机密★启用前

华中师范大学第一附属中学2018届高三5月押题考试

理科数学

命题单位：华中师范大学第一附属中学高三年级组
命题人：汪 萍 徐 聪 周龙虎
审题人：吴巨龙
审订单位：华中师范大学考试研究院

本试题卷共4页，23题(含选考题)。全卷满分150分。考试用时120分钟。

★祝考试顺利★

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并将准考证号条形码贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 填空题和解答题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 选考题的作答：先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用2B铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
5. 考试结束后，请将答题卡上交。

第Ⅰ卷

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是满足题目要求的。

1. 设集合 $P=\{y|y=\lg x\}$，集合 $Q=\{x|y=\sqrt{2+x}\}$，则 $P\cap(\complement_{R}Q)=$

A. $[-2,0]$　　B. $(-\infty,0)$　　C. $(0,+\infty)$　　D. $(-\infty,-2)$

2. 已知 i 为虚数单位，若复数 $z=\dfrac{-ai}{1+i}(a\in\mathbf{R})$ 的虚部为 -1，则 $a=$

A. -2　　B. 1　　C. 2　　D. -1

3. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x-m|}-1$ 为偶函数，记 $a=f(\log_{0.5}2)$，$b=f(\log_2 1.5)$，$c=f(m)$，则

A. $c<a<b$　　B. $a<c<b$　　C. $a<b<c$　　D. $c<b<a$

4. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影为

A. -1　　B. -2　　C. 2　　D. 1

5. 已知变量 x,y 满足 $\begin{cases}x-2y+2\geqslant0,\\x\leqslant1,\\x+y-1\geqslant0,\end{cases}$ 则 $\dfrac{x+y+2}{x+1}$ 的取值范围是

A. $[\dfrac{1}{2},2]$　　B. $[\dfrac{3}{2},3]$　　C. $[\dfrac{1}{2},\dfrac{9}{4}]$　　D. $[\dfrac{1}{2},3]$

6. 已知 F_1,F_2 分别是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，若点 F_2 关于双曲线 C 的一条渐近线的对称点为 M，且 $|F_1M|=3$，则双曲线 C 的实轴长为

A. $\frac{3}{2}$　　B. 3　　C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　D. $3\sqrt{3}$

7.《九章算术》是我国数学史上堪与欧几里得《几何原本》相媲美的数学名著.其中将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为阳马;将四个面都为直角三角形的四面体称之为鳖臑(biēnào).已知在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中,$AC\perp BC$,$AC=1$,$BC=2$,$AA_1=3$,截面 AB_1C_1 将该直三棱柱分割成一个阳马和一个鳖臑,则得到的阳马和鳖臑的外接球的半径之比为

A. 2∶1　　B. 1∶2　　C. 1∶1　　D. 2∶3

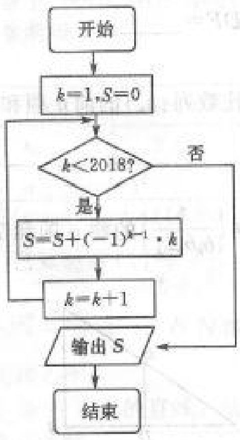
8. 已知 $a,b\in\mathbf{R}$,则 $a>|b|$ 是 $a|a|>b|b|$ 的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

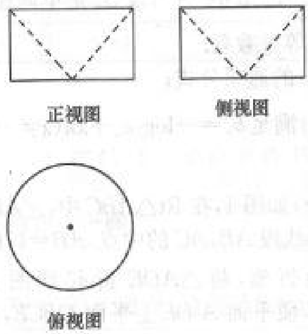
C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

