百校联盟 2021 届普通高中教育教学质量监测考试

全国Ⅱ卷　文科数学　参考答案

1. A 【解析】$A\cup B=\{-6,-4,-3,-2\}$.

2. A 【解析】$\left|\frac{z}{1-3i}\right|=\left|\frac{2-i}{1-3i}\right|=\left|\frac{(2-i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}\right|=\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. D 【解析】依题意,$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=2(t,1)+(3,-1)=(2t+3,1)$,又 $\boldsymbol{b}\perp(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,所以 $\boldsymbol{b}\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(3,-1)\cdot(2t+3,1)=6t+9-1=0$,解得 $t=-\frac{4}{3}$.

4. B 【解析】从 1,2,3,…,50 中任取一个数共有 50 种情况,其中能被 4 整除的数共有 4,8,12,16,20,24,28,32,36,40,44,48 共 12 个,故所求概率 $P=\frac{12}{50}=\frac{6}{25}$.

5. B 【解析】设这个正整数为 a,因为 a 的 62 次方是个 19 位数,所以 $10^{18}\leqslant a^{62}<10^{19}$,即 $\frac{48}{62}\leqslant \lg a<\frac{49}{62}$,则 $0.77\leqslant \lg a<0.79$,结合表中数据易知,$a=6$.

6. B 【解析】若 $f(2)=6$,则 $f(-2)=6$,即 $f(-2)=(-2)^2+a(-2)+1=6$,解得 $a=-\frac{1}{2}$.

7. D 【解析】对于 A 项,需要加上 n 与 l 相交才符合线面垂直的判定定理,故 A 错误;对于 B 项,有可能 $m\subset\alpha$,故 B 错误;对于 C 项,m 与 β 没有关系,斜交、垂直、平行都有可能,故 C 错误;对于 D 项,若 $n\perp\beta$,$\alpha/\!/\beta$,则 $n\perp\alpha$,而 $m/\!/\alpha$,故 $m\perp n$,故 D 正确.

8. C 【解析】若将函数 $y=\cos(4x+\varphi)$ 的图象上所有点的横坐标变为原来的一半(纵坐标不变),可得 $y=\cos(8x+\varphi)$,然后向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度,可得 $y=\cos\left[8\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\varphi\right]=\cos\left(8x-\frac{4\pi}{3}+\varphi\right)$,由题意,$x=\frac{\pi}{8}$是 $y=\cos\left(8x-\frac{4\pi}{3}+\varphi\right)$图象的一条对称轴,所以 $8\times\frac{\pi}{8}-\frac{4\pi}{3}+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,解得 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,又 $-\pi<\varphi<0$,所以 $\varphi=-\frac{2\pi}{3}$.

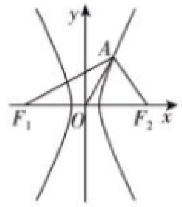
9. B 【解析】抛物线 $C_1:y^2=8x$ 的准线为 $x=-2$,联立$\begin{cases}x=-2\\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$,解得$\begin{cases}x=-2\\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}b\end{cases}$或$\begin{cases}x=-2\\ y=-\frac{\sqrt{3}}{2}b\end{cases}$,所以抛物线 $C_1:y^2=8x$ 的准线与椭圆 $C_2:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<4)$ 相交所得的弦长为$\frac{\sqrt{3}}{2}b-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)=3\sqrt{3}$,解得 $b=3$. 故 C_2 的离心率为 $e=\frac{\sqrt{16-9}}{4}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

