下判断正确的是

- A. 函数 $f(x)$ 是偶函数
B. 函数 $f(x)$ 在 $[-9, -6]$ 单调递增
C. $x=3$ 是函数 $f(x)$ 的对称轴
D. 函数 $f(x)$ 的最小正周期是 12

14. 将函数 $f(x) = \sin \omega x (\omega > 0)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到函数 $y =$

$g(x)$ 的图象, 若函数 $g(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调增函数, 则实数 ω 可能的取值为

- A. $\frac{2}{3}$ B. 1 C. $\frac{6}{5}$ D. 2

15. 定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$, 如果对于任意给定的等比数列 $\{a_n\}$, 数列 $\{f(a_n)\}$ 仍是等比数列, 则称 $f(x)$ 为“保等比数列函数”. 现有定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的四个函数中, 是“保等比数列函数”的为

- A. $f(x) = x^2$ B. $f(x) = 2^x$
C. $f(x) = \sqrt{|x|}$ D. $f(x) = \ln|x|$

选择题答题卡

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案								
题号	9	10	11	12	13	14	15	得分
答案								

第 II 卷

三、填空题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分.)

16. 某中学高二年级甲班的学生共有 25 名女生和 35 名男生, 现以简单随机抽样的方法从甲班全班同学中推选 5 名学生代表甲班参加全校演讲比赛, 则甲班中某女生被抽到的概率是_____.

- ★17. 已知函数 $y = 3a^{x-8} - 1 (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$ 的图象恒过定点 $A(m, n)$, 则 $\log_m n =$ _____.

18. 若过原点 O 的动直线 l 将圆 $E: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$ 分成的两部分面积之差最大时, 直线 l 与圆 E 的交点记为 A, B ; l 将圆 E 分成的两部分面积相等时, 直线 l 与圆 E 的交点记为 C, D ; 则四边形 $ABCD$ 的面积为_____.



19. 《数书九章》是中国南宋时期杰出数学家秦九韶的著作. 其中在卷五“三斜求积”中提出了已知三角形三边 a, b, c , 求面积的公式, 这与古希腊的海伦公式完全等价, 其求法是“以小斜冥并大斜冥减中斜冥, 余半之, 自乘于上, 以小斜冥乘大斜冥减上, 余四约之, 为实. 一为从隅, 开平方得积.”若把以上这段文字写出公式, 即若 $a > b > c$, 则 $S =$

$$\sqrt{\frac{1}{4} \left[c^2 a^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2} \right)^2 \right]},$$

现有周长为 $10 + 2\sqrt{7}$ 的 $\triangle ABC$ 满足 $\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 3 : \sqrt{7}$, 则用以上给出的公式求得 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

20. 已知 a, b 为正实数, 且 $a + b + ab = 3$, 则 $2a + b$ 的最小值为_____.

四、解答题(本题共 5 小题, 每小题 8 分, 共 40 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)

21. (8 分)

在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是三个内角 A, B, C 的对边, 若 $b = 3, c = 4, C = 2B$, 且 $a \neq b$.

(1) 求 $\cos B$ 及 a 的值;

(2) 求 $\cos\left(2B + \frac{\pi}{3}\right)$ 的值.



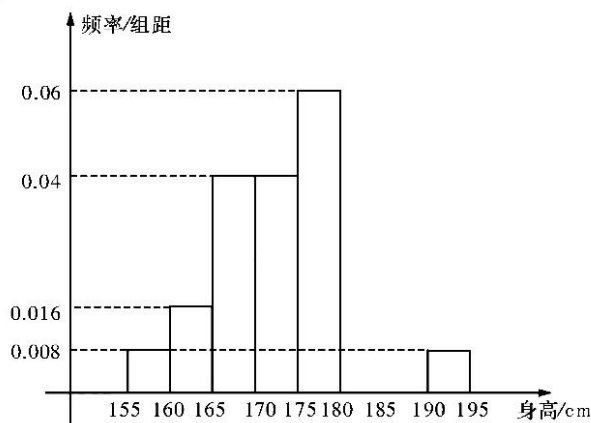
★22. (8分)

某学校进行体验,现得到所有男生的身高数据,从中随机抽取 50 人进行统计(已知这 50 人身高介于 155 cm 到 195 cm 之间),现将抽取结果按如下方式分成八组:第一组 $[155, 160)$,第二组 $[160, 165)$,...,第八组 $[190, 195]$,并按此分组绘制如图所示的频率分布直方图,其中第六组 $[180, 185)$ 和第七组 $[185, 190)$ 还没有绘制完成,已知第一组与第八组人数相同,第六组和第七组人数的比为 5 : 2.

(1)补全频率分布直方图;

(2)根据频率分布直方图估计这 50 个男生身高的中位数;

(3)用分层抽样的方法在身高为 $[170, 180)$ 内抽取一个容量为 5 的样本,从样本中任意抽取 2 个男生,求这两个男生身高都在 $[175, 180]$ 内的概率.





23. (8分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_n = \frac{1}{3}(S_n + 2n)$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立.

(1) 求 a_1, a_2 的值;

(2) 证明数列 $\{a_n + 2\}$ 是等比数列, 并求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 设 $b_n = na_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

24.

(8分)

已知两个定点 $A(0, 4), B(0, 1)$, 动点 P 满足 $|PA| = 2|PB|$, 设动点 P 的轨迹为曲线 E , 直线 $l: y = kx - 4$.

(1) 求曲线 E 的轨迹方程;

(2) 若 l 与曲线 E 交于不同的 C, D 两点, 且 $\angle COD = 120^\circ$ (O 为坐标原点), 求直线 l 的斜率;

(3) 若 $k = 1$, Q 是直线 l 上的动点, 过 Q 作曲线 E 的两条切线 QM, QN , 切点为 M, N , 探究: 直线 MN 是否过定点, 若存在定点请写出坐标, 若不存在则说明理由.

25. (8分)

设二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$), 集合 $A = \{x | f(x) = x\}$.

(1) 若 $A = \{1, 2\}$, $f(0) > 0$, 且方程 $f(x) = 0$ 的两根都小于 -1 , 求实数 a 的取值范围;

(2) 若 $A = \{2\}$, 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值 M (结果用 a 表示).



自主选拔在线

微信号: zizzsw

专注名校自主选拔



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站 (<http://www.zizzs.com/>) 和

7

官方微信公众号: zizzsw

官方网站: www.zizzs.com

咨询热线: 010-5601 9830

微信客服: zizzs2018



自主选拔在线

微信号: zizzsw

专注名校自主选拔

微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注**自主选拔在线**官方微信号: **zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线

关注后获取更多资料:

回复“答题模板”, 即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”, 即可获取《高考考前必背知识点》