

一、选择题(本题共8个小题,每小题5分,共40分,在每小题给出的4个选项中,只有一项是符合要求的)

1. 若 $\frac{1+i}{z} = 2-i$ (其中 i 为虚数单位), 则 z 在复平面上所对应的点在

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

2. 已知集合 $M = \{x \mid x/n \mid x-3 \mid = 0\}$, $N = \{x \mid (x+2)(x-3) < 0\}$, 则 $M \cap N =$

- A. $\{0, 4\}$ B. $\{0, 2\}$ C. $\{2, 4\}$ D. $\{0, 2, 4\}$

3. 已知函数 $f(x) = nx + \ln x$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 的图象在点 $(\frac{1}{n}, f(\frac{1}{n}))$ 处的切线的斜率为 a_n , 则

数列 $\left\{ \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right\}$ 的前 n 项和 S_n 为

- A. $\frac{1}{n+1}$ B. $\frac{3n^2+5n}{2(n+1)(n+2)}$ C. $\frac{n}{4(n+1)}$ D. $\frac{3n^2+5n}{8(n+1)(n+2)}$

4. 篮球队的5名队员进行传球训练, 每位队员把球传给其他4人的概率相等, 由甲开始传球, 则前3次传球中, 乙恰好有1次接到球的概率为

- A. $\frac{15}{64}$ B. $\frac{9}{32}$ C. $\frac{27}{64}$ D. $\frac{33}{64}$

5. 已知圆台的上、下底面圆半径分别为10和5, 侧面积为 300π , AB 为圆台的一条母线(点 B 在圆台的上底面圆周上), M 为 AB 的中点, 一只蚂蚁从点 B 出发, 绕圆台侧面一周爬行到点 M , 则蚂蚁爬行所经路程的最小值为

- A. 30 B. 40 C. 50 D. 60

6. 设 $a = \frac{2}{3}$, $b = \log_6 5$, $c = \log_4 3$, 则 a, b, c 的大小关系为

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $c > b > a$ D. $b > c > a$

7. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的两个焦点为 F_1, F_2 , 过 F_1 作直线与椭圆相交于 A, B 两点, 若 $|AF_1| = 2|BF_1|$ 且 $|BF_2| = |AB|$, 则椭圆的 C 的离心率为

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

8. 已知函数 $f(x) = e^{x-1} - e^{1-x} + \frac{1}{3} \cos(\frac{\pi}{2} - x)$, 实数 m, n 满足不等式 $f(2m-n) + f(m+1) < 0$, 则下列不等式成立的是

- A. $3m-n < 1$ B. $3m-n > 1$ C. $m-n < 1$ D. $m-n > 1$

高三数学试题第1页(共5页)

二、多项选择题(本题共4个小题,每题5分,共20分,在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求,全部选对得5分,部分选对得2分,有选错的得0分)

9. 给出下列命题,其中正确的是

- A. 对于独立性检验 k 的值越大,说明两事件相关程度越大.
- B. 若随机变量 $\xi \sim N(1, \sigma^2)$, $P(\xi \leq 4) = 0.75$, 则 $P(\xi \leq -2) = 0.25$
- C. 若 $X \sim B(9, \frac{1}{3})$, 则 $D(2X+1) = 8$

D. 已知样本点 $(x_i, y_i) (i=1, 2, 3, \dots, 10)$ 组成一个样本, 得到回归直线方程 $\hat{y} = 2x - 0.4$, 且 $\bar{x} = 2$, 剔除两个样本点 $(-3, 1)$ 和 $(3, -1)$ 得到新的回归直线的斜率为3, 则新的回归方程为 $\hat{y} = 3x - 3$

10. 已知抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 F , 过 F 的直线 l 交抛物线于 A, B 两点, 以线段 AB 为直径的圆交 x 轴于 M, N 两点, 设线段 AB 的中点为 P , 下列说法正确的是

- A. 若 $|AF| + |BF| = 2p^2$, 则直线 AB 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$
- B. $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -\frac{3}{4}p^2$
- C. 若抛物线上存在一点 $E(t, 3)$, 到焦点 F 的距离等于4, 则抛物线的方程为 $x^2 = 4y$
- D. 若点 F 到抛物线准线的距离为2, 则 $\sin \angle PMN$ 的最小值为 $\frac{1}{3}$

