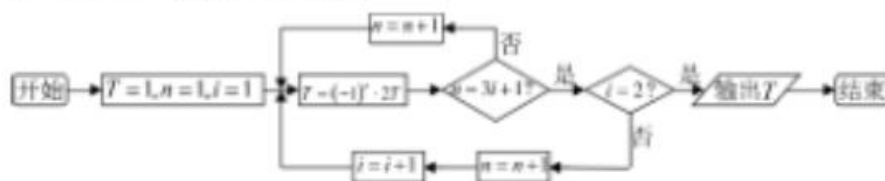




5. 执行如下图所示的程序框图, 则输出的  $T$  为 ( )



- A. -64                      B. -32                      C. 16                      D. 128

6. 已知点  $P$  是圆  $C: (x-5)^2 + (y+12)^2 = 1$  上的任意一点, 点  $M, N$  分别为圆  $O: x^2 + y^2 = 4$  上的两个不同的动点, 且  $|MN| = 2\sqrt{3}$ , 点  $Q$  为线段  $MN$  的中点, 则  $|PQ|$  的最小值为 ( )

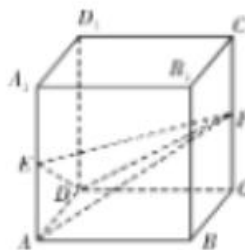
- A. 11                      B. 12                      C. 13                      D. 14

7. 如图, 在平行四边形  $ABCD$  中,  $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AE}$ ,  $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FD}$ , 点  $G$  为  $CE$  与  $BF$  的交点, 则  $\overrightarrow{AG} =$  ( )

- A.  $\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$       B.  $\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$       C.  $\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{15}\overrightarrow{AC}$       D.  $\frac{3}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$



第 7 题图



第 8 题图

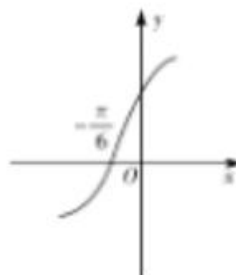
8. 如图, 已知正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的体积为 8, 点  $E, F$  分别是  $AA_1, CC_1$  的中点, 则四面体  $FADE$  外接球的表面积为 ( )

- A.  $4\pi$                       B.  $9\pi$                       C.  $16\pi$                       D.  $25\pi$

9. 已知函数  $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega \in \mathbb{N}^+, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图

所示, 且函数  $f(x)$  在  $x = \frac{7\pi}{12}$  处取得最小值, 则函数  $f\left(\frac{x}{2}\right)$  在  $[0, \pi]$  上的单调递减区间为 ( )

- A.  $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$                       B.  $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$   
C.  $\left[0, \frac{\pi}{12}\right]$                       D.  $\left[\frac{\pi}{6}, \pi\right]$



10. 在四棱锥  $S-ABCD$  中,  $SC \perp$  平面  $ABCD, AB \parallel CD, AB \perp AD, AD = CD = 1, SD = AB = 2$ , 点  $E$  为  $SB$  的中点, 则异面直线  $SD$  与  $CE$  所成角的余弦值为 ( )

- A.  $\frac{\sqrt{5}}{10}$                       B.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$                       C.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$                       D.  $\frac{3\sqrt{5}}{10}$

11. 已知点  $F_1, F_2$  分别为双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点, 过  $F_1$  的直线  $l$  与双曲线  $C$  的左支相交于  $A, B$  两点, 与  $y$  轴相交于点  $D$ , 且  $|AF_1| = \frac{\sqrt{2}+1}{2}|DF_1|$ ,



$\angle DF_1F_2 = \frac{\pi}{3}$ , 则双曲线  $C$  的离心率为 ( )

- A.  $\sqrt{2}$       B.  $\sqrt{3}$       C.  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$       D.  $\sqrt{5}$

12. 已知  $f(x), g(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的函数, 且均不恒为 0,  $g(x)$  为偶函数,  $f(2)=3$ . 若对任意的  $x \in \mathbf{R}$ , 都有  $f(x+2)+f(x)=\sqrt{2}f(x+1), g(x+4)=g(x)+g(2)$ , 则下列说法正确的是 ( )

- A. 函数  $f(x)$  的一个周期为 4      B. 函数  $g(x)$  的一个周期为 6  
C. 函数  $f(x)+g(x)$  的一个周期为 4      D.  $f(66)+g(66)-3$

**二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.**

13. 小明的外婆来到蔬菜超市, 准备从黄瓜、南瓜、丝瓜、苦瓜、白瓜这 5 种新鲜瓜类蔬菜中任意购买 3 种, 则小明的外婆购买的瓜类蔬菜中含苦瓜的概率为\_\_\_\_\_.

14. 已知点  $P(x_0, y_0)$  关于  $x$  轴的对称点在曲线  $C: y=2\sqrt{x}$  上, 且点  $P$  到点  $F(1, 0)$  的距离为点  $P$  到直线  $x=4$  的距离的  $\frac{1}{3}$ , 则点  $P$  的横坐标  $x_0 =$ \_\_\_\_\_.

