

第 37 届全国中学生物理竞赛决赛参考答案

第一题参考解答:

(1) 中子以初速度与静止的靶核发生碰撞, 碰撞前瞬间初速度方向与两球球心连线之间的夹角为 α 。在两球心连线和中子初速度方向所决定的平面上, 令 x 轴沿两球心连线, 中子初速度垂直于连线的方向为 y 轴。设碰撞后中子的速率为 v , 沿着 x 轴方向的速度分量为 v_x , y 轴方向的速度分量为 v_y , 碰撞后靶核速率为 v_1 ,

解法 (一)

碰撞前后沿着 x 轴和 y 轴方向动量分别守恒

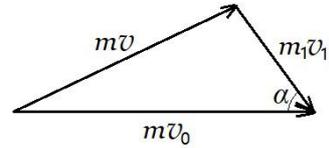
$$\begin{cases} m v_0 \cos \alpha = m v_x + m_1 v_1, \\ m v_0 \sin \alpha = m v_y. \end{cases} \quad (1)$$

这里

$$v_x^2 + v_y^2 = v^2$$

[解法 (二)]

由碰撞前后动量守恒, 碰前中子的动量 $m v_0$ 、碰后中子的动量 $m v$ 和碰后原子核的动量 $m_1 v_1$ 构成一闭合的矢量三角形, 如右图所示。据余弦定理有



$$m^2 v_0^2 + m_1^2 v_1^2 - 2 m m_1 v_0 v_1 \cos \alpha = m^2 v^2 \quad (1)$$

式中, α 是碰前中子的动量与碰后原子核的动量之间的夹角。]

能量守恒给出

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad (2)$$

由①②式得

$$m_1 v_1^2 + \frac{m_1^2}{m} v_1^2 - 2 m_1 v_0 v_1 \cos \alpha = 0,$$

从中解出

$$v_1 = \frac{2 m \cos \alpha}{m + m_1} v_0, \quad (3)$$

再把③式代入②式, 得

$$v = \frac{\sqrt{(m + m_1)^2 - 4 m m_1 \cos^2 \alpha}}{m + m_1} v_0 = \frac{\sqrt{m^2 + m_1^2 - 2 m m_1 \cos 2\alpha}}{m + m_1} v_0 \quad (4)$$

当 $\alpha=0$ 时 v_1 达到最大,

$$v_{1\max} = \frac{2m}{m+m_1} v_0,$$

所以氢核的最大速率是

$$v_H = \frac{2m}{m+m_H} v_0,$$

氮核的最大速率是

$$v_N = \frac{2m}{m+14m_H} v_0,$$

由此解得

$$m = \frac{14v_N - v_H}{v_H - v_N} m_H = \frac{14 \times 4.7 \times 10^6 - 3.3 \times 10^7}{3.3 \times 10^7 - 4.7 \times 10^6} m_H = 1.16 m_H, \quad (5)$$

再代入上面任意一式中, 得

$$v_0 = \frac{m+m_H}{2m} v_H = 3.07 \times 10^7 \text{ m/s}. \quad (6)$$

(2) 速度为 v_i 的氮 14 核继续与速度为 v_0 的第 i 个中子碰撞, 在每次碰撞后获得最大速率增量条件下, 氮 14 核的速度变为 v_{i+1} , 中子的末速度为 v'_0 , 动量守恒和能量守恒分别为

$$\begin{cases} m v_0 + m_N v_i = m v'_0 + m_N v_{i+1}, \\ \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} m_N v_i^2 = \frac{1}{2} m v'^2_0 + \frac{1}{2} m_N v_{i+1}^2 \end{cases} \quad (7)$$

由⑦式得

$$\frac{v_i}{v_0} = 1 - a + a \frac{v_{i-1}}{v_0} \quad (8)$$

式中

$$a = \frac{m_N - m}{m_N + m} = 0.847 \quad (9)$$

按⑧式逐次迭代得

$$\begin{aligned} \frac{v_n}{v_0} &= 1 - a + a \frac{v_{n-1}}{v_0} = 1 - a + a(1 - a + a \frac{v_{n-2}}{v_0}) = 1 - a^2 + a^2 \frac{v_{n-2}}{v_0} \\ &= 1 - a^3 + a^3 \frac{v_{n-3}}{v_0} = \dots = 1 - a^n + a^n \frac{v_0}{v_0} = 1 - a^n \end{aligned} \quad (10)$$

这里, 应用了题给条件

$$v_0 = 0$$

所求的次数 n 满足

$$\frac{1}{2} m_N v_n^2 = \frac{1}{2} \times 1.16 m_H v_0^2$$

即是

$$\frac{1}{2}14m_H(1-a^n)^2 v_0^2 = \frac{1}{2} \times 1.16m_H v_0^2, \quad (11)$$

由⑨⑪式得，满足方程的最接近的值是

$$n = 2. \quad (12)$$

(3) 根据麦克斯韦速率分布

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}$$

速率取极大值的条件是

$$\frac{df(v)}{dv} = 0,$$

可知最概然速率为

$$v_p = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \quad (13)$$

最概然速率对应的动能为

$$E_p = \frac{1}{2} m v_p^2 = k_B T. \quad (14)$$

设总粒子数为N，由动能分布函数定义可知为

$$f(E_k) = \frac{dN}{NdE_k} \quad (15)$$

由速率分布函数的定义可知

$$f(v) = \frac{dN}{Nd v}$$

$$d v = \frac{dE_k}{\sqrt{2mE_k}}$$

所以

$$f(E_k) = \frac{dN}{NdE_k} = \frac{1}{\sqrt{2mE_k}} f\left(\sqrt{\frac{2E_k}{m}}\right)$$

结合上述几个式子，化简得到

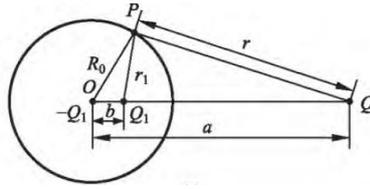
$$f(E_k) = \frac{2\pi}{(\pi k_B T)^{3/2}} e^{-\frac{E_k}{k_B T}} E_k^{-1/2} \quad (16)$$

动能取极大值的条件为 $\frac{df(E_k)}{dE_k} = 0$ ，由此可知最概然动能为

$$E_{kp} = \frac{1}{2} k_B T = \frac{1}{2} E_p. \quad (17)$$

评分标准： 本题共 40 分，其中①⑦式各 5 分，②③④⑤⑥⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯⑰式 2 分。

第二题参考解答：

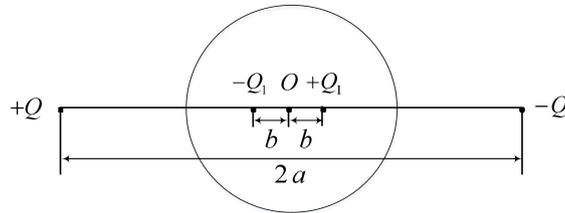


(1) 如图所示, 由于静电平衡时导体为等势体, 球表面内感应电荷均匀分布, 其镜像电荷 Q' 位于球心位置。球外感应电荷对应的镜像电荷为 $-Q'$, 由静电平衡条件, 该镜像电荷必定处于球心和 Q 的连线上。容易得出, 镜像电荷的大小及 $-Q'$ 距球心 O 的距离 b 分别为

$$Q' = \frac{R_0}{a} Q, b = \frac{R_0^2}{a} \quad (1)$$

(2) 设有等量异号点电荷 $\pm Q$, 与金属球(导体球)球心 O 的距离均为 a , 由 $\pm Q$ 产生的两个像电荷为 $\mp Q_1$, 由球面电像公式可得, 像电荷大小 Q_1 及距球心 O 的距离 b 分别为

$$Q_1 = \frac{R_0}{a} Q, b = \frac{R_0^2}{a}$$



当 $a \rightarrow \infty$ 时, $b \rightarrow 0$, 因此一对像电荷 $\mp Q_1$ 可视为一位于球心 O 的电偶极子, 其偶极矩 p 的大小为

$$p = 2Q_1 b = 2 \frac{R_0^3}{a^2} Q \quad (2)$$

匀强外电场 E_0 可视为等量异号点电荷 $\pm Q$ 在其连线中点处产生的电场, 大小为

$$E_0 = 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^2} \quad (3)$$

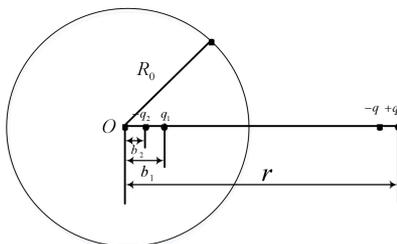
由此可得

$$p = 4\pi\epsilon_0 E_0 R_0^3 \quad (4)$$

(3) 已知 q 和 $-q$ 间距为 Δl , 由②式知, $\pm q$ 的像电荷的大小和位置分别为

$$q_1 = \frac{qR_0}{r - \frac{\Delta l}{2}}, b_1 = \frac{R_0^2}{r - \frac{\Delta l}{2}} \quad (5)$$

$$q_2 = \frac{qR_0}{r + \frac{\Delta l}{2}}, b_2 = \frac{R_0^2}{r + \frac{\Delta l}{2}} \quad (6)$$