9. 运行如图所示的程序框图,则输出的结果 S 为

A. -1009　　B. 1009　　C. -1008　　D. 1008



第 9 题图



第 10 题图

10. 已知一个几何体的三视图如图所示,图中长方形的长为 $2r$,宽为 r,圆半径为 r,则该几何体的体积和表面积分别为

A. $\frac{4}{3}\pi r^3,(3+\sqrt{2})\pi r^2$　　B. $\frac{2}{3}\pi r^3,(3+\sqrt{2})\pi r^2$

C. $\frac{4}{3}\pi r^3,(4+\sqrt{2})\pi r^2$　　D. $\frac{2}{3}\pi r^3,(4+\sqrt{2})\pi r^2$

11. 向量 $\boldsymbol{a}=(\sin(\omega x-\frac{\pi}{4}),\sin\omega x)$,$\boldsymbol{b}=(\sin(\omega x+\frac{\pi}{4}),\sin\omega x+2\sqrt{3}\cos\omega x)(\omega>0)$,函数 $g(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}$ 的两个相邻的零点间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.若 $x=x_0(0\leqslant x_0\leqslant\frac{\pi}{2})$ 是函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的一个零点,则 $\cos 2x_0$ 的值为

A. $\frac{3\sqrt{5}+1}{8}$　　B. $\frac{3\sqrt{5}-1}{8}$　　C. $\frac{1-3\sqrt{5}}{8}$　　D. $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{8}$

12. 若曲线 $C_1:y=ax^2$ 与曲线 $C_2:y=e^x$(其中无理数 $e=2.718\cdots$)存在公切线,则整数 a 的最值情况为

A. 最大值为 2,没有最小值　　B. 最小值为 2,没有最大值

C. 既没有最大值也没有最小值　　D. 最小值为 1,最大值为 2

第Ⅱ卷

本卷包括必考题和选考题两部分。第 13 题～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

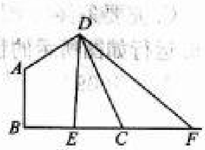
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分。

13. 已知 $(1+ax)(1-2x)^5$ 的展开式中，x^3 的系数为 -20，则实数 $a=$________.

14. 已知平面区域 $\Omega=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant 1\}$，现向该区域内任意掷点，则点落在曲线 $y=\cos^2x$ 下方的概率为________.

15. 设抛物线 $C:x^2=4y$ 的焦点为 F，其准线与 y 轴交于点 M，过点 F 作直线 l 交抛物线 C 于 A,B 两点，若 $\angle AMB=90°$，则 $|AF|=$________.

16. 如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp BC$，$AD\perp DC$，$AB=AD=1$，$\angle BAD=\frac{2\pi}{3}$，射线 BC 上的两个动点 E,F 使得 DC 平分 $\angle EDF$（点 E 在线段 BC 上且与 B,C 不重合），则当 $BF+4BE$ 取最小值时，$\tan\angle EDF=$________.



三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本题满分 12 分）已知 $n\in\mathbf{N}^*$，设 S_n 是单调递减的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_2=\frac{1}{2}$ 且 S_4+a_4，S_6+a_6，S_5+a_5 成等差数列.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=-\log_2a_n+\lambda n(\lambda\neq-1)$，数列 $\left\{\frac{1}{b_nb_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 T_n 满足 $T_{2018}=2018$，求 λ 的值.

18.（本题满分 12 分）如图 1，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90°$，D,E 分别为线段 AB,AC 的中点，$AB=4$，$BC=2\sqrt{2}$. 以 DE 为折痕，将 $\triangle ADE$ 折起到图 2 中 $\triangle A'DE$ 的位置，使平面 $A'DE\perp$ 平面 $DBCE$，连接 $A'C$，$A'B$，设 F 是线段 $A'C$ 上的动点，且 $\frac{CF}{CA'}=\lambda$.

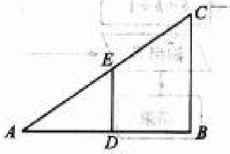


图 1

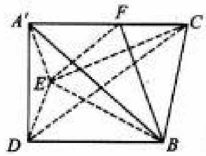


图 2

（Ⅰ）证明：$BE\perp$ 平面 $A'DC$；

（Ⅱ）试确定 λ 的值，使得二面角 F-BE-C 的大小为 45°.

