

2023 届高三全真模拟适应性考试

数学参考答案

一、选择题

1. C 【解析】 $A = \{x | -3 < x < 1\}$, $B = \{x | x > -1\}$,

所以 $A \cap B = (-1, 1)$. 故选 C.

2. A 【解析】因为 $z = \frac{i(\sqrt{3}-i)}{3-i} = \frac{|\sqrt{3}i+1|}{3-i} = \frac{2}{3-i}$
 $= \frac{2(3+i)}{10} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$, 所以 $z = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$. 故选 A.

3. C 【解析】因为 $\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 展开式的通项为 T_{r+1}
 $= (-1)^r C_6^r 2^{6-r} x^{3-r}$, 令 $3-r=0$, 得 $r=3$, 故展开式
 的常数项是 $-8C_6^3 = -160$. 故选 C.

4. A 【解析】设扇形 AOB 的圆心角 α , 所在圆的半径
 为 r , 所以 $\alpha r = 4\pi$, 又 $|\vec{OA} - 2\vec{OB}| = \sqrt{3} |\vec{AB}|$, 所以
 $|\vec{OA} - 2\vec{OB}| = \sqrt{3} |\vec{OB} - \vec{OA}|$, 即 $\vec{OA}^2 - 4\vec{OA} \cdot \vec{OB}$
 $+ 4\vec{OB}^2 = 3(\vec{OA}^2 - 2\vec{OA} \cdot \vec{OB} + \vec{OB}^2)$, 因为
 $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = r$, $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = r^2 \cos \alpha$, 所以 $\cos \alpha =$
 $\frac{1}{2}$, $0 < \alpha < \pi$, 所以 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $r = 12$, 故扇形的面积为 $\frac{1}{4}$
 $\times 24 \times 4\pi = 24\pi$. 故选 A.

5. A 【解析】由于粮仓高 50 米, 顶部为圆锥形, 底部为
 圆柱形, 圆锥高与底面直径为 1:10, 设粮仓顶部圆锥
 形的高为 x 米, 底面直径为 $10x$ 米, 圆柱的高为 $(50 -$
 $x)$ 米, 两座粮仓总的容积为 $V = 2 \left[\pi (5x)^2 \cdot \right.$
 $\left. (50-x) + \frac{1}{3} \pi (5x)^2 x \right] = \frac{100\pi}{3} x^2 (75-x)$. 若靠矩
 形长边建造, 则 $\begin{cases} 20x \leq 100 \\ 10x \leq 80 \end{cases}$, 所以 $0 < x \leq 5$; 若靠矩形
 宽边建造, 则 $\begin{cases} 20x \leq 80 \\ 10x \leq 100 \end{cases}$, 所以 $0 < x \leq 4$. 因为 $V' =$
 $100\pi(50-x-x^2)$, 当 $0 < x < 50$ 时, $V'(x) > 0$, $V(x)$ 在
 $(0, 50)$ 单调递增, 所以 $x = 5$ 时, $V(x)$ 取最大值

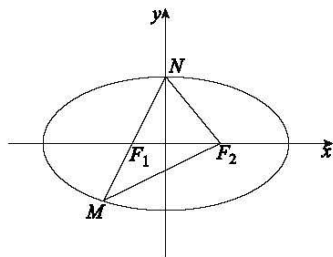
$\frac{175\,000\pi}{3}$, 两个粮仓最多能储存稻谷 $\frac{175\,000\pi}{3} \times 0.6$
 $= 105\,000$ 吨. 故选 A.

6. B 【解析】因为 $f(x) = 2\sin(\omega x - \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi <$
 π) 的一条对称轴为 $x = \frac{2}{3}\pi$, 所以 $\frac{2\pi}{3}\omega - \varphi = \frac{\pi}{2} + k_1\pi$,
 $k_1 \in \mathbf{Z}$ ①, 又 $f(x)$ 的一个对称中心为 $(\frac{\pi}{2}, 0)$, 所以
 $\frac{\pi}{2}\omega - \varphi = k_2\pi, k_2 \in \mathbf{Z}$ ②, ① - ② 得 $\frac{\pi}{6}\omega =$
 $(k_1 - k_2)\pi + \frac{\pi}{2}$, 所以 $\omega = 6(k_1 - k_2) + 3$, 因为 $\omega > 0$,
 所以 ω 取最小整数值为 3. 当 $\omega = 3$ 时, 由 ② 得 $\varphi = \frac{3\pi}{2}$
 $- k_2\pi, k_2 \in \mathbf{Z}$, 因为 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{2}$, 所以
 $f(x) = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$. 由 $3x - \frac{\pi}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 得 $f(x)$
 的极值点为 $\frac{1}{3}(k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}, k=0, 1, 2, 3$ 时极值点
 在 $(0, 5)$ 内. 故选 B.