15. 已知在数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1=3$ , 且  $\{a_n-1\}$  是公比为 3 的等比数列, 则使  $\frac{a_1-1}{a_1a_2} + \frac{a_2-1}{a_2a_3} + \dots + \frac{a_n-1}{a_na_{n+1}} = \frac{80}{489}$  的正整数  $n$  的值为\_\_\_\_\_.

16. 函数  $f(x) = \ln x + 1$  的图象与函数  $g(x) = e^x - 1$  的图象的公切线的方程为\_\_\_\_\_.

**三、解答题: 共 70 分. 解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.**

17. (本小题满分 10 分)

已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n, a_n > 0, a_1 = 1$ , 且当  $n \geq 2$  时,  $(a_n - a_{n-1})S_n + a_{n-1}S_{n-1} = a_nS_{n-1} + a_{n-1} + 1$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 设  $b_n = \begin{cases} 2^n, & n=2k-1, \\ 2a_n, & n=2k \end{cases} (k \in \mathbf{N}^+)$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $2n$  项和  $T_{2n}$ .

18. (本小题满分 12 分)

在斜三角形  $ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 满足  $a \sin A + 4b \sin C \cos^2 A = b \sin B + c \sin C$ .

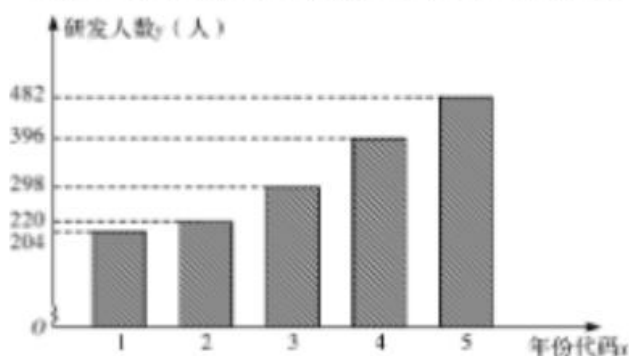
(1) 求角  $A$  的大小;

(2) 当  $a=3$  时, 求  $b+c$  的取值范围.

19. (本小题满分 12 分)

随着电池充电技术的逐渐成熟,以锂电池为动力的新一代无绳类电动工具以其轻巧便携、工作效率高、环保、可适应多种应用场景下的工作等优势,被广泛使用.在消费者便携无绳化需求与技术发展的双重驱动下,锂电类无绳电动工具及配套充电器市场有望持续扩大.某公司为适应市场并增强市场竞争力,逐年增加研发人员,使得整体研发创新能力持续提升,现对 2017~2021 年的研发人数作了相关统计,如下图:

2017~2021 年公司的研发人数情况(年份代码 1~5 分别对应 2017~2021 年)



- (1) 根据条形统计图中数据,计算该公司研发人数  $y$  与年份代码  $x$  的相关系数  $r$ ,并由此判断其相关性的强弱;
- (2) 试求出  $y$  关于  $x$  的线性回归方程,并预测 2023 年该公司的研发人数.(结果取整数)

参考数据:  $\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = 55\ 960$ ,  $\sqrt{1\ 399} \approx 37.4$ .

参考公式: 相关系数  $r = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}}$ .

线性回归方程的斜率  $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2}$ , 截距  $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$ .

附:

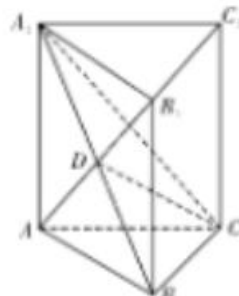
$ r $	$[0, 0.25]$	$[0.30, 0.75]$	$[0.75, 1]$
相关性	弱	一般	强

20. (本小题满分 12 分)

如图,在三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $A_1A \perp AC$ ,  $A_1C \perp BC$ ,  $AB_1$  与  $A_1B$  相交于点  $D$ , 且  $\triangle A_1B_1D$  为等边三角形.

(1) 求证:  $BC \perp$  平面  $AA_1C_1C$ ;

(2) 若  $AA_1 = 2BC$ , 三棱锥  $D-AA_1C$  的体积为 4, 求点  $B$  到平面  $ACD$  的距离.



21. (本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右顶点分别为  $A_1, A_2$ , 上顶点为  $B$ ,  $\triangle BA_1A_2$  的面积为 2, 点  $M(-4, 0)$  满足  $\overrightarrow{MA_2} = 3\overrightarrow{MA_1}$ .

(1) 求椭圆  $C$  的标准方程;

(2) 过点  $M$  且斜率不为 0 的直线  $l$  与椭圆  $C$  自左向右依次交于  $P, Q$  两点,  $R$  为线段  $PQ$  上一点, 且  $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{MQ} \cdot \overrightarrow{PR}$ , 设直线  $l$  与直线  $OR$  的斜率分别为  $k_1, k_2$ , 求证:  $\frac{k_2}{k_1}$  为定值.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = xe^x - ax (a \neq 0)$ , 其中  $e$  为自然对数的底数.

(1) 当  $a = 1$  时, 求函数  $f(x)$  的单调区间;

(2) 设函数  $g(x) = f(x) - a \ln x$ , 证明: 当  $a > e$  时, 函数  $g(x)$  有两个零点.

注: 函数  $y = e^x$  与  $y = \frac{1}{x+1}$  的图象有唯一公共点  $(0, 1)$ .

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线