19.（本题满分 12 分）某企业对现有设备进行了改造，为了了解设备改造后的效果，现从设备改造前后生产的大量产品中各抽取了 100 件产品作为样本，检测其质量指标值，若质量指标值在[20,60)内，则该产品视为合格品，否则视为不合格品. 图 1 是设备改造前的样本的频率分布直方图，表 1 是设备改造后的样本的频数分布表.

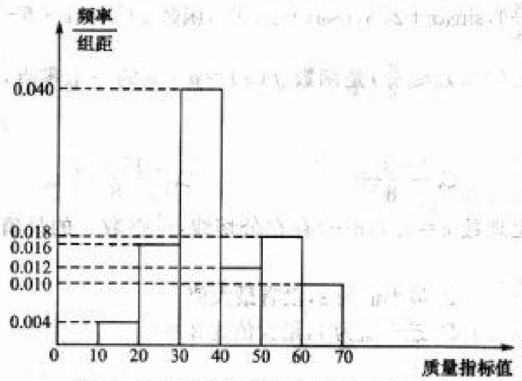


图 1　设备改造前样本的频率分布直方图

质量指标值	频数
[10,20)	2
[20,30)	18
[30,40)	48
[40,50)	14
[50,60)	16
[60,70)	2

表 1：设备改造后样本的频数分布表

(Ⅰ)完成下面的 2×2 列联表,并判断是否有 99%的把握认为该企业生产的这种产品的质量指标值与设备改造有关;

	设备改造前	设备改造后	合计
合格品			
不合格品			
合计			

(Ⅱ)根据图 1 和表 1 提供的数据,试从产品合格率的角度对改造前后设备的优劣进行比较;

(Ⅲ)企业将不合格品全部销毁后,根据客户需求对合格品进行等级细分,质量指标值落在[30,40)内的定为一等品,每件售价 180 元;质量指标值落在[20,30)或[40,50)内的定为二等品,每件售价 150 元;其他的合格品定为三等品,每件售价 120 元. 根据频数分布表 1 的数据,用该组样本中一等品、二等品、三等品各自在合格品中的频率代替从所有合格产品中抽到一件相应等级产品的概率. 现有一名顾客随机购买两件产品,设其支付的费用为 X(单位:元),求 X 的分布列和数学期望.

附:

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.150	0.100	0.050	0.025	0.010
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

20.(本题满分 12 分)已知椭圆 C_1:$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$,过 C_1 上一动点 P 作 $PM\perp x$ 轴,垂足为点 M. 当点 N 满足$\overrightarrow{MN}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\overrightarrow{MP}$时,点 N 的轨迹 C_2 恰是一个圆.

(Ⅰ)求椭圆 C_1 的离心率;

(Ⅱ)若与曲线 C_2 切于 T 点的直线 l 与椭圆 C_1 交于 A,B 两点,且当 $AB/\!/x$ 轴时,$|AB|=2$. 求 $\triangle AOB$ 的最大面积.

21.(本题满分 12 分)已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+m\ln(1-x)$,其中 $m\in\mathbf{R}$.

(Ⅰ)求函数 $f(x)$的单调区间;

(Ⅱ)若函数 $f(x)$存在两个极值点 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$,

证明:$\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}\ln2<\dfrac{f(x_1)}{x_2}<0$.

请考生在第 22、23 题中任选一题作答,如果多做,则按所做第一题评分。

22.(本小题满分 10 分)选修 4-4:坐标系与参数方程

以直角坐标系的原点 O 为极点,以 x 轴正半轴为极轴,且两个坐标系取相等的长度单位,已知直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=2+t\sin\alpha\end{cases}$($t$ 为参数,$0\leqslant\alpha<\pi$),曲线 C 的极坐标方程为$\rho\cos^2\theta=4\sin\theta$.

(Ⅰ)若 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$,求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程;

(Ⅱ)设直线 l 与曲线 C 相交于 A,B 两点,当 α 变化时,求$|AB|$的最小值.

23.(本小题满分 10 分)选修 4-5:不等式选讲

已知函数 $f(x)=|2x-1|-a(a\in\mathbf{R})$.