11. 设函数 $g(x) = \sin \omega x (\omega > 0)$ 向左平移 $\frac{\pi}{5\omega}$ 个单位长度得到函数 $f(x)$, 已知 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上有且只有5个零点, 则下列结论正确的是

- A. $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 对称
- B. $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上有且只有5个极值点
- C. $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{10})$ 上单调递增
- D. ω 的取值范围是 $[\frac{12}{5}, \frac{29}{10})$

12. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $CC_1 = 2AB = 2$, E 为 CC_1 的中点, P 为棱 AA_1 上的动点, 平面 α 过 B, E, P 三点, 下面说法正确的是:

- A. 平面 $\alpha \perp$ 平面 A_1B_1E
- B. 平面 α 与正四棱柱表面的交线围成的图形一定是四边形
- C. 当 P 与 A 重合时, 平面 α 截此四棱柱的外接球所得的截面面积为 $\frac{11}{8}\pi$
- D. 存在点 P , 使得 AD 与平面 α 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$

三、填空题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 若 $(x^2 + \frac{1}{x} - 2)^2 (x+m)^3 (m>0)$ 的展开式中 x^3 的系数为 3, 则 $m =$ _____.

14. 已知点 $M(1, 2)$, 若过点 $N(3, 0)$ 的直线 m 交圆 $C: (x-5)^2 + y^2 = 6$ 于 A, B 两点, 则 $|\vec{MA} + \vec{MB}|$ 的最小值为 _____.

15. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的棱长均为 4, 先在三棱锥 $P-ABC$ 内放入一个内切球 O_1 , 然后再放入一个球 O_2 , 使得球 O_2 与球 O_1 及三棱锥 $P-ABC$ 的三个侧面都相切, 则球 O_2 的表面积为 4π.

16. 设实数 $m > 0$, 若对任意的 $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$, 不等式 $e^{mx} - \frac{\ln x}{m} \geq \frac{1}{m} - \frac{e^{mx}}{mx}$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围为 _____.

四、解答题 (本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知

$$(a \cdot \cos C + c \cdot \cos A - 2a) \cdot \cos C - c \cdot \cos(A+C) = 0$$

(I) 求角 C . $\frac{\pi}{3}$

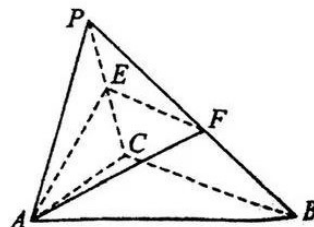
(II) $\angle ACB$ 的角平分线交 AB 于点 D , 且 $CD=1$, 求 $3a+b$ 的最小值.

18. (本小题满分 12 分)

如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, 侧面 $PAC \perp$ 底面 ABC , $AC \perp BC$, $\triangle PAC$ 是边长为 2 的正三角形, $BC=4$, E, F 分别是 PC, PB 的中点, 记平面 AEF 与平面 ABC 的交线 l .

(I) 证明: 直线 $l \perp$ 平面 PAC .

(II) 若 Q 在直线 l 上且 $\angle BAQ$ 为锐角, 当 $V_{P-AEFQ} = V_{P-ABC}$ 时, 求二面角 $A-PQ-B$ 的余弦值.



19. (本小题满分 12 分)

“现值”与“终值”是利息计算中的两个基本概念,掌握好这两个概念,对于顺利解决有关金融中的数学问题以及理解各种不同的算法都是十分有益的.所谓“现值”是指在 n 期末的本利和,把它扣除利息后,折合成现时的值,而“终值”是指 n 期后的本利和.它们计算的基点分别是存期的起点和终点.例如,在复利计息的情况下,设本金为 A ,每期利率为 r ,期数为 n ,到期末的本利和为 S ,则 $S=A(1+r)^n$ 其中, S 称为 n 期末的终值, A 称为 n 期后终值 S 的现值,即 n 期后的 S 元现在的价值为 $A=\frac{S}{(1+r)^n}$.

现有如下问题:小明想买一座公寓有如下两个方案

方案一:一次性付全款 25 万元;

方案二:分期付款,每年初付款 3 万元,第十年年初付完;

(I) 已知一年期存款的年利率为 2.5%,试讨论两种方案哪一种更好?