由于 $\Delta l \ll r$, 有

$$q_1 = q_2 = \frac{qR_0}{r} \quad (7)$$

像电荷组成一对电偶极子, 其偶极矩为:

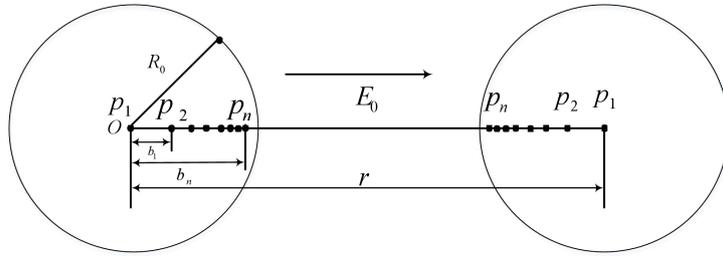
$$p = q_1(b_1 - b_2) = \frac{qR_0}{r} \frac{R_0^2 \Delta l}{r^2 - \frac{\Delta l^2}{4}} = \frac{R_0^3}{r^3} q \Delta l \quad (8)$$

像电荷构成的电偶极子的方向与导体球外的电偶极子的方向相同。

(4) 如图所示, 当空间电场方向有两个相同导体球时, 由外电场作用, 会在两球心位置处产生一对电偶极子

$$p_1 = 4\pi\epsilon_0 E_0 R_0^3 \quad (9)$$

这一对像偶极子又会产生次级偶极子 p_2 , 接着产生 p_3, p_4, \dots , 如此无穷反射下去。由⑧式知, 各对像电偶极子的偶极矩以及该偶极子所在位置到两球心的距离依次为



$$p_1 = 4\pi\epsilon_0 E_0 R_0^3, \quad b_1 = 0, \quad r_1 = r - b_1 = r \quad (10)$$

$$p_2 = \frac{R_0^3}{r_1^3} p_1, \quad b_2 = \frac{R_0^2}{r_1}, \quad r_2 = r - b_2 \quad (11)$$

$$p_3 = \frac{R_0^3}{r_2^3} p_2, \quad b_3 = \frac{R_0^2}{r_2}, \quad r_3 = r - b_3 \quad (12)$$

⋮

$$p_n = \frac{R_0^3}{r_{n-1}^3} p_{n-1}, \quad b_n = \frac{R_0^2}{r_{n-1}}, \quad r_n = r - b_n; \quad (13)$$

⋮

位于 b_0 、电偶极距为 p 的电偶极子的电势为

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{b}_0)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{b}_0|^3}$$

取两球连线的中点为坐标原点, x 轴水平向右, 坐标原点为电势零点, 则在球外空间任一点 $P(x, y)$ 处的电势为

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x + \frac{r}{2} - b_n) p_n}{4\pi\epsilon_0 [(x + \frac{r}{2} - b_n)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - \frac{r}{2} + b_n) p_n}{4\pi\epsilon_0 [(x - \frac{r}{2} + b_n)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} - E_0 x \quad (14)$$

当 $y=0$ 时, 两球心连线上的电势分布为

$$\varphi(x, y=0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x + \frac{r}{2} - b_n) p_n}{4\pi\epsilon_0 \left| x + \frac{r}{2} - b_n \right|^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - \frac{r}{2} + b_n) p_n}{4\pi\epsilon_0 \left| x - \frac{r}{2} + b_n \right|^3} - E_0 x \quad (15)$$

两球心连线上（球外）的场强分布为

$$E(x, y=0) = -\frac{d}{dx} \varphi(x, y=0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{2\pi\epsilon_0 \left| x + \frac{r}{2} - b_n \right|^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{2\pi\epsilon_0 \left| x - \frac{r}{2} + b_n \right|^3} + E_0 \quad (16)$$

式中，像电荷构成的电偶极子的方向与导体球外的电偶极子的方向相同。

(5) 设 $r \rightarrow 2R_0$ 并保持两球相互绝缘。由⑩⑪⑫式可知

$$p_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 p_1, \quad b_2 = \frac{1}{2}R_0, \quad r_2 = \frac{3}{2}R_0 \quad (17)$$

$$p_3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 p_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 p_1, \quad b_3 = \frac{2}{3}R_0, \quad r_3 = \frac{4}{3}R_0 \quad (18)$$

⋮

$$p_n = \left(\frac{1}{n}\right)^3 p_1, \quad b_n = \frac{n-1}{n}R_0, \quad r_n = \frac{n+1}{n}R_0; \quad (19)$$

由⑬式有

$$\begin{aligned} E(x=0, y=0) &= E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{\pi\epsilon_0 \left| \frac{r}{2} - b_n \right|^3} \\ &= E_0 + E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^3 \left| 1 - \frac{n-1}{n} \right|^3} = E_0 + 4E_0 \sum_{n=1}^{\infty} 1 \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (20)$$

评分标准： 本题共 40 分，其中①式 5 分，②③④⑤⑥⑦⑧⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯⑰式各 2 分，⑬⑭式各 3 分，⑱⑲⑳式各 1 分。

第三题参考解答:

(1) 系统处于能量为 E_1 的概率满足玻尔兹曼分布 $p \propto e^{-E/k_B T}$, 有

$$p_1 = p_0 e^{-\frac{E_1}{k_B T}} \quad (1)$$

对于二能级系统, 由原子处于不同能级的总概率为 1, 有

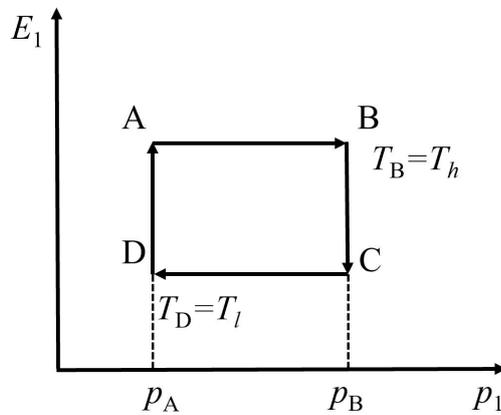
$$p_1 + p_0 = 1 \quad (2)$$

解得

$$p_0 = \frac{1}{1 + e^{-\frac{E_1}{k_B T}}} \quad (3)$$

$$p_1 = \frac{e^{-\frac{E_1}{k_B T}}}{1 + e^{-\frac{E_1}{k_B T}}} \quad (4)$$

(2) 量子奥托循环示意图如下:



下面计算量子奥托热机循环过程中的各个物理量的增量。

A→B 量子等容过程中:

不做功, 即 $E_A = E_B$, 吸热全部用来增加内能, 因此吸收热量为

$$\Delta_1 \langle E \rangle = Q_1 = E_B (p_B - p_A) \quad (5)$$

B→C 量子绝热过程中:

此过程是绝热过程, 不吸收或者放出热, 故 $p_B = p_C$, 内能增量为

$$\Delta_2 \langle E \rangle = (E_C - E_B) p_B \quad (6)$$

对外做功

$$W_2 = -\Delta_2 \langle E \rangle = -(E_C - E_B) p_B = (E_B - E_C) p_B \quad (7)$$