7. D 【解析】如图所示, 设 $|F_1F_2| = 2c$, $\because 4|F_2N| =$
 $3|F_2M|$, 设 $|F_2N| = 3t$, 则 $|F_2M| = 4t$. 在 $\text{Rt}\triangle F_2MN$
 中, $|MN| = 5t$. 由椭圆定义可知: $|F_1N| = 2a - 3t$,
 $|F_1M| = 2a - 4t$, $|F_1N| + |F_1M| = |MN| = 4a - 7t$
 $= 5t$, 解得: $a = 3t$. 所以 $|F_1N| = 2a - 3t = 3t =$
 $|F_2N|$, $|F_1M| = 2a - 4t = 2t$, 在 $\triangle F_1NF_2$ 中, 可得
 $\cos \angle NF_1F_2 = \frac{c}{3t}$. 在 $\triangle F_1MF_2$ 中, 由余弦定理可得
 $\cos \angle MF_1F_2 = \frac{c^2 - 3t^2}{2ct}$. $\because \angle NF_1F_2 + \angle MF_1F_2 = \pi$,
 $\therefore \cos \angle NF_1F_2 + \cos \angle MF_1F_2 = 0$, 即 $\frac{c}{3t} + \frac{c^2 - 3t^2}{2ct} =$
 0 , 解得 $c = \frac{3\sqrt{5}t}{5}$, 椭圆离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. 故选 D.

· 数学 ·

参考答案



8. A 【解析】设公切线为 l , $P(x_1, y_1)$ 是 l 与 $f(x)$ 的切点,

$Q(x_2, y_2)$ 是 l 与 $g(x)$ 的切点, $f'(x) = \frac{-k}{x^2}$,

$g'(x) = e^x$, $\therefore l$ 的方程为 $y - y_1 = \frac{-k}{x_1^2}(x - x_1)$, 整理

得 $y = \frac{-k}{x_1^2}x + \frac{2k}{x_1}$, 同理 $y - y_2 = e^{x_2}(x - x_2)$, 整理得

$y = e^{x_2}x + e^{x_2}(1 - x_2)$, 依题意两条直线重合,

$$\begin{cases} -\frac{k}{x_1^2} = e^{x_2} \\ \frac{2k}{x_1} = e^{x_2}(1 - x_2) \end{cases}, \text{消去 } x_1 \text{ 得 } 4k = -e^{x_2}(x_2 - 1)^2,$$

由题意此方程有三个不等实根, 设 $h(x) =$

$-e^x(x-1)^2$, 即直线 $y=4k$ 与曲线 $h(x)$ 有三个不同的

交点. $\because h'(x) = e^x(1-x^2)$, 令 $h'(x) = 0$, $x = \pm 1$,

当 $x < -1$ 或 $x > 1$ 时, $h'(x) < 0$; 当 $-1 < x < 1$ 时,

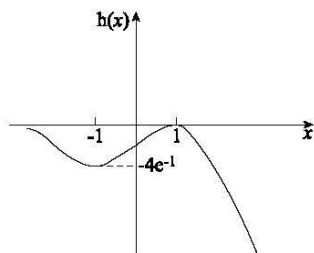
$h'(x) > 0$. $\therefore h(x)$ 有极小值 $h(-1) = -4e^{-1}$, $h(x)$ 有

极大值 $h(1) = 0$. 又 $h(x) \leq 0$, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $h(x) \rightarrow$

0 ; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) \rightarrow -\infty$, 故 $h(x)$ 的图象简单表

示为下图. $\therefore$ 当 $-4e^{-1} < 4k < 0$, 即 $-\frac{1}{e} < k < 0$ 时, 直

线 $y=4k$ 与曲线 $h(x)$ 有三个交点. 故选 A.