(II) 若小明把房子租出去,第一年年初需交纳租金 2 万元,此后每年初涨租金 1000 元.参照第 (I) 问中的存款年利率 2.5%,预计第十年房租到期后小明所获得全部租金的终值.(精确到百元)

参考数据: $(1+2.5\%)^{10} \approx 1.28$

20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆方程为 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 过椭圆的 C_1 的焦点 F_1, F_2 分别做 x 轴的垂线与椭圆交于四点,依次连接这四个点所得的四边形恰好为正方形.

(I) 求该椭圆 C_1 的离心率.

(II) 若椭圆 C_1 的顶点恰好是双曲线 C_2 焦点,椭圆 C_1 的焦点恰好是双曲线 C_2 顶点.设椭圆 C_1 的焦点 F_1, F_2 , 双曲线 C_2 的焦点 F_1', F_2' , A 为 C_1 与 C_2 的一个公共点,记 $\angle F_1 A F_2 = \alpha$, $\angle F_1' A F_2' = \beta$. 求 $\cos \alpha \cdot \cos \beta$ 的值.

21. (本小题满分 12 分)

chatGPT 是由 OpenAI 开发的一款人工智能机器人程序, 一经推出就火遍全球. chatGPT 的开发主要采用 RLHF(人类反馈强化学习)技术, 训练分为以下三个阶段.

第一阶段: 训练监督策略模型. 对抽取的 prompt 数据, 人工进行高质量的回答, 获取 <prompt, answer> 数据对, 帮助数学模型 GPT-3.5 更好地理解指令.

第二阶段: 训练奖励模型. 用上一阶段训练好的数学模型, 生成 k 个不同的回答, 人工标注排名, 通过奖励模型给出不同的数值, 奖励数值越高越好. 奖励数值可以通过最小化下面的交叉熵损失函数得到: $Loss = -\sum_i y_i \ln \hat{y}_i$, 其中 $y_i \in \{0, 1\}$, $\hat{y}_i \in (0, 1)$, 且 $\sum_i \hat{y}_i = 1$.

第三阶段: 实验与强化模型和算法. 通过调整模型的参数, 使模型得到最大的奖励以符合人工的选择取向.

参考数据: $\ln 2 \approx 0.693$, $\ln 5 \approx 1.609$, $\ln 7 \approx 1.946$

(I) 若已知某个样本, 其真实分布 $y = [y_1, y_2, \dots, y_{10}] = [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]$, 其预测近似分布 $\hat{y} = [\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_{10}] = [0, 0.2, 0, 0, 0.7, 0, 0, 0.1, 0, 0]$, 计算该单个样本的交叉熵损失函数 Loss 值.

(II) 绝对值误差 MAE 也是一种比较常见的损失函数, 现已知某 n 阶变量的绝对值误差, $MAE = \frac{1}{N} \sum_i |\hat{y}_i - y_i|$, 其中 $|\hat{y}_i - y_i| = |\hat{y}_{i1} - y_{i1}| + |\hat{y}_{i2} - y_{i2}| + \dots + |\hat{y}_{in} - y_{in}|$, N 表示变量的阶. 若

已知某个样本是一个三阶变量的数阵 $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}, y_{12}, y_{13} \\ y_{21}, y_{22}, y_{23} \\ y_{31}, y_{32}, y_{33} \end{bmatrix}$, 其真实分布是 $y = \begin{bmatrix} 0, 0, 1 \\ 0, 1, 0 \\ 1, 0, 0 \end{bmatrix}$ 现

已知其预测分布为 $\hat{y} = \begin{bmatrix} a, b, c \\ c, a, b \\ b, c, a \end{bmatrix}$, 求证: 该变量的绝对值误差 MAE 为定值.

(III) 在测试 chatGPT 时, 如果输入问题没有语法错误 chatGPT 的回答被采纳的概率为 90%, 当出现语法错误时, chatGPT 的回答被采纳的概率为 50%. 现已知输入的问题中出现语法错误的概率为 5%, 现已知 chatGPT 的回答被采纳, 求该问题的输入语法没有错误的概率.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 - ax + 1$, $g(x) = \ln x + a$ ($a \in R$).

(I) 若 $a = 1$, $f(x) > g(x)$ 在区间 $(0, t)$ 上恒成立, 求实数 t 的取值范围; $(0, 1), (1, +\infty)$

(II) 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有公切线, 求实数 a 的取值范围.

高三数学试题第 5 页 (共 5 页)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线