C→D 量子等容过程中:

不做功, 即 $E_C = E_D$, 放出的热来自内能减少, 内能的增量为

$$\Delta_3 \langle E \rangle = E_D (p_A - p_B) \quad (8)$$

放出热量为

$$Q_2 = -\Delta_3 \langle E \rangle = E_C (p_B - p_A) \quad (9)$$

D→A 量子绝热过程中:

此过程是绝热过程, 不吸收或者放出热, 内能增量为

$$\Delta_4 \langle E \rangle = (E_A - E_D) p_A \quad (10)$$

对外做功

$$W_4 = -\Delta_4 \langle E \rangle = -(E_A - E_D) p_A = (E_D - E_A) p_A \quad (11)$$

(3) 对量子奥托热机, 循环过程中吸热 Q_1 和放热 Q_2 , 效率为

$$\eta_{\text{奥}} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \quad (12)$$

将⑤和⑧式代入上式

$$\eta_{\text{奥}} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{E_C}{E_B} \quad (13)$$

由于 B→C 过程中, $p_B = p_C$, 故有如下关系式

$$\frac{e^{-\frac{E_B}{k_B T_B}}}{1 + e^{-\frac{E_B}{k_B T_B}}} = \frac{e^{-\frac{E_C}{k_B T_C}}}{1 + e^{-\frac{E_C}{k_B T_C}}} \quad (14)$$

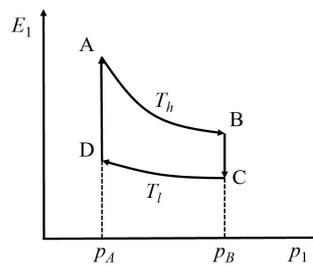
化简后, 再根据 $T_B = T_h$ 有

$$\frac{E_B}{T_h} = \frac{E_C}{T_C} \quad (15)$$

代入⑬式有

$$\eta_{\text{奥}} = 1 - \frac{E_l}{E_h} = 1 - \frac{T_C}{T_h} \quad (16)$$

量子卡诺循环示意图如下:



下面计算量子卡诺热机循环过程中的各个物理量。

A→B 过程:

$$\begin{aligned} dQ_1 &= E_1 dp_1 = E_1 d \left(\frac{e^{-\frac{E_1}{k_B T_h}}}{1 + e^{-\frac{E_1}{k_B T_h}}} \right) \\ &= E_1 \frac{-\frac{1}{k_B T_h} e^{-\frac{E_1}{k_B T_h}} \left(1 + e^{-\frac{E_1}{k_B T_h}} \right) - e^{-\frac{E_1}{k_B T_h}} \left(-\frac{1}{k_B T_h} e^{-\frac{E_1}{k_B T_h}} \right)}{\left(1 + e^{-\frac{E_1}{k_B T_h}} \right)^2} dE_1 = \frac{-\frac{E_1}{k_B T_h} e^{-\frac{E_1}{k_B T_h}}}{\left(1 + e^{-\frac{E_1}{k_B T_h}} \right)^2} dE_1 \end{aligned}$$

所以此过程中吸热：

$$\begin{aligned} Q_1 &= \int_{E_A}^{E_B} \frac{-\frac{E_1}{k_B T_h} e^{-\frac{E_1}{k_B T_h}}}{\left(1 + e^{-\frac{E_1}{k_B T_h}} \right)^2} dE_1 = \int_{E_A}^{E_B} \frac{E_1}{\left(1 + e^{-\frac{E_1}{k_B T_h}} \right)^2} de^{-\frac{E_1}{k_B T_h}} = \int_{E_A}^{E_B} E_1 d \left(-\frac{1}{1 + e^{-\frac{E_1}{k_B T_h}}} \right) \\ &= \frac{E_A}{1 + e^{-\frac{E_A}{k_B T_h}}} - \frac{E_B}{1 + e^{-\frac{E_B}{k_B T_h}}} + \int_{E_A}^{E_B} \frac{1}{1 + e^{-\frac{E_1}{k_B T_h}}} dE_1 = \frac{E_A}{1 + e^{-\frac{E_A}{k_B T_h}}} - \frac{E_B}{1 + e^{-\frac{E_B}{k_B T_h}}} + \int_{E_A}^{E_B} k_B T_h \frac{de^{-\frac{E_1}{k_B T_h}}}{1 + e^{-\frac{E_1}{k_B T_h}}} \quad (17) \\ &= \frac{E_A}{1 + e^{-\frac{E_A}{k_B T_h}}} - \frac{E_B}{1 + e^{-\frac{E_B}{k_B T_h}}} + k_B T_h \ln \frac{1 + e^{-\frac{E_B}{k_B T_h}}}{1 + e^{-\frac{E_A}{k_B T_h}}} \end{aligned}$$

$$\text{内能增量: } \Delta E_1 = \frac{e^{-\frac{E_B}{k_B T_h}}}{1 + e^{-\frac{E_B}{k_B T_h}}} E_B - \frac{e^{-\frac{E_A}{k_B T_h}}}{1 + e^{-\frac{E_A}{k_B T_h}}} E_A \quad (18)$$

$$\text{做功: } W_1 = Q_1 - \Delta E = E_A - E_B + k_B T_h \ln \frac{1 + e^{-\frac{E_B}{k_B T_h}}}{1 + e^{-\frac{E_A}{k_B T_h}}} \quad (19)$$

B→C 过程:

在这个过程中，概率分布始终不变， $p_B = p_C$ ，过程中无传热，有

$$\frac{e^{-\frac{E_B}{k_B T_h}}}{1 + e^{-\frac{E_B}{k_B T_h}}} = \frac{e^{-\frac{E_C}{k_B T_l}}}{1 + e^{-\frac{E_C}{k_B T_l}}}$$

化简后得

$$E_C = \frac{T_l}{T_h} E_B \quad (20)$$

同理， $p_D = p_A$ ，故 D→A 过程中无吸热或放热发生，有

$$\frac{e^{-\frac{E_A}{k_B T_h}}}{1 + e^{-\frac{E_A}{k_B T_h}}} = \frac{e^{-\frac{E_D}{k_B T_l}}}{1 + e^{-\frac{E_D}{k_B T_l}}}$$

化简后得

$$E_D = \frac{T_l}{T_h} E_A \quad (21)$$

$$\text{吸热: } Q_2 = 0 \quad (22)$$

$$\text{对外做功等于内能减少: } W_2 = -\Delta E_2 = \frac{e^{-\frac{E_B}{k_B T_h}}}{1 + e^{-\frac{E_B}{k_B T_h}}} E_B - \frac{e^{-\frac{E_C}{k_B T_c}}}{1 + e^{-\frac{E_C}{k_B T_h}}} E_C \quad (23)$$

C→D 过程:

过程 C→D 与 A→B 类似, 均为等温过程, 放热的计算可以类比(17)式, 并代入(20)和(21)式后有

$$\text{吸热: } Q_3 = \frac{E_D}{1 + e^{-\frac{E_D}{k_B T_l}}} - \frac{E_C}{1 + e^{-\frac{E_C}{k_B T_l}}} + k_B T_l \ln \frac{1 + e^{-\frac{E_C}{k_B T_l}}}{1 + e^{-\frac{E_D}{k_B T_l}}} = \frac{T_l}{T_h} E_A - \frac{T_l}{T_h} E_B + k_B T_l \ln \frac{1 + e^{-\frac{E_B}{k_B T_h}}}{1 + e^{-\frac{E_A}{k_B T_h}}} \quad (24)$$

$$\text{内能: } \Delta E_3 = \frac{e^{-\frac{E_D}{k_B T_l}}}{1 + e^{-\frac{E_D}{k_B T_l}}} E_D - \frac{e^{-\frac{E_C}{k_B T_l}}}{1 + e^{-\frac{E_C}{k_B T_l}}} E_C \quad (25)$$

$$\text{做功: } W_3 = Q_3 - \Delta E_3 = E_C - E_D + k_B T_l \ln \frac{1 + e^{-\frac{E_B}{k_B T_h}}}{1 + e^{-\frac{E_A}{k_B T_h}}} \quad (26)$$