(Ⅰ)若 $f(x)$在$[-1,2]$上的最大值是最小值的 2 倍,解不等式 $f(x)\geqslant5$;

(Ⅱ)若存在实数 x 使得 $f(x)<\dfrac{1}{2}f(x+1)$成立,求实数 a 的取值范围.

华中师范大学第一附属中学2018届高三5月押题考试

理科数学参考答案和评分标准

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	C	C	A	B	B	C	A	B	B	A	C

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

13. $\frac{3}{2}$.　14. $\frac{1}{2}$.　15. 2.　16. $\sqrt{3}$.

11. $f(x)=\frac{1}{2}(\sin^2\omega x-\cos^2\omega x)+\sin^2\omega x+2\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x$

$=-\frac{1}{2}\cos2\omega x+\frac{1-\cos2\omega x}{2}+\sqrt{3}\sin2\omega x=\sqrt{3}\sin2\omega x-\cos2\omega x+\frac{1}{2}$

$=2\sin(2\omega x-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$.

由题意知$\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，所以$\omega=1$，$f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$，

$\therefore f(x_0)=2\sin(2x_0-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}=0$，$\therefore\sin(2x_0-\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{4}<0$.

又由$0\leqslant x_0\leqslant\frac{\pi}{2}$得$-\frac{\pi}{6}\leqslant2x_0-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}$，$\therefore\cos(2x_0-\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{15}}{4}$，

$\therefore\cos2x_0=\cos[(2x_0-\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{6}]=\frac{\sqrt{15}}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-(-\frac{1}{4})\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{5}+1}{8}$.

12. 方法一：显然$a\neq0$，设公切线与曲线C_1切于点(x_1,ax_1^2)，与曲线C_2切于点(x_2,e^{x_2})，由$y'=2ax$及$y'=e^x$得：

曲线$y=ax^2$在点(x_1,ax_1^2)处的切线为$y-ax_1^2=2ax_1(x-x_1)$，即$y=2ax_1x-ax_1^2$，

曲线$y=e^x$在点(x_2,e^{x_2})处的切线为$y-e^{x_2}=e^{x_2}(x-x_2)$，即$y=e^{x_2}x+e^{x_2}(1-x_2)$，

由题意有$\begin{cases}2ax_1=e^{x_2},\\-ax_1^2=e^{x_2}(1-x_2),\end{cases}$消去$x_1$得$e^{x_2}=2a(2x_2-2)$，即$\frac{1}{4a}=\frac{x_2-1}{e^{x_2}}$，

设$f(x)=\frac{x-1}{e^x}$，则$f'(x)=\frac{2-x}{e^x}$，可知$f(x)$在$(-\infty,2)$上单调递增，在$(2,+\infty)$单调递减，

$\therefore\frac{1}{4a}\leqslant f(2)=\frac{1}{e^2}$，$\therefore a<0$或$a\geqslant\frac{e^2}{4}$，$\therefore$整数$a$既没有最大值，也没有最小值.

方法二：当$a=0$时，由图象知$y=0$与$y=e^x$没有公切线；

当$a<0$时，由图象易知$C_1:y=ax^2$与$C_2:y=e^x$有公切线

当$a>0$时，由图象易知要使$C_1:y=ax^2$与$C_2:y=e^x$有公切线，则需当$x>0$时，$y=e^x$的图象不能恒在$y=ax^2$的上方，所以抛物线$y=ax^2$的开口不能太大，即a越大，两曲线才越有可能有公切线.

所以整数a既没有最大值，也没有最小值.