10. C 【解析】由已知,$f'(x_0)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 因为 $f'(x)=2\cos x+\sin x$,所以 $f'(x_0)=2\cos x_0+\sin x_0=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,联立$\begin{cases}2\cos x_0+\sin x_0=\frac{3\sqrt{2}}{2}\\ \cos^2x_0+\sin^2x_0=1\end{cases}$,解得$\begin{cases}\cos x_0=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin x_0=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}\cos x_0=\frac{7\sqrt{2}}{10}\\ \sin x_0=\frac{\sqrt{2}}{10}\end{cases}$,又因为 $x_0\in\left(\frac{\pi}{6},\pi\right)$,所以 $\cos x_0\in\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,而 $\frac{7\sqrt{2}}{10}>\frac{\sqrt{3}}{2}$,故$\begin{cases}\cos x_0=\frac{7\sqrt{2}}{10}\\ \sin x_0=\frac{\sqrt{2}}{10}\end{cases}$舍去,综上,$\begin{cases}\cos x_0=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin x_0=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$,所以 $x_0=\frac{\pi}{4}$,则 $y_0=2\sin x_0-\cos x_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$,将 $A(x_0,y_0)$

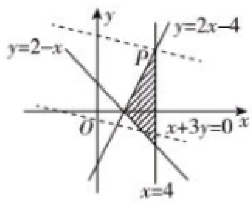
代入 $y=\frac{3\sqrt{2}}{2}x+a$ 中,得 $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{\pi}{4}+a$,解得 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}\pi}{8}$.

11. B 【解析】因为 $\cos\alpha=\frac{5}{7}>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 且 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,所以 $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$,$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$. 又 $0<\beta<\frac{3\pi}{4}$,所以 $-\frac{3\pi}{4}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{4}$,由 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$,可知 $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<-\frac{\pi}{4}$,故 $\sin(\alpha-\beta)=-\frac{4}{5}$,从而可求得 $\cos\beta=\cos[\alpha-(\alpha-\beta)]=\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)=\frac{5}{7}\times\frac{3}{5}+\frac{2\sqrt{6}}{7}\times(-\frac{4}{5})=\frac{15-8\sqrt{6}}{35}$.

12. D 【解析】如图,设双曲线 C 的半焦距为 c. 若 $\angle OAF_1=\frac{\pi}{6}$,因为以原点 O 为圆心,OF_1 为半径的圆与双曲线 C 在第一象限交于点 A,所以 $\angle F_1AF_2=\frac{\pi}{2}$,所以 $|OA|=|OF_1|$,所以 $\angle OF_1A=\angle OAF_1=\frac{\pi}{6}$,所以 $\angle AOF_2=\angle OF_1A+\angle OAF_1=\frac{\pi}{3}$. 又 $|OA|=|OF_2|$,则 $\triangle AOF_2$ 是等边三角形,则 $|AF_2|=c$,故 $|AF_1|=|F_1F_2|\sin\frac{\pi}{3}=2c\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}c$,再根据双曲线的定义得 $|AF_1|-|AF_2|=\sqrt{3}c-c=2a$,即 $(\sqrt{3}-1)c=2a$,所以 $\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\sqrt{3}+1$.



13. 16 【解析】作出不等式组 $\begin{cases}x\leqslant 4\\ y\geqslant 2-x\\ y\leqslant 2x-4\end{cases}$ 所表示的平面区域如图中阴影部分所示(含边界),观察可知,平移直线 $z=x+3y$,当直线 $z=x+3y$ 过点 P 时,z 有最大值;联立 $\begin{cases}x=4\\ y=2x-4\end{cases}$,解得 $\begin{cases}x=4\\ y=4\end{cases}$,故 $z=x+3y$ 的最大值为 $4+3\times 4=16$.



14. $\frac{1}{2}$ 【解析】依次将鹳雀楼、黄鹤楼、岳阳楼、滕王阁编号为 1,2,3,4,则从中任选两处的所有可能情况有(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4),共 6 种;恰好选中黄鹤楼的情况有(1,2),(2,3),(2,4),共 3 种,则由古典概型的概率公式得所求概率为 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

15. $5\sqrt{3}$ 或 $7\sqrt{3}$ 【解析】由余弦定理可得 $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$,即 $(4\sqrt{3})^2+c^2-(\sqrt{13})^2=2\times 4\sqrt{3}c\cos\frac{\pi}{6}$,即 $c^2-12c+35=0$,解得 $c=5$ 或 $c=7$,当 $c=5$ 时,$\triangle ABC$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\times 5\times\frac{1}{2}=5\sqrt{3}$;当 $c=7$ 时,$\triangle ABC$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\times 7\times\frac{1}{2}=7\sqrt{3}$. 综上,$\triangle ABC$ 的面积为 $5\sqrt{3}$ 或 $7\sqrt{3}$.