D→A 过程:

$$\text{吸热: } Q_4 = 0 \quad (27)$$

$$\text{对外做功等于内能减少: } W_4 = -\Delta E_4 = \frac{e^{-\frac{E_D}{k_B T_l}}}{1 + e^{-\frac{E_D}{k_B T_l}}} E_D - \frac{e^{-\frac{E_A}{k_B T_h}}}{1 + e^{-\frac{E_A}{k_B T_h}}} E_A \quad (28)$$

对量子卡诺热机, 循环过程中吸热 Q_1 和放热 Q_4 , 将(17)和(24)式代入效率计算公式

$$\eta_{\text{卡}} = \frac{Q_1 - Q_4}{Q_1} = 1 - \frac{Q_4}{Q_1} = 1 - \frac{T_l}{T_h} \quad (29)$$

其与经典卡诺热机的效率一致。然而 $T_l < T_c < T_h$, 故由(16)和(29)式可知

$$\eta_{\text{奥}} < \eta_{\text{卡}} \quad (30)$$

因此量子奥托热机的效率低于量子卡诺热机的效率。

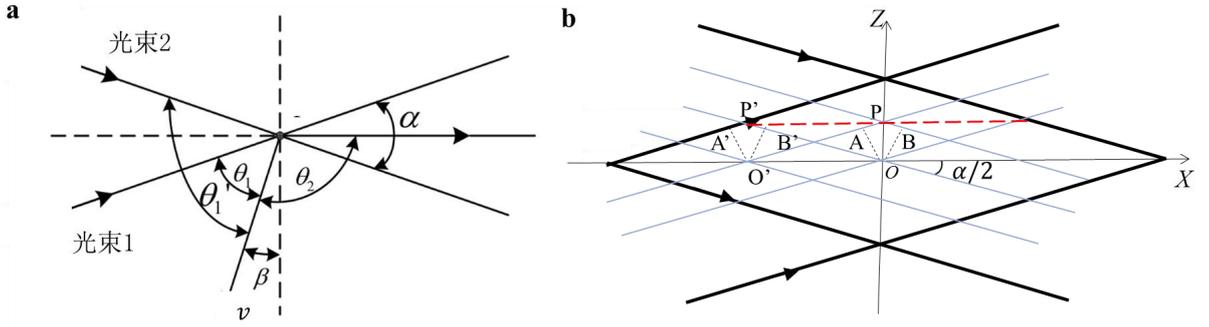
评分标准: 本题总分 40 分

第(1)问总分 6 分, 第①②式各 2 分, 第③④式各 1 分;

第(2)问总分 10 分, 画出量子奥托循环示意图 2 分, 4 个循环过程每个对应 2 分; 即第⑤式 2 分, 第⑥⑦⑧⑨⑩⑪式各 1 分;

第(3)问总分 24 分, 计算量子奥托循环效率 5 分, 计算量子卡诺循环效率和比较它们的大小总共 19 分; 即第⑫⑬⑭⑮⑯式各 1 分, 第⑰⑱⑲式总共 7 分, 第⑳㉑㉒㉓式总共 5 分, 第⑳㉔㉕式共 3 分, 第⑳㉖式共 2 分, 第⑳㉗式共 2 分;

第四题参考解答:



(1) 一束频率为 f 的光波被流体中运动粒子所散射。光在流体中的传播速度大小为 c ，粒子运动速度大小为 v ($v \ll c$)。由于多普勒效应，粒子接收到的光频率为

$$f' = f \left(1 + \frac{vn}{c} \cos \theta_1 \right) \quad (1)$$

式中 θ_1 为光波入射方向与散射粒子运动速度之间的夹角。同样由于多普勒效应，在散射方向上探测到来自粒子的散射光的频率为

$$f'' = \frac{f'}{1 - \frac{vn}{c} \cos \theta_2} \quad (2)$$

其中 θ_2 为散射光波传播方向与散射粒子速度之间的夹角。

散射光与入射光的频率之差为

$$\Delta f = f'' - f = \frac{fvn}{c} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \quad (3)$$

已知粒子的速度为 $v=1\text{m/s}$ ，光的频率量级为 10^{14}Hz ，

$$\Delta f = \frac{fvn}{c} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) < \frac{2fvn}{c} \approx 0.7\text{MHz} < 5\text{MHz} \quad (4)$$

因此，分辨率为 5MHz 的光谱仪不能对以此速度运行的粒子进行探测。

(2) 到达探测器的两散射光 1 和 2 的电场为

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0 \cos[2\pi(f + \Delta f)t + \phi_1] \\ E_2 &= E_0 \cos[2\pi(f + \Delta f')t + \phi_2] \end{aligned} \quad (5)$$

其中 Δf 、 $\Delta f'$ 分别为散射光 1 和 2 与原光频率的频率之差。两散射光的合成光强为

$$\begin{aligned} I(t) &\propto |E_1 + E_2|^2 \\ &= E_0^2 + \frac{E_0^2}{2} \cos[4\pi(f + \Delta f)t + 2\phi_1] + \frac{E_0^2}{2} \cos[4\pi(f + \Delta f')t + 2\phi_2] \\ &\quad + E_0^2 \cos[4\pi(2f + \Delta f' + \Delta f)t + (\phi_1 + \phi_2)] + E_0^2 \cos[2\pi(\Delta f - \Delta f')t + \phi_1 - \phi_2] \end{aligned} \quad (6)$$

式中，第一项是常量；中间三项的变化频率为光频及其和频，探测器的频率响应跟不上其时间变化，它们实际上表现为其时间平均值，也是常量；第五项的变化频率是光频的差频。因此，探测器输出的光电流为

$$i(t) = kE_0^2 \cos(2\pi\Delta f_D t + \phi_1 - \phi_2) \quad (7)$$

这里

$$\Delta f_D = \Delta f' - \Delta f$$

是光束 1 和光束 2 的散射光频率差之差。

由题意知，③式即为光束 1 的散射光频率差，类似的，对于光束 2 获得的频率差为

$$\Delta f' = \frac{f v m}{c} (\cos \theta'_1 + \cos \theta_2) \quad (8)$$

因此光束 1 和光束 2 的散射光频率差之差

$$\begin{aligned} \Delta f_D &= \Delta f' - \Delta f \\ &= \frac{f v m}{c} (\cos \theta'_1 - \cos \theta_1) \\ &= \frac{2 f v m}{c} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \beta \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $\alpha = \theta'_1 - \theta_1$ ， $\beta = \frac{1}{2}(\theta'_1 + \theta_1 - \pi)$ 。

因为光电流信号仅仅与散射光频率差之差相关，与 θ_2 没有关系，所以此方法对速度的测量与散射光的方向无光。

(3) 如图 b 所示，黑色粗线所包围的菱形为两对称射入相干平行光束相交区域，蓝色细线代表区域内的光线，对于位于 z 轴上的各点来说 $\Delta\phi = 0$ ，因此在相交区域 z 轴上的各点干涉相长（比如 O 点与 O' 点），将呈现干涉相长明条纹。

过 O 点做垂线 OA 垂直于 AP，OB 垂直于 BP，因此两相干光到 P 点相对于 O 点的相位差为

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} (AP + BP) = \frac{4\pi}{\lambda} d \sin \frac{\alpha}{2} \quad (10)$$

其中 d 为 P 点到 X 轴的距离。

类似的，对 O' 点做垂线 O'A' 垂直于 A'P'，O'B' 垂直于 B'P'，因此两相干光到 P' 点的相位差为

$$\Delta\phi' = \frac{2\pi}{\lambda} (A'P' + B'P') = \frac{4\pi}{\lambda} d \sin \frac{\alpha}{2} \quad (11)$$

因此，对于相交区域内 P'P 上的各点干涉情况一致，由图中几何关系可知，P'P 平行 O'O，如果各点满足 π 的偶数倍，则干涉相长，

$$\frac{4\pi}{\lambda} d \sin \frac{\alpha}{2} = 2j\pi, \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (12)$$