二、选择题

9. BC 【解析】对于 A, 因为 $DD_1 \parallel CC_1$, 所以异面直线

BD_1 与 CC_1 所成角为 $\angle DD_1B$ (或补角),

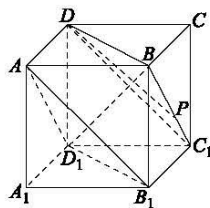
$\tan \angle DD_1B = \sqrt{2}$, 故 A 错误; 对于 B, 连接 DB, DC_1 ,

AB_1, D_1B_1, AD_1 , 由于 $BC_1 \parallel AD_1, DB \parallel D_1B_1$, 所以

$AD_1 \parallel$ 面 $BDC_1, D_1B_1 \parallel$ 面 $BDC_1, AD_1 \cap D_1B_1 = D_1$,

所以面 $AB_1D_1 \parallel$ 面 BDC_1 , 又 $DP \subset$ 平面 BDC_1 , 所以

$DP \parallel$ 面 AB_1D_1 , 故 B 正确;



对于 C, $\because$ 点 P 为线段 BC_1 的中点, $DB = DC_1, BC_1$

$\perp DP$. 又 $BC_1 \parallel AD_1, \therefore AD_1 \perp DP$, 故 C 正确; 对于

D, 作 $PE \perp B_1C_1$, 交 B_1C_1 于 E, $EF \perp B_1D_1$, 交 B_1D_1

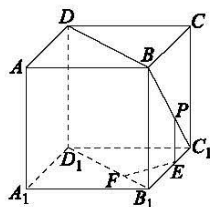
于 F, 则 $BB_1 \parallel PE, \therefore PE \parallel$ 平面 $BB_1D_1D, \therefore P$ 点到

平面 BB_1D_1D 的距离即 E 点到平面 BB_1D_1D 的距

离, $\because EF \perp B_1D_1, B_1B \perp EF, B_1D_1 \cap B_1B = B_1, \therefore EF$

$\perp$ 平面 $BB_1D_1D, \therefore E$ 点到平面 BB_1D_1D 的距离为线

段 EF 的长度 $\frac{\sqrt{2}}{4}$, 故 D 错误. 故选 BC.



10. AC 【解析】对于 A, $\because f'(x) = 2 + \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}x$,

$$\because -1 \leq x \leq 1, \therefore -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}x \leq \frac{\pi}{2}, \therefore -1 \leq \sin \frac{\pi}{2}x$$

$$\leq 1, \therefore 2 - \frac{\pi}{2} \leq 2 + \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}x \leq 2 + \frac{\pi}{2}, \therefore f'(x) >$$

$0, \therefore f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增, $\therefore f(x)_{\max} = f(1)$

$= 2$, 故 A 正确; 对于 B, $f(x)$ 的零点个数即方程

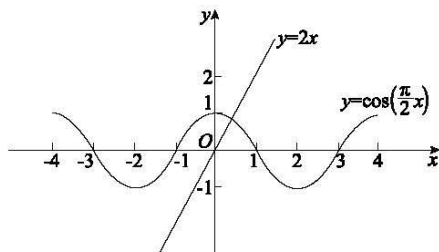
$$2x - \cos \frac{\pi}{2}x = 0 \text{ 的实根个数, 即方程 } 2x = \cos \frac{\pi}{2}x$$

的实根个数, 即 $y = 2x$ 与 $y = \cos \frac{\pi}{2}x$ 图象的交点个

参考答案

• 数学 •

数. 在同一坐标系中画出 $y=2x$ 与 $y=\cos \frac{\pi}{2}x$ 图象
如图所示:



两个函数图象只有一个交点, 故 B 错误; 对于 C, 若 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 2)$ 对称, 则有 $f(1+x) + f(1-x) = 2 + 2 = 4$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立. $\therefore f(1+x) + f(1-x) = 2(1+x) - \cos \frac{\pi}{2}(1+x) + 2(1-x) - \cos \frac{\pi}{2}(1-x) = 4 - \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}x \right) - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}x \right) = 4 - \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}x \right) - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}x \right) = 4$ 恒成立, $\therefore f(x)$ 的图象关于点 $(1, 2)$ 对称, 故 C 正确; 对于 D, 若存在实数 a 使 $f(2x-a)$ 的图象关于原点对称, 则 $f(2x-a)$ 为奇函数. 令 $g(x) = f(2x-a)$, $\therefore g(x) + g(-x) = 0$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 即 $2(2x-a) - \cos \frac{\pi}{2}(2x-a) + 2(-2x-a) - \cos \frac{\pi}{2}(-2x-a) = 0$ 恒成立, 即 $2a + \cos \pi x \cdot \cos \frac{1}{2}\pi a = 0$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则有

$$\begin{cases} 2a=0 \\ \cos \frac{1}{2}\pi a=0 \end{cases}, \text{ 上述方程组无解, 故 D 错误. 故}$$

选 AC.

11. ABD 【解析】抛物线方程化为 $x^2 = \frac{1}{a}y$, 准线为 $y = -\frac{1}{2}$, 所以 $a > 0$, $2p = \frac{1}{a}$, $\frac{p}{2} = \frac{1}{4a}$, 准线为 $y = -\frac{p}{2} = -\frac{1}{4a} = -\frac{1}{2}$, 所以 $a = \frac{1}{2}$, 故 A 正确; 又 $F(0, \frac{1}{2})$, 过 F 作直线 l 交抛物线于 M、N 两点, 显

然 l 的斜率存在, 设 l 的方程为 $y = kx + \frac{1}{2}$, 与 $y =$

$\frac{1}{2}x^2$ 联立消去 y 整理得 $x^2 - 2kx - 1 = 0$, $\Delta = 4k^2 + 4 >$

0 恒成立. 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = 2k$,

$x_1 x_2 = -1$, $|MN| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1 x_2} =$

$\sqrt{1+k^2} \sqrt{4+4k^2} = 2(1+k^2)$. 直线 l 经过点 $(-1,$

$0)$, 则 $k = \frac{1}{2}$, $|MN| = \frac{5}{2}$, 故 B 正确;

$$|OM| \cdot |ON| = \sqrt{x_1^2 + \frac{x_1^4}{4}} \cdot \sqrt{x_2^2 + \frac{x_2^4}{4}}$$

$$= \frac{|x_1 x_2|}{4} \sqrt{(x_1^2 + 4)(x_2^2 + 4)}$$

$$= \frac{|x_1 x_2|}{4} \sqrt{16 + x_1^2 x_2^2 + 4(x_1^2 + x_2^2)}$$

$$= \frac{|x_1 x_2|}{4} \sqrt{17 + 4[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2]}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{17 + 16k^2 + 8} = \frac{1}{4} \sqrt{25 + 16k^2}, k = 0 \text{ 时,}$$

$|OM| \cdot |ON|$ 最小为 $\frac{5}{4}$, 故 C 错误; 由 $\overrightarrow{FN} = 3\overrightarrow{MF}$

得 $-3x_1 = x_2$, 又 $x_1 x_2 = -1$, $x_1 < 0, x_2 > 0$, 解得:

$$x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, 2k = x_1 + x_2, k = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 故 D 正确. 故}$$

选 ABD.

12. ABC 【解析】对于 A, 因为 $c^c = d^d = e^{-\frac{2}{5}} (0 < c <$

$d)$, 所以 $c \ln c = d \ln d = -\frac{2}{5}$, 构造函数 $g(x) =$

$x \ln x$, 因为 $g'(x) = \ln x + 1$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上

递减, 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上递增, 所以 $g(x)$ 有唯一的极

小值 $g(\frac{1}{e})$, 因为 $g(c) = g(d), c < d$, 所以 $0 < c <$

$\frac{1}{e} < d < 1$. 设 $F(x) = g(x) - g(\frac{2}{e} - x) = x \ln x -$

$(\frac{2}{e} - x) \ln(\frac{2}{e} - x), 0 < x < \frac{1}{e}$, 因为 $F'(x) = 2 +$

$$\ln x + \ln(\frac{2}{e} - x) = 2 + \ln \left[-\left(x - \frac{1}{e}\right)^2 + e^{-2} \right] <$$