16. 5 【解析】设该二十四等边体的棱长为 1,则正四面体魔方的棱长也为 1,则该二十四等边体的表面积为 $8\times\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+6\times 1^2=2\sqrt{3}+6$,正四面体的表面积为 $4\times\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$,而 $\frac{2\sqrt{3}+6}{\sqrt{3}}=2+\frac{6}{\sqrt{3}}\approx 5.46$,所以至少可以涂 5 个这样的正四面体魔方.

17.【解析】(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,则由 $\begin{cases}a_1+a_3=6\\ a_1+2a_5=33\end{cases}$,得 $\begin{cases}2a_1+2d=6\\ 3a_1+11d=33\end{cases}$, ………………………… 2 分

解得 $\begin{cases}a_1=0\\ d=3\end{cases}$, ………………………………………………………………………… 4 分

所以 $a_n=a_1+d(n-1)=0+3(n-1)=3n-3$. ………………………………………………… 6 分

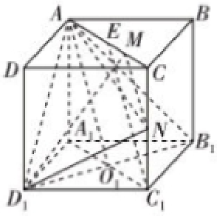
(2)因为 $b_1=a_2=3$,$b_2=a_4=9$, ………………………………………………………………… 8 分

又因为 $\{b_n\}$ 是等比数列,

所以公比 $q=\frac{b_2}{b_1}=3$，…………………………………………………………… 10 分

所以 $S_n=\frac{3(1-3^n)}{1-3}=\frac{3^{n+1}}{2}-\frac{3}{2}$. ……………………………………………………… 12 分

18.【解析】(1)如图，取 AC 的中点 E，连接 A_1C_1 与 B_1D_1 交于点 O_1，连接 EC_1，AO_1.



则 M 是 CE 的中点，

又 N 是 CC_1 的中点，则 $MN/\!/C_1E$，…………………………………………………… 2 分

因为 $AE=C_1O_1$，$AE/\!/C_1O_1$，

所以 AEC_1O_1 是平行四边形，所以 $AO_1/\!/C_1E$，…………………………………… 4 分

所以 $MN/\!/AO_1$. ……………………………………………………………………… 5 分

又 $MN\not\subset$ 平面 AB_1D_1，$AO_1\subset$ 平面 AB_1D_1，

所以 $MN/\!/$ 平面 AB_1D_1. …………………………………………………………………… 6 分

(2)因为 $CM=\frac{1}{4}AC$，$B_1D_1=A_1C_1=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$. ……………………………………… 8 分

所以 $V_{M-AD_1N}=V_{D_1-AMN}=\frac{3}{4}V_{D_1-ACN}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}V_{D_1-ACC_1A_1}=\frac{1}{16}S_{ACC_1A_1}\times\frac{1}{2}B_1D_1=\frac{1}{16}\times4\times4\sqrt{2}\times\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}=4$.

故三棱锥 $M-AD_1N$ 的体积为 4. ……………………………………………………… 12 分

19.【解析】(1)由频率分布直方图可得 $\begin{cases}(0.03+0.035+m+n+n)\times10=1\\2m=3n\end{cases}$，……………………… 2 分

解得 $\begin{cases}m=0.015\\n=0.01\end{cases}$. ……………………………………………………………………… 4 分

(2)由频率分布直方图可得，

估计该中学数学测试的平均分为

$(55\times0.01+65\times0.015+75\times0.035+85\times0.03+95\times0.01)\times10=76.5$. ………………………… 8 分

(3)因为该中学数学分数在[50,60)的频率是 $0.01\times10=0.1$，

所以估计该中学数学分数在[50,60)的人数是 $1500\times0.1=150$； ……………………………… 10 分

同理，因为该中学数学分数在[60,70)的频率是 $0.015\times10=0.15$，

所以估计该中学数学分数在[60,70)的人数是 $1500\times0.15=225$.