所以，第零级明条纹在相交区域内 X 轴上，其余明条纹将平行于 X 轴，呈等间距分布。形成亮条纹两个相邻明条纹之间相位差 2π ，有

$$2d \sin(\alpha/2) = \lambda, \quad (13)$$

因此干涉条纹间距为

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin(\alpha/2)} \quad (14)$$

由于光强明暗相间的结果，每当粒子运动到明场时将散射出一个光脉冲，所以光脉冲的频率与粒子速度的竖直方向分量有关。粒子穿越相邻两条亮纹的时间为

$$\tau = \frac{d}{v \cos \beta} \quad (15)$$

于是光脉冲频率为

$$f_D = \frac{2f v n}{c} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \beta \quad (16)$$

[解法二：两束入射光的方向分别为

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 &= \cos \frac{\alpha}{2} \hat{i} + \sin \frac{\alpha}{2} \hat{j} \\ \hat{e}_2 &= \cos \frac{\alpha}{2} \hat{i} - \sin \frac{\alpha}{2} \hat{j} \end{aligned} \quad (10)$$

在位矢 \vec{r} 处，两束光的相位差为

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} (\vec{r} \cdot \hat{e}_1 - \vec{r} \cdot \hat{e}_2) \quad (11)$$

所有相位差都为 $\Delta\phi$ 的场点满足的方程为

$$\Delta\phi = 2y \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \quad (12)$$

可见干涉条纹为一系列与 X 轴平行的直线。条纹间距 d 满足

$$2y \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \quad (13)$$

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin(\alpha/2)} \quad (14)$$

粒子穿越相邻两条亮纹的时间为

$$\tau = \frac{d}{v \cos \beta} \quad (15)$$

于是光脉冲频率为

$$f_D = \frac{2f v n}{c} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \beta \quad (16)$$

]

评分标准：本题共 40 分，①②④⑤⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮各 2 分，③⑥⑦⑭⑮式各 4 分。

第五题参考解答:

(1) 星际介质处于等离子态, 由于正离子质量远大于负离子(电子)的质量, 因此在电场的作用下电子运动, 而离子可视为不动。星际介质的离子数密度很小, 离子间的碰撞可忽略。电子的运动是低速的, 电磁波的磁场对电子的作用也可忽略。设电子的运动速度为 \mathbf{v} , 则电子受到的洛伦兹力为

$$\mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1)$$

由于 \mathbf{E} 与电磁波传播方向垂直, \mathbf{B} 与传播方向平行, $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 与传播方向垂直, 故 \mathbf{F} 与传播方向垂直, 从而使电子在垂直于信号传播方向的平面中作圆周运动。由牛顿第二定律有

$$eE_0 \pm e v B = \frac{m_e v^2}{R_e} \quad (2)$$

式中,

$$v = 2\pi f R_e \quad (3)$$

\pm 对应于电子两个不同的旋转方向。由②③式得

$$R_e = \frac{eE_0}{2\pi m_e f (2\pi f \mp \frac{eB}{m_e})} \quad (4)$$

[

解法(二)

电子在洛伦兹力作用下的运动方程为

$$m\ddot{\mathbf{x}}(t) = -e[\mathbf{E}(t) + \dot{\mathbf{x}}(t) \times \mathbf{B}] \quad (1)$$

式中 $\mathbf{E}(t)$ 为该点电磁波的电场

$$\mathbf{E}(t) \equiv E_x + iE_y = E_0 e^{\pm i(\omega t - kz)}$$

这里 $\omega = 2\pi f$, 而 $\theta(t)$ 是在垂直于电磁波传播方向的平面(作为复平面)上电场的辐角。在上述复平面上

$$\mathbf{x}(t) = R_e e^{\pm i\omega t} \quad (2)$$

式中, ω 可理解为该电子回转的角速度。由②式和 $\mathbf{x}(t)$ 与 \mathbf{B} 正交可知

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \times \mathbf{B} = \pm i[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}(t)] \times \mathbf{B} = \pm i\dot{\mathbf{x}}(t)(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{B}) = \pm i\omega B \mathbf{x}(t) \quad (3)$$

由①②③式有

$$-m\omega^2 R_e = -e[E_0 \pm \omega R_e B]$$

此即

$$R_e = \frac{eE_0}{2\pi m f (2\pi f \mp \frac{eB}{m})} \quad (4)$$

]

(2) 星际介质中单位体积内的电子数为 n_e , 所以介质的极化强度为

$$\mathbf{P} = -n_e e R_e \quad (5)$$

电位移矢量为

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \left(\varepsilon_0 - \frac{n_e e^2}{4\pi^2 m_e f^2 \mp 2\pi f e B} \right) \mathbf{E} \quad (6)$$

从而得到介质的介电常数

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \frac{n_e e^2}{4\pi^2 m_e f^2 \mp 2\pi f e B} \quad (7)$$

折射率 n 为

$$n^2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{f_p^2}{f(f \mp f_B)} \quad (8)$$

式中

$$f_p = \frac{e}{2\pi} \sqrt{\frac{n_e}{\varepsilon_0 m_e}}, \quad f_B = \frac{eB}{2\pi m_e}$$

分别是等离子体的特征频率、电子在磁场中的同步回旋频率。

由波矢、频率和折射率的关系 $k = \frac{\omega}{c} n$ ($\omega = 2\pi f$) 和⑦式得, 群速度为

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}} = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} = \frac{nc}{1 \pm \frac{f_p^2 f_B}{2f(f \mp f_B)^2}} \quad (9)$$

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \mp \omega_B)} = 1 \pm \frac{\omega_p^2}{\omega_B} \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega \mp \omega_B} \right)$$

$$\omega \frac{dn}{d\omega} = \mp \frac{\omega_p^2}{2n\omega_B} \left(\frac{1}{\omega} - \frac{\omega}{(\omega \mp \omega_B)^2} \right) = \mp \frac{\omega_p^2}{2n\omega_B} \frac{\mp 2\omega\omega_B + \omega_B^2}{\omega(\omega \mp \omega_B)^2} = \frac{\omega_p^2}{2n} \frac{2\omega \mp \omega_B}{\omega(\omega \mp \omega_B)^2}$$

$$v_g = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} = \frac{nc}{1 \pm \frac{f_p^2}{2} \frac{f_B}{f(f \mp f_B)^2}}$$

在介质中群速度为零的电磁波是不能在该介质中传播的,

$$v_g = 0 \quad (10)$$

即

$$f^2 \mp f_B f - f_p^2 = 0$$

舍去方程的负根, 得到能通过星际介质的最低电磁波频率为

$$f_c = \frac{1}{2} \left(\sqrt{f_B^2 + 4f_p^2} \pm f_B \right) = \frac{e}{4\pi} \left(\sqrt{\frac{B^2}{m_e^2} + \frac{4n_e}{\varepsilon_0 m_e}} \pm \frac{B}{m_e} \right) \quad (11)$$

当 $B=0$ 时 $f_c = f_p$, 这正是把 f_p 称为等离子体特征频率的原因。

(3) 频率为 f 的电磁波信号通过该介质达到地球的时间比其在真空中传播的时间延迟量为

$$\Delta t = \left(\int_0^d \frac{dl}{v_g} \right) - \frac{d}{c} \quad (12)$$

将⑨式代入⑪式, 并注意到 $f_p \ll f, f_B \ll f$, 有

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{1}{c} \int_0^d \left(1 + \frac{f_p^2}{2f^2} \pm \frac{f_p^2 f_B}{2f^3} \right) dl - \frac{d}{c} = D_1 \times \frac{DM1}{f^2} \pm D_2 \times \frac{DM2}{2f^3} = \frac{1}{2f^2 c} \frac{e^2 \bar{n}_e d}{4\pi^2 \epsilon_0 m_e} \left(1 \pm \frac{eB}{2\pi m_e} \right) \quad (13) \\ \Delta t &= \int_0^d \frac{dl}{v_g} - \frac{d}{c} = \frac{1}{c} \int_0^d \left[1 \pm \frac{f_p^2}{2} \frac{f_B}{f(f \mp f_B)^2} + \frac{f_p^2}{2f(f \mp f_B)} \right] dl - \frac{d}{c} \\ &\approx \frac{1}{c} \int_0^d \left[1 + \frac{f_p^2}{2f^2} \pm \frac{f_p^2 f_B}{2f^3} \right] dl - \frac{d}{c} \\ &= \frac{1}{2f^2 c} \frac{e^2 n_e d}{4\pi^2 \epsilon_0 m_e} \left(1 \pm \frac{eB}{2\pi m_e} \right)\end{aligned}$$