16. 方法一：连接 BD，则由 $AB=AD=1$，$\angle BAD=\frac{2\pi}{3}$ 及余弦定理可得：$BD=\sqrt{3}$，

且 $\angle ABD=\angle ADB=\frac{\pi}{6}$，由 $AB\perp BC$，$AD\perp DC$ 得：$\angle DBC=\angle BDC=\frac{\pi}{3}$，

设 $\angle EDC=\angle FDC=\theta$，则 $\theta\in(0,\frac{\pi}{3})$，$\angle BDE=\frac{\pi}{3}-\theta$，$\angle BFD=\frac{\pi}{3}-\theta$，

在 $\triangle BDE$ 中，由正弦定理得：$\frac{BE}{\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)}=\frac{\sqrt{3}}{\sin(\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+\theta)}$　$BE=\frac{\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)}{\sin(\frac{\pi}{3}+\theta)}\cdot\sqrt{3}$，

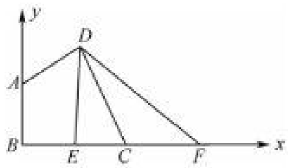
在 $\triangle BDF$ 中，由正弦定理得：$\frac{BF}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)}=\frac{\sqrt{3}}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}$　$BF=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}\cdot\sqrt{3}$，

$\therefore BE\cdot BF=BD^2=3$，$\therefore BF+4BE\geqslant 4\sqrt{BE\cdot BF}=4\sqrt{3}$，

当且仅当 $BF=4BE$，即 $BE=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时等号成立，此时 $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)}\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

即 $\frac{\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta}{\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta}=\frac{1}{2}$　$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore\tan\angle EDF=\tan2\theta=\sqrt{3}$，

方法二：建立如图所示的平面直角坐标系.



设 $B(0,0)$，$A(0,1)$，$D\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$，$C(\sqrt{3},0)$，$E(a,0)$，$F(b,0)$，

由 $\cos\langle DE,DC\rangle=\cos\langle DF,DC\rangle$ 得 $ab=3$，且 $0<a<\sqrt{3}<b$，

$BF+4BE=b+4a=b+\frac{12}{b}\geqslant 2\sqrt{12}=4\sqrt{3}$，

当 $b=2\sqrt{3}$，$a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，该不等式取等号，

此时 $DE\perp BF$，$\therefore\tan\angle EDF=\frac{2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}}=\sqrt{3}$.

三、解答题

17.（Ⅰ）设数列 $\{a_n\}$ 的公比 q，由 $2(S_6+a_6)=S_4+a_4+S_5+a_5$，

得 $(S_6-S_5)+(S_6-S_4)+2a_6=a_4+a_5$，

即 $4a_6=a_4$，$\therefore q^2=\frac{1}{4}$，$\because\{a_n\}$ 是单调递减数列，$\therefore q=\frac{1}{2}$.

又 $\because a_2=\frac{1}{2}$，$\therefore a_1=1$，$\therefore a_n=(\frac{1}{2})^{n-1}$，………………………… 5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得：$b_n=-\log_2(\frac{1}{2})^{n-1}+\lambda n=(\lambda+1)n-1$. ………………………… 7 分

$\therefore\frac{1}{b_nb_{n+1}}=\frac{1}{[(\lambda+1)n-1]\cdot[(\lambda+1)(n+1)-1]}=\frac{1}{\lambda+1}\left[\frac{1}{(\lambda+1)n-1}-\frac{1}{(\lambda+1)(n+1)-1}\right]$.

$\therefore T_{2018}=\frac{1}{\lambda+1}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{2019\lambda+2018}\right)=\frac{2018}{\lambda(2019\lambda+2018)}=2018$，…………………………… 10 分

$\therefore \lambda=-1$ 或 $\lambda=\frac{1}{2019}$．$\because \lambda\neq-1$，$\therefore \lambda=\frac{1}{2019}$． …………………………………………………… 12 分

18. 方法一：（Ⅰ）$\because$ 平面 $A'DE\perp$ 平面 $DBCE$，$A'D\perp DE$，

$\therefore A'D\perp$ 平面 $DBCE$，$\therefore A'D\perp BE$，

$\because D$、E 分别为中点，$\therefore DE=\frac{1}{2}BC=\sqrt{2}$，$BD=\frac{1}{2}AB=2$． …………………………………… 2 分

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle BDE$ 中，$\tan\angle BED=\frac{BD}{DE}=\sqrt{2}$，

又 $\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle CBD$ 中，$\tan\angle DCB=\frac{BD}{CB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