所以估计该中学数学分数在[50,70)的人数为 $150+225=375$. ………………………………… 12 分

20.【解析】(1) $f'(x)=\frac{2x-x^2+1}{e^x}$，………………………………………………………… 1 分

则切线的斜率为 $f'(0)=1$. ………………………………………………………………… 2 分

又 $f(0)=-1$，所以函数 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y-(-1)=x-0$，即 $x-y-1=0$. …… 3 分

切线 $x-y-1=0$ 与两坐标轴的两个交点坐标依次为 $(1,0)$，$(0,-1)$，

故切线与两坐标轴围成三角形的面积为 $S=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$. ……………………………… 4 分

(2)要证 $\ln x>f(x)$，即证 $\ln x>\frac{x^2-1}{e^x}$，即证 $\ln x-\frac{x^2-1}{e^x}>0$，……………………………… 5 分

令 $h(x)=\ln x-\frac{x^2-1}{e^x}$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2x-x^2+1}{e^x}=\frac{e^x+x^3-2x^2-x}{xe^x}$.

令 $\varphi(x)=e^x+x^3-2x^2-x$，则 $\varphi'(x)=e^x+3x^2-4x-1$，………………………………… 6 分

设 $u(x)=\varphi'(x)=e^x+3x^2-4x-1$，$u'(x)=e^x+6x-4$，

则 $u'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，……………………………………………………………… 7 分

又 $u'(1)=e+2$，所以 $u'(x)>0$.

所以 $\varphi'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，……………………………………………………… 8 分

又 $\varphi'(1)=e-2$，所以 $\varphi'(x)>0$，

所以 $\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，……………………………………………………………… 9 分

又 $\varphi(1)=e-2$，所以 $\varphi(x)>0$，即 $h'(x)>0$，……………………………………………………… 10 分

所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，

所以 $h(x)>h(1)=0$，故 $\ln x>f(x)$. ……………………………………………………………… 12 分

21.【解析】(1)设椭圆 C 的半焦距为 c.

因为 $\triangle MNF_2$，$\triangle MF_1F_2$ 的周长分别为 8，6，

所以根据椭圆的定义得 $\begin{cases}4a=8\\2a+2c=6\\a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=2\\c=1\\b=\sqrt{3}\end{cases}$. ……………………………………………… 3 分

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ………………………………………………………… 4 分

(2)根据题意，可设直线 l 的方程为 $y=k(x+1)(k>0)$.

联立 $\begin{cases}y=k(x+1)\\\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 消去 x，得 $(3+4k^2)y^2-6ky-9k^2=0$.

则 $\Delta=144k^2(k^2+1)>0$， ……………………………………………………………… 5 分

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=\dfrac{6k}{3+4k^2}$①，

$y_1y_2=\dfrac{-9k^2}{3+4k^2}$②. ……………………………………………………………… 6 分

又 $\dfrac{|MF_1|}{|MN|}=m$，且 $\dfrac{2}{3}\leqslant m<\dfrac{3}{4}$，则 $\dfrac{|MF_1|}{|F_1N|}=\dfrac{m}{1-m}\in[2,3)$.

设 $\dfrac{m}{1-m}=\lambda$，$\lambda\in[2,3)$，

则 $\overrightarrow{MF_1}=\lambda\overrightarrow{F_1N}$，所以 $y_1=-\lambda y_2$③，……………………………………………… 7 分

把③代入①得 $y_2=\dfrac{6k}{(1-\lambda)(3+4k^2)}$，$y_1=\dfrac{-6\lambda k}{(1-\lambda)(3+4k^2)}$.