式中

$$DM1 = \int_0^d n_e dl = n_e d, \quad D_1 \equiv \frac{e^2}{2\pi m_e \epsilon_0 c},$$

$$DM2 = \int_0^d n_e B dl = n_e B d, \quad D_2 \equiv \frac{e^3}{8\pi^3 \epsilon_0^2 m_e^2 c}$$

(4) 由波数与折射率关系 $k = \frac{\omega}{c} n$ 及方程⑦ (在 $f_p \ll f, f_B \ll f$ 的近似下),

$$k(f) = \frac{2\pi f}{c} n = \frac{2\pi f}{c} \sqrt{1 - \frac{f_p^2}{f^2} \mp \frac{f_p^2 f_B}{f^3}} \quad (14)$$

在区间 d 中两种不同信号的相位 Φ 差为

$$\Delta\Phi = \int_0^d \frac{2\pi}{c} f \left(\sqrt{1 - \frac{f_p^2}{f^2} + \frac{f_p^2 f_B}{f^3}} - \sqrt{1 - \frac{f_p^2}{f^2} - \frac{f_p^2 f_B}{f^3}} \right) dl \quad (15)$$

利用近似 $f_p \ll f, f_B \ll f$, 得到达地球时的相位变化为

$$\Delta\Phi \approx \frac{2\pi}{c} \frac{f_p^2 f_B}{f^2} d = \frac{e^3}{4\pi^2 \epsilon_0 m_e^2 c f^2} n_e B d \quad (16)$$

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \int_0^d \frac{2\pi}{c} f \left[\left(1 - \frac{f_p^2}{2f^2} + \frac{f_p^2 f_B}{2f^3} \right) - \left(1 - \frac{f_p^2}{2f^2} - \frac{f_p^2 f_B}{2f^3} \right) \right] dl \\ &= \frac{2\pi}{cf^2} \int_0^d f_p^2 f_B dl \\ &= \frac{2\pi}{cf^2} \frac{e^2}{4\pi^2 \epsilon_0 m_e} \frac{e}{2\pi m_e} \int_0^d n_e B dl = \frac{e^3}{4\pi^2 \epsilon_0 m_e^2 cf^2} \int_0^d n_e B dl = \frac{e^3 B d n_e}{4\pi^2 \epsilon_0 m_e^2 cf^2}\end{aligned}$$

(5) 当电子密度出现涨落时, 就会引起折射率的变化, 由⑦式得

$$\Delta n = -\frac{f_p^2}{2nf(f \mp f_B)} \frac{\Delta n_e}{n_e} \quad (17)$$

由波矢、频率和折射率的关系 $k = \frac{\omega}{c} n$ 得到波矢的变化

$$\Delta k = \frac{2\pi f}{c} \Delta n = -\frac{\pi f_p^2}{nc(f \mp f_B)} \frac{\Delta n_e}{n_e} \quad (18)$$

于是，某频率脉冲星信号通过电子密度出现涨落区间产生的相位移动为

$$\Delta\Phi = -a\Delta k = \frac{\pi f_p^2}{nc(f \mp f_B)} \frac{\Delta n_e}{n_e} a \quad (19)$$

评分标准： 本题共 40 分，其中①③⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯⑰⑱式各 2 分，②④式各 3 分。

第六题参考解答：

(1) 入射高能质子的动量为

$$P = \sqrt{\frac{E_p^2}{c^2} - M_p^2 c^2} = 6.735 \text{ GeV}/c \quad (1)$$

产生的反质子的动量

$$P_{\bar{p}} = \frac{P}{4} = 1.684 \text{ GeV}/c \quad (2)$$

[或者

$$E_p + M_p c^2 = 4E_{\bar{p}} \quad (1)$$

$$E_{\bar{p}} = \sqrt{P_{\bar{p}}^2 c^2 + M_p^2 c^4} \quad (2)$$

]

反质子的运动速度

$$v_{\bar{p}} = \frac{P_{\bar{p}} c^2}{E_{\bar{p}}} = \frac{P_{\bar{p}} c^2}{\sqrt{P_{\bar{p}}^2 c^2 + M_p^2 c^4}} = 0.873c \quad (3)$$

反质子从 S_1 运动到 S_2 的时间

$$t_{\bar{p}} = \frac{l}{v_{\bar{p}}} = 45.8 \text{ ns}. \quad (4)$$

π 介子的能量

$$E_{\pi} = E_{K,\pi} + m_{\pi} = E_{\bar{p}} - M_{\bar{p}} + m_{\pi}. \quad (5)$$

π 介子的运动速度为

$$v_{\pi} = \frac{P_{\pi} c^2}{E_{\pi}} = \frac{c\sqrt{E_{\pi}^2 - m_{\pi}^2 c^4}}{E_{\pi}} = 0.992c \quad (6)$$

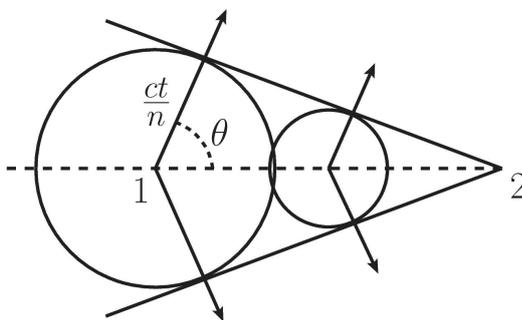
π 介子从 S_1 运动到 S_2 的时间

$$t_\pi = \frac{l}{v_\pi} = 40 \text{ ns}. \quad (7)$$

(2) 粒子的速度为 v ，媒质中的光速为 c/n 。若 $v > c/n$ ，粒子从 1 运动到 2 时，粒子在其运动的路径上的各点所激发的媒质中的电磁场形成一个圆锥形包络面，如下图所示。辐射方向沿圆锥包络面的法线方向，于是

$$\cos \theta = \frac{c}{nv}. \quad (8)$$

所以 $\theta = \arccos \frac{c}{nv}$ 。



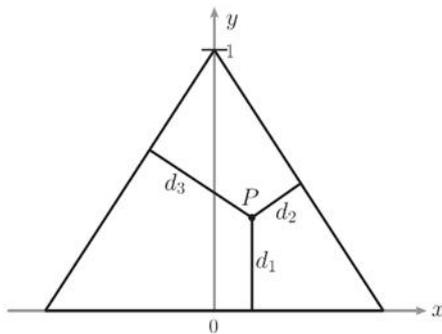
(3) 球面镜的焦距

$$f = R/2. \quad (9)$$

焦平面上光环的半径

$$r = f \tan \theta = \frac{R}{2} \sqrt{\left(\frac{nv}{c}\right)^2 - 1}. \quad (10)$$

(4)



由动量守恒，

$$\gamma_1 m_\pi \mathbf{v}_1 + \gamma_2 m_\pi \mathbf{v}_2 + \gamma_3 m_\pi \mathbf{v}_3 = 0, \quad (11)$$

能量守恒，

$$m_\pi c^2 (\gamma_1 - 1) + m_\pi c^2 (\gamma_2 - 1) + m_\pi c^2 (\gamma_3 - 1) = Q. \quad (12)$$

以及

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} \quad (13)$$

[或

由动量守恒,

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3 = 0 \quad (11)$$

能量守恒,

$$E_{k,1} + E_{k,2} + E_{k,3} = Q \quad (12)$$

以及

$$E_{k,i} = \sqrt{p_i^2 c^2 + m_\pi^2 c^4} - m_\pi c^2 \quad (13)$$

]]