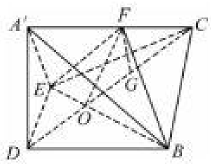
$\therefore \tan\angle BED\cdot\tan\angle CDE=\tan\angle BED\cdot\tan\angle DCB=1$，

$\therefore \angle BED+\angle CDE=90^\circ$，得：$BE\perp DC$，

又 $DC\cap DA'=D$，$\therefore BE\perp$ 平面 $A'DC$． ……………………………………………………………… 6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可得：平面 $A'DC\perp$ 平面 $DBCE$，在平面 $A'DC$ 内作 $FG\perp DC$ 于点 G，则 $FG\perp$ 平面 $DBCE$，设 BE 交 DC 于点 O，连 OF，则由（Ⅰ）知$\angle FOG$ 为二面角 $F\text{-}BE\text{-}C$ 的平面角． … 7 分

由 $FG\parallel A'D$，$\frac{FG}{A'D}=\frac{CF}{CA'}=\lambda$，$\therefore FG=\lambda A'D=2\lambda$，



同理得：$CG=\lambda CD$，$DG=(1-\lambda)CD=2\sqrt{3}(1-\lambda)$，

$\because DO=\frac{BD\cdot DE}{BE}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

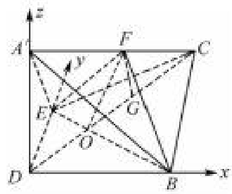
$\therefore OG=DG-DO=2\sqrt{3}(1-\lambda)-\frac{2\sqrt{3}}{3}$．

在 $\mathrm{Rt}\triangle OGF$ 中，由 $\tan\angle FOG=\frac{FG}{OG}=\frac{2\lambda}{2\sqrt{3}(1-\lambda)-\frac{2\sqrt{3}}{3}}=1$．

$\therefore \lambda=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$，……………………………………………………………………………… 10 分

$\therefore \lambda=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，可使得二面角 $F\text{-}BE\text{-}C$ 的大小为 45°． ……………………………………… 12 分

方法二：以 D 为坐标原点，DB、DE、DA' 分别为 x、y、z 轴建立空间直角坐标系，则各点坐标分别为 $D(0,0,0)$，$A'(0,0,2)$，$B(2,0,0)$，$C(2,2\sqrt{2},0)$，$E(0,\sqrt{2},0)$．



（Ⅰ）$\overrightarrow{BE}=(-2,\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{DC}=(2,2\sqrt{2},0)=\overrightarrow{DA'}=(0,0,2)$．

$\because \overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{DC}=-4+4=0$，$\therefore BE\perp DC$，

$\because \overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{DA'}=0$，$\therefore BE\perp DA'$．

又 $DC\cap DA'=D$，$\therefore BE\perp$ 平面 $A'DC$． ……………………………………………………………… 6 分

（Ⅱ）设$\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{CA'}$，则$\overrightarrow{CF}=\lambda(-2,-2\sqrt{2},2)$，$\therefore F(2-2\lambda,2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\lambda,2\lambda)$．

设平面 BEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$．

$\because \overrightarrow{BE}=(-2,\sqrt{2},0),\overrightarrow{BF}=(-2\lambda,2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\lambda,2\lambda)$.

$\begin{cases}-2x+\sqrt{2}y=0,\\ -2\lambda\cdot x+(2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\lambda)\cdot y+2\lambda\cdot z=0,\end{cases}$

取 $\boldsymbol{n}=(\lambda,\sqrt{2}\lambda,3\lambda-2)$, ………………………………………………………………………… 8 分

又∵平面 BEC 的法向量为 $\boldsymbol{n}'=(0,0,1)$,

$\therefore \cos45^\circ=\dfrac{3\lambda-2}{\sqrt{3\lambda^2+(3\lambda-2)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,得 $3\lambda^2-6\lambda+2=0$,

解得 $\lambda=1\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. 又∵$0<\lambda<1$,∴$\lambda=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, ……………………………………………… 10 分

$\therefore \lambda=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$时,可使得二面角 F-BE-C 的大小为 45°. ……………………………………… 12 分

19.(Ⅰ)根据图 1 和表 1 得到 2×2 列联表:

	设备改造前	设备改造后	合计
合格品	86	96	182
不合格品	14	4	18
合计	100	100	200

将 2×2 列联表中的数据代入公式计算得:

$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{200\times(86\times4-96\times14)^2}{182\times18\times100\times100}=\dfrac{5000}{819}\quad 6.105$.