并结合②可得 $y_1y_2=\dfrac{-36\lambda k^2}{(1-\lambda)^2(3+4k^2)^2}=\dfrac{-9k^2}{3+4k^2}$，

则 $\dfrac{(1-\lambda)^2}{\lambda}=\dfrac{4}{3+4k^2}$，即 $\lambda+\dfrac{1}{\lambda}-2=\dfrac{4}{3+4k^2}$. ……………………………… 9 分

因为 $\lambda+\dfrac{1}{\lambda}-2$ 在 $\lambda\in[2,3)$ 上单调递增，所以 $\dfrac{1}{2}\leqslant\lambda+\dfrac{1}{\lambda}-2<\dfrac{4}{3}$，……………… 10 分

即 $\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{4}{3+4k^2}<\dfrac{4}{3}$，且 $k>0$，解得 $0<k\leqslant\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. ………………………………… 11 分

即 $0<\tan\theta\leqslant\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，所以 $0<\sin\theta\leqslant\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

故 $\sin\theta$ 的取值范围是 $(0,\dfrac{\sqrt{5}}{3}]$. ……………………………………………………………… 12 分

22.【解析】(1)由 $\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$ 得，$\cos^2\theta+\sin^2\theta=(\dfrac{x}{2})^2+y^2=1$，

即 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，故曲线 C 的普通方程是 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………………………… 2 分

由 $2\rho\cos\theta-3\rho\sin\theta=12$ 及公式 $\begin{cases}\rho\cos\theta=x\\\rho\sin\theta=y\end{cases}$，

得 $2x-3y=12$，故直线 l 的直角坐标方程是 $2x-3y-12=0$. ………………………………………… 5 分

(2)直线 l 的普通方程为 $2x-3y-12=0$，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数)，

设 $Q(2\cos\theta,\sin\theta)$，点 Q 到直线 $2x-3y-12=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|4\cos\theta-3\sin\theta-12|}{\sqrt{13}}=\dfrac{|5\cos(\theta+\varphi)-12|}{\sqrt{13}}$（其中

$\tan\varphi=\dfrac{3}{4}$）. ………………………………………………………………………… 8 分

当 $\cos(\theta+\varphi)=1$ 时，$d_{\min}=\dfrac{7\sqrt{13}}{13}$，所以 $|PQ|_{\min}=\dfrac{7\sqrt{13}}{13}$. ………………………………… 10 分

23.【解析】(1) 依题意，$|3x+3|+|x+2|>10$. ………………………………………………………… 1 分

当 $x<-2$ 时，$-3x-3-x-2>10$，解得 $x<-\dfrac{15}{4}$；

当 $-2\leqslant x\leqslant -1$ 时，$-3x-3+x+2>10$，解得 $x<-\dfrac{11}{2}$，无解；

当 $x>-1$ 时，$3x+3+x+2>10$，则 $x>\dfrac{5}{4}$，故 $x>\dfrac{5}{4}$；

故不等式 $f(x)>10$ 的解集为 $(-\infty,-\dfrac{15}{4})\cup(\dfrac{5}{4},+\infty)$. ………………………………………… 5 分

(2) 依题意，$f(x)=|3x+3|+|x+2|=\begin{cases}-4x-5, & x<-2\\ -2x-1, & -2\leqslant x\leqslant -1\\ 4x+5, & x>-1\end{cases}$ ………………………………… 7 分

数形结合易知 $f(x)_{\min}=1$，即 $f(x)$ 的值域为 $[1,+\infty)$. ……………………………………………… 8 分

因为方程 $f(x)=3-4a$ 有实数解，

所以 $3-4a\geqslant 1$，解得 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$.

故实数 a 的取值范围为 $(-\infty,\dfrac{1}{2}]$. …………………………………………………………… 10 分

微信搜一搜

自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》