得 $p_i = \frac{Q}{c} \sqrt{d_i^2 + 2d_i K}$, 其中 $K = m_\pi c^2 / Q$, $d_i = K(\gamma_i - 1)$, 于是 3 个 π 介子的动量大小 p_1 、 p_2 、

p_3 满足 $p_i + p_j > p_k$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ 。

d_1 、 d_2 、 d_3 可能的分布范围为:

$$\begin{aligned} \sqrt{d_1^2 + 2d_1 K} &\leq \sqrt{d_2^2 + 2d_2 K} + \sqrt{d_3^2 + 2d_3 K} \\ \sqrt{d_2^2 + 2d_2 K} &\leq \sqrt{d_1^2 + 2d_1 K} + \sqrt{d_3^2 + 2d_3 K} \\ \sqrt{d_3^2 + 2d_3 K} &\leq \sqrt{d_1^2 + 2d_1 K} + \sqrt{d_2^2 + 2d_2 K} \end{aligned} \quad (14)$$

在坐标系中,

$$d_1 = y, \quad d_2 = -(\sqrt{3}x + y - 1) / 2, \quad d_3 = (\sqrt{3}x - y + 1) / 2 \quad (15)$$

把(15)式代入(14)式得

$$2(3K+1)y^3 - 6(3K+1)x^2y + (12K^2-1)y^2 + 3(2K+1)^2x^2 - 2(4K+1)Ky \leq 0 \quad (16)$$

若 $m_\pi = 0$, 则 $K = 0$, 于是

$$(y-1/2)(y-\sqrt{3}x)(y+\sqrt{3}x) \leq 0 \quad (17)$$

表示三条边的中点连接成的三角形区域。

评分标准: 本题共 40 分, ①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫每式 2 分, ⑬⑭⑮⑯⑰每式 3 分。

第七题参考解答:

(1) 假设整个欹器是实心时, 它分为长圆柱部分 (I) 和半球部分 (II)。在坐标系 XOZ 中, 圆柱部分质心的位置为:

$$x_{\text{CI}} = 0, \quad z_{\text{CI}} = \frac{l}{2} = R$$

半球部分质心的位置为:

$$x_{\text{CII}} = 0, \quad z_{\text{CII}} = \frac{\int_{-R_2}^0 \rho_1 \pi (R_2^2 - z^2) z dz}{\int_{-R_2}^0 \rho_1 \pi (R_2^2 - z^2) dz} = -\frac{3}{8} R_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{8} R = -0.6495R \quad \textcircled{1}$$

设整个实心体的质心坐标为 $(x_{\text{C实}}=0, z_{\text{C实}})$, 则

$$(\rho\pi R_2^3 l + \rho \frac{2}{3} \pi R_2^3) z_{\text{C实}} = \rho\pi R_2^3 l \frac{l}{2} - \rho \frac{2}{3} \pi R_2^3 \frac{3R_2}{8}$$

于是

$$x_{\text{C实}} = 0, \quad z_{\text{C实}} = \frac{3(2l^2 - R_2^2)}{4(3l + 2R_2)} = \frac{5(3 - \sqrt{3})}{16} R = 0.3962R \quad \textcircled{2}$$

相应地, 整个欹器空心部分的质心坐标为

$$x_{\text{C空}} = t = 0.3R, \quad z_{\text{C空}} = \frac{3(2l^2 - R_1^2)}{4(3l + 2R_1)} = \frac{21}{32} R = 0.6563R \quad \textcircled{3}$$

设 $m_{\text{实}}$ 和 $m_{\text{空}}$ 分别是整个欹器是实心时欹器的质量和整个欹器空心部分刚好填实所需的质量, 有

$$m_{\text{实}} = \rho_1 \pi R_2^2 \left(\frac{2R_2}{3} + l \right), \quad m_{\text{空}} = \rho_1 \pi R_1^2 \left(\frac{2R_1}{3} + l \right)$$

整个瓶子的质心坐标为

$$x_{\text{C}} = \frac{m_{\text{实}} x_{\text{C实}} + (-m_{\text{空}}) x_{\text{C空}}}{m_{\text{实}} + (-m_{\text{空}})} = -\frac{R_1^2 t (3l + 2R_1)}{3l(R_2^2 - R_1^2) + 2(R_2^3 - R_1^3)} = \frac{3(5 - 3\sqrt{3})}{5} R = -0.1177R \quad \textcircled{4}$$

$$\begin{aligned} z_{\text{C}} &= \frac{m_{\text{实}} z_{\text{C实}} + (-m_{\text{空}}) z_{\text{C空}}}{m_{\text{实}} + (-m_{\text{空}})} = \frac{3(R_2 + R_1)(2l^2 - R_2^2 - R_1^2)}{4[3l(R_2 + R_1) + 2(R_2^2 + R_2 R_1 + R_1^2)]} \\ &= \frac{3}{2} (3\sqrt{3} - 5) R = 0.2942R \end{aligned} \quad \textcircled{5}$$

悬挂点的位置为 $(-\frac{1}{10}R, \frac{2\sqrt{3}}{11}R)$ ，欹器内没装水悬挂时欹器倾斜的角度为

$$\theta_0 = \operatorname{arccot} \frac{z_c - z_Q}{x_c - x_Q} = \operatorname{arccot} \frac{25(5\sqrt{3} - 3)}{121} = 0.707439 \times \frac{180^\circ}{\pi} = 40.5333^\circ \quad (6)$$

(2) 由球绕直径的转动惯量知，半球绕其底面圆直径的转动惯量为

$$I_{11} = \frac{1}{2} I_1 = \frac{4}{15} \pi \rho R^5$$

由平行轴定理知，半球绕穿过其质心且平行其底面的转轴的转动惯量为

$$I_{1c} = I_{11} - \frac{2}{3} \pi \rho R^3 \left(\frac{3}{8} R\right)^2 = \frac{83}{480} \pi \rho R^5 = 0.1729 \pi \rho R^5 \quad (7)$$

中间为实心时欹器绕悬挂点连线的转动惯量

$$\begin{aligned} I_{\text{实}} &= \frac{83}{480} \pi \rho_1 R_2^5 + \frac{2}{3} \rho_1 \pi R_2^3 [x_Q^2 + (\frac{3}{8} R_2 + z_Q)^2] + I_2 + \rho_1 \pi R_2^2 [x_Q^2 + (\frac{l}{2} - z_Q)^2] \\ &= \frac{79588 + 7591\sqrt{3}}{6050} \rho_1 \pi R^5 = 15.3283 \rho_1 \pi R^5 \end{aligned} \quad (8)$$

空心部分绕悬挂点连线的转动惯量

$$\begin{aligned} I_{\text{空}} &= I_2 + \rho_1 \pi R_1^2 [l(x_Q + t)^2 + (\frac{l}{2} - z_Q)^2] + I_{1c} + \frac{2}{3} \rho_1 \pi R_1^3 [(x_Q + t)^2 + (\frac{3}{8} R_1 + z_Q)^2] \\ &= \frac{(24953 - 3850\sqrt{3})}{6050} \rho_1 \pi R^5 = 3.0223 \rho_1 \pi R^5 \end{aligned} \quad (9)$$

欹器绕悬挂点连线的转动惯量

$$I = I_{\text{实}} - I_{\text{空}} = \frac{(54635 + 11441\sqrt{3})}{6050} \rho_1 \pi R^5 = 12.306 \rho_1 \pi R^5 \quad (10)$$

质心到悬挂点轴线的距离

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\left(-\frac{R_1^2 t(3l + 2R_1)}{3l(R_2^2 - R_1^2) + 2(R_2^3 - R_1^3)} + x_Q\right)^2 + \left(\frac{3(R_2 + R_1)(2l^2 - R_2^2 - R_1^2)}{4[3l(R_2 + R_1) + 2(R_2^2 + R_2 R_1 + R_1^2)]} - z_Q\right)^2} \\ &= \frac{(3\sqrt{3} - 5)\sqrt{2}}{220} \sqrt{30848 - 17541\sqrt{3}} \rho_1 \pi R^3 = 0.02722 \rho_1 \pi R^3 \end{aligned}$$

$$m_{\text{欹}} = m_{\text{实}} - m_{\text{空}} = \rho_1 \pi [R_2^2 (\frac{2R_2}{3} + l) - R_1^2 (\frac{2R_1}{3} + l)] = \frac{2}{3} (5 + 3\sqrt{3}) \rho_1 \pi R^3$$