$\because 6.105<6.635$,

∴没有 99%的把握认为该企业生产的产品的质量指标值与设备改造有关. ……………… 4 分

(Ⅱ)根据图 1 和表 1 可知,设备改造前的产品为合格品的概率约为$\dfrac{86}{100}=\dfrac{43}{50}$,设备改造后产品为合格品的概率约为$\dfrac{96}{100}=\dfrac{24}{25}$;显然设备改造后产品合格率更高,因此,改造后的设备更优. ……………………………………………………………………………………………… 6 分

(Ⅲ)由表 1 知:

一等品的频率为$\dfrac{1}{2}$,即从所有合格产品中随机抽到一件一等品的概率为$\dfrac{1}{2}$;

二等品的频率为$\dfrac{1}{3}$,即从所有合格产品中随机抽到一件二等品的概率为$\dfrac{1}{3}$;

三等品的频率为$\dfrac{1}{6}$,即从所有合格产品中随机抽到一件三等品的概率为$\dfrac{1}{6}$.

由已知得:随机变量 X 的取值为:240,270,300,330,360.

$P(X=240)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}$,$P(X=270)=C_2^1\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{9}$,

$P(X=300)=C_2^1\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{18}$,$P(X=330)=C_2^1\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$,

$P(X=360)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$.

∴随机变量 X 的分布列为:

令 $-x^2+x-m=0$，$\Delta=1-4m$，

当 $\Delta\leqslant0$，即 $m\geqslant\frac{1}{4}$ 时，$f'(x)\leqslant0$，$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减；

当 $\Delta>0$，即 $m<\frac{1}{4}$ 时，由 $x^2-x+m=0$ 解得 $x_1=\frac{1-\sqrt{1-4m}}{2}$，$x_2=\frac{1+\sqrt{1-4m}}{2}$，

若 $0<m<\frac{1}{4}$，则 $x_1<x_2<1$，$\therefore x\in(-\infty,x_1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

$x\in(x_1,x_2)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；$x\in(x_2,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

若 $m\leqslant0$，则 $x_1<1\leqslant x_2$，$\therefore x\in(-\infty,x_1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

$x\in(x_1,1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

综上所述：$m\leqslant0$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{1-4m}}{2}\right)$，单调递增区间为 $\left(\frac{1-\sqrt{1-4m}}{2},1\right)$；

$0<m<\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{1-4m}}{2}\right)$，$\left(\frac{1+\sqrt{1-4m}}{2},1\right)$，

单调递增区间为 $\left(\frac{1-\sqrt{1-4m}}{2},\frac{1+\sqrt{1-4m}}{2}\right)$；

$m\geqslant\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,1)$. ………………………………………… 5 分

（Ⅱ）函数 $f(x)$ 定义域为 $(-\infty,1)$，且 $f'(x)=x-\frac{m}{1-x}=\frac{-x^2+x-m}{1-x}$，

$\because$ 函数 $f(x)$ 存在两个极值点，$\therefore f'(x)=0$ 在 $(-\infty,1)$ 上有两个不等实根 x_1，x_2，

记 $g(x)=-x^2+x-m$，则 $\begin{cases}\Delta=1-4m>0,\\ -\frac{1}{2\times(-1)}<1,\\ g(1)<0,\end{cases}$ $\therefore 0<m<\frac{1}{4}$，

从而由 $\begin{cases}x_1+x_2=1,\\ x_1x_2=m,\end{cases}$ 且 $x_1<x_2$，可得，$x_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$x_2\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，……………………………… 7 分