欹器绕悬挂点连线摆动的角频率

$$\omega = \sqrt{\frac{m_{\text{欹}} g d}{I}} = \sqrt{\frac{110\sqrt{2(30848 - 17541\sqrt{3})}}{163905 + 34323\sqrt{3}}} \sqrt{\frac{g}{R}} = 0.122624 \sqrt{\frac{g}{R}} \quad (11)$$

(3) (解法一) 设欹器竖直时里面装的水的质量为 m_s 。此时水、欹器以及整个体系质心的横坐标 x_{CS} 、 x_c 和 x_{Ct} 分别为

$$x_{CS} = t \quad (12)$$

$$x_C = \frac{3(5-3\sqrt{3})}{5}R = -0.1177R$$

$$x_{Ct} = x_Q \quad (13)$$

故有

$$x_{Ct}(m_S + m_q) = m_S x_{CS} + m_q x_C \quad (14)$$

解得:

$$m_S = \frac{m_q(x_C - x_{Ct})}{x_{Ct} - x_{CS}} = \frac{m_q(x_C - x_Q)}{x_Q - t} = 0.3006\rho_1\pi R^3 = 0.9018\rho_2\pi R^3 \quad (15)$$

由于

$$m_S = 0.9018\rho_2\pi R^3 > \frac{2}{3}\rho_2\pi R^3 \quad (16)$$

故水的体积大于底部半球的容器, 即 $h > R$ 。

因而有

$$m_S = \frac{2}{3}\rho_2\pi R^3 + \rho_2\pi R^2(h - R) = 0.9018\rho_2\pi R^3 \quad (17)$$

解得

$$h = \frac{(23-9\sqrt{3})}{6}R = 1.23526R \quad (18)$$

此时整个体系质心的纵坐标

$$\begin{aligned} z_{Ct} &= \frac{mz_C + m_{S2}z_{CS}}{m + m_{S2}} = \frac{3\{\rho_1(R_2^2 - R_1^2)(2l^2 - R_1^2 - R_2^2) + \rho_2R_1^2(2h^2 - 4hR_1 + R_1^2)\}}{4\{\rho_1[3l(R_2^2 - R_1^2) + 2(R_1^3 - R_1^3)] + \rho_2R_1^2(3h - R_1)\}} \\ &= \frac{3(2h^2 - 4hR + 25R^2)}{4[3h + (29 + 18\sqrt{3})R]} = 0.271326R < z_Q \end{aligned} \quad (19)$$

故 $h = 1.23526R$ 时欹器正立。

〔(解法二) 若 $h \leq R_1$ 时欹器竖直位置, $h \leq R_1$ 时, 水的质心位置为

$$\begin{cases} x_{CS_1} = t = 0.3R, \\ z_{CS_1} = \frac{\int_{-R}^{-(R-h)} \rho_2\pi(R^2 - z^2)zdz}{\int_{-R}^{-(R-h)} \rho_2\pi(R^2 - z^2)dz} = -\frac{3(2R - h)^2}{4(3R - h)} \end{cases} \quad (20)$$

欹器的质量 m 和此时欹器中水的质量 m_s 分别为

$$\begin{aligned} m &= \rho_1\left[\left(\frac{2}{3}\pi R_2^3 + \pi R_2^2 l\right) - \left(\frac{2}{3}\pi R_1^3 + \pi R_1^2 l\right)\right] = \frac{1}{3}\rho_1\pi[3l(R_2^2 - R_1^2) + 2(R_2^3 - R_1^3)] \\ &= \frac{1}{3}\rho_1\pi(R_2 - R_1)[3l(R_2 + R_1) + 2(R_2^2 + R_1R_2 + R_1^2)] \\ m_{S_1} &= \int_{-R}^{-(R-h)} \rho_2\pi(R^2 - z^2)dz = \frac{\rho_2\pi h^2(3R - h)}{3} \end{aligned}$$

整个装置的质心 C_1 的位置坐标为

$$\begin{aligned} x_{Ct1} &= \frac{mx_C + m_s x_{Cs}}{m + m_s} = \frac{[\rho_1 R_1^2 (3l + 2R_1) + \rho_2 h^2 (h - 3R_1)]t}{\rho_1 [3l(R_1^2 - R_2^2) + 2(R_1^3 - R_2^3)] + \rho_2 h^2 (h - 3R_1)} \\ &= \frac{3R(24R^3 - 3h^2R + h^3)}{10[(h - 3R)h^2 - 6(5 + 3\sqrt{3})R^3]} \end{aligned} \quad (13)$$

欹器身正立时，悬挂点与系统质心的连线为竖直线必有

$$x_{Ct} = x_Q = -0.1h, \quad (14)$$

解得

$$h = -0.8394R, \quad h = 1.2389R, \quad h = 2.5996R, \quad \text{均不满足 } 0 < h < R, \quad (15)$$

故此时无解。

因此欹器竖直时，必有 $h > R_1$ 。

当 $h > R_1$ 时，与③、④式对比（③、④式中可视为 $l = h - R_1$ ），得水的质心位置为

$$\begin{aligned} x_{Cs} &= t = 0.3R, \\ z_{Cs} &= \frac{\int_{-R_1}^0 \rho_2 \pi (R_1^2 - z^2) z dz + \int_0^{h-R_1} \rho_2 \pi R_1^2 z dz}{\int_{-R_1}^0 \rho_2 \pi (R_1^2 - z^2) dz + \int_0^{h-R_1} \rho_2 \pi R_1^2 dz} = \frac{3(2h^2 - 4hR + R^2)}{4(3h - R)} \end{aligned} \quad (16)$$

此时欹器中水的质量 m_{s2} 为

$$m_{s2} = \rho_1 \pi R_1^2 \left(h - \frac{R_1}{3} \right)$$

整个装置的质心位置为

$$\begin{aligned} x_{Ct2} &= \frac{mx_C + m_{s2} x_{Cs2}}{m + m_{s2}} = \frac{R_1^2 [\rho_1 (3l + 2R_1) + \rho_2 (R_1 - 3h)]t}{\rho_1 [3l(R_1^2 - R_2^2) + 2(R_1^3 - R_2^3)] + \rho_2 R_1^2 (R_1 - 3h)} \\ &= \frac{3(3h - 25R)R}{10[3h + (29 + 18\sqrt{3})R]} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} z_{Ct2} &= \frac{mz_C + m_{s2} z_{Cs}}{m + m_{s2}} = \frac{3\{[\rho_1 (R_2^2 - R_1^2)(2l^2 - R_1^2 - R_2^2) + \rho_2 R_1^2 (2h^2 - 4hR_1 + R_1^2)]\}}{4\{\rho_1 [3l(R_2^2 - R_1^2) + 2(R_1^3 - R_2^3)] + \rho_2 R_1^2 (3h - R_1)\}} \\ &= \frac{3(2h^2 - 4hR + 25R^2)}{4[3h + (29 + 18\sqrt{3})R]} \end{aligned} \quad (18)$$

欹器身正立，悬挂点与系统质心的连线为竖直线必有

$$x_{Ct2} = x_Q = -0.1h$$

且
$$z_{Ct2} < z_Q = \frac{2\sqrt{3}}{11} h$$

当 $h > R_1$ 时, 由⑱式, 有

$$h = \frac{1}{3} \left[R_1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(3l + 2R_1 - \frac{x_Q R_2^2 (3l + 2R_2)}{R_1^2 (t - x_Q)} \right) \right] = \frac{(23 - 9\sqrt{3})}{6} R = 1.23526R \quad \text{⑲}$$

而由 $z_{Ct2} < z_Q = \frac{2\sqrt{3}}{11} h$ 得

$$0 < h < 2.67979R \quad \text{或} \quad h < -20.059R$$

故 $h = 1.23526R$ 时敬器正立。]

(4) 敬器“满则覆”的临界条件是: 系统质心刚好高于悬挂点: 或

$$x_{CH} = -x_Q, \quad z_{CH} = z_Q \quad \text{⑳}$$

评分标准: 本题共 40 分, ①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯⑰⑱⑳式各 2 分。