$\therefore \frac{f(x_1)}{x_2}=\frac{\frac{1}{2}x_1^2+m\ln(1-x)}{x_2}=\frac{1}{2}\times\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{m}{x_2}\ln(1-x_1)=\frac{1}{2}\times\frac{x_1^2}{(1-x_1)}+x_1\ln(1-x_1)$，… 8 分

构造函数 $\varphi(x)=\frac{x^2}{2(1-x)}+x\ln(1-x)$，$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，

则 $\varphi'(x)=\frac{2x-x^2}{2(1-x)^2}+\ln(1-x)-\frac{x}{1-x}=\frac{x^2}{2(1-x)^2}+\ln(1-x)$，

记 $p(x)=\frac{x^2}{2(1-x)^2}+\ln(1-x)$，$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，则 $p'(x)=\frac{-x^2+3x-1}{(1-x)^3}$，

令 $p'(x)=0$，得 $x_0=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ $\left(x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}>\frac{1}{2}，故舍去\right)$，

$\therefore p(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $\left(x_0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增.

又 $p(0)=0$，$p\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\ln2<0$，$\therefore$ 当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，恒有 $p(x)<0$，即 $\varphi'(x)<0$，

$\therefore \varphi(x)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上单调递减，$\therefore \varphi\left(\frac{1}{2}\right)<\varphi(x)<\varphi(0)$，即$\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln 2<\varphi(x)<0$，

$\therefore \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln 2<\frac{f(x_1)}{x_2}<0$. ………………………………………………………… 12 分

22.（Ⅰ）当$\alpha=\frac{\pi}{6}$时，由直线l的参数方程$\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=2+t\sin\alpha,\end{cases}$消去$t$得$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$，

即直线l的普通方程为$x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$；

因为曲线过极点，由$\rho\cos^2\theta=4\sin\theta$，得$(\rho\cos\theta)^2=4\rho\sin\theta$，

所以曲线C的直角坐标方程为$x^2=4y$. ………………………………………………………… 5 分

（Ⅱ）将直线l的参数方程代入$x^2=4y$，得$t^2\cos^2\alpha-4t\sin\alpha-8=0$，

由题意知$\alpha\in[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi)$，设$A,B$两点对应的参数分别为$t_1,t_2$，

则$t_1+t_2=\frac{4\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$，$t_1t_2=-\frac{8}{\cos^2\alpha}$，

$\therefore |AB|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{\left(\frac{4\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\right)^2+\frac{32}{\cos^2\alpha}}$

$=4\sqrt{\frac{1}{\cos^4\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}}=4\sqrt{(\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}$.

$\because \alpha\in[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi)$，$\cos^2\alpha\in(0,1]$，$\frac{1}{\cos^2\alpha}\geq 1$，

当$\cos^2\alpha=1$，即$\alpha=0$时，$|AB|$的最小值为$4\sqrt{2}$. ……………………………………………… 10 分

23.（Ⅰ）$\because x\in[-1,2]$，$\therefore f(x)_{\min}=f(\frac{1}{2})=-a$，$f(x)_{\max}=f(-1)=f(2)=3-a$，

$\therefore 3-a=-2a$，解得$a=-3$，

不等式$f(x)\geq 5$即为$|2x-1|\geq 2$，解得$x\geq\frac{3}{2}$或$x\leq-\frac{1}{2}$，

故不等式$f(x)\geq 5$的解集为$\{x|x\geq\frac{3}{2}$或$x\leq-\frac{1}{2}\}$；……………………………………………… 5 分

（Ⅱ）由$f(x)<\frac{1}{2}f(x+1)$，得$a>|4x-2|-|2x+1|$，

令$g(x)=|4x-2|-|2x+1|$，问题转化为$a>g(x)_{\min}$

又$g(x)=\begin{cases}-2x+3, x\leq-\frac{1}{2},\\ -6x+1, -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2},\\ 2x-3, x\geq\frac{1}{2},\end{cases}$故$g(x)_{\min}=g(\frac{1}{2})=-2$，

则$a>-2$，所以实数a的取值范围为$(-2,+\infty)$. ……………………………………………… 10 分

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信扫一扫，快速关注