· 数学 ·

参考答案

$2 + \ln e^{-2} = 0$, 所以 $F(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递减, 且 $F(\frac{1}{e}) = 0$, $F(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上有 $F(x) > F(\frac{1}{e}) = 0$, 即 $g(x) > g(\frac{2}{e} - x)$, 由 $0 < c < \frac{1}{e}$, $g(c) > g(\frac{2}{e} - c)$, 因为 $g(c) = g(d)$, 所以 $g(d) > g(\frac{2}{e} - c)$, 因为 $\frac{2}{e} - c > \frac{1}{e}$, $d > \frac{1}{e}$, $g(x)$ 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上递增, 所以 $d > \frac{2}{e} - c$, 即 $c + d > \frac{2}{e}$, 故 A 正确; 对于 B, a, b 是方程 $e^x = x^3$ 的两根 ($a < b$), 因为 $e^x > 0$, 所以 $x^3 > 0$, 所以 $x > 0$, 所以 $e^x > 1$, 所以 $x > 1$, 所以 $1 < a < b$, 又 $e^a = a^3, e^b = b^3$, 所以 $a = 3 \ln a, b = 3 \ln b, \frac{a}{\ln a} = \frac{b}{\ln b} = 3$. 构造函数 $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ ($x > 1$), $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$, 当 $x \in (1, e)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在区间 $(1, e)$ 上递减, 在区间 $(e, +\infty)$ 上递增, 所以 $f(x)$ 有唯一的极小值 $f(e)$, 若 $f(a) = f(b), 1 < a < e < b$, 构造函数 $G(x) = f(x) - f(2e - x)$, 类比选项 A, 可证 $a + b > 2e > 5$, 故 B 正确; 对于 C, $1 < a < e < b, c < \frac{1}{e} < d < 1, f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{-g(x)}, f(\frac{1}{d}) = \frac{1}{-g(d)}, 1 < \frac{1}{d} < e, 1 < a < e, f(x)$ 在区间 $(1, e)$ 上递减, 所以 $f(\frac{1}{d}) = \frac{1}{-g(d)} = \frac{5}{2} < 3 = f(a)$, 所以 $\frac{1}{d} > a, ad < 1$, 故 C 正确; 对于 D, $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上递增, $f(\frac{1}{c}) = \frac{1}{-g(c)}, \frac{1}{c} > e, b > e$, 所以 $f(\frac{1}{c}) = \frac{1}{-g(c)} = \frac{5}{2} < 3 = f(b), \frac{1}{c} < b$, 即 $bc > 1$, 故 D 错误. 故选 ABC.

三、填空题

13. 45 【解析】因为 $6 \times 50\% = 3, 6 \times 80\% = 4.8$, 所以

甲组的第 50 百分位数为 $\frac{39+m}{2}$, 乙组的第 80 百分位数为 $42, \frac{39+m}{2} = 42$, 所以 $m = 2 \times 42 - 39 = 45$. 故答案为 45.

14. $\sqrt{2}x + y - 4 = 0$ 【解析】设直线 $y = 2\sqrt{2}x$ 的倾斜角 $2\theta (0 \leq 2\theta < \frac{\pi}{2})$, $\tan 2\theta = 2\sqrt{2}$, 直线 $C_1 C_2$ 的倾斜角为 θ , 其方程为 $y = \tan \theta x$, 由 $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = 2\sqrt{2}$, 解得 $\tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\tan \theta = -\sqrt{2}$ (舍去), 故直线 $C_1 C_2$ 为 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$. 设 $C_1(\sqrt{2}a, a), C_2(\sqrt{2}b, b), a + b = 4$, 圆 C_1 方程为 $(x - \sqrt{2}a)^2 + (y - a)^2 = a^2$, 圆 C_2 方程为 $(x - \sqrt{2}b)^2 + (y - b)^2 = b^2$, 两圆方程相减, 得直线 MN 的方程为 $\sqrt{2}x + y - 4 = 0$. 故答案为 $\sqrt{2}x + y - 4 = 0$.

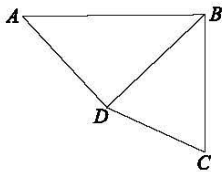
15. $(-\frac{1}{5}, 0]$ 【解析】 $f'(x) = e^x [ax^2 + (2a+b)x + b - 1]$, 因为 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 所以 $f'(1) = 0$, 即 $3a + 2b - 1 = 0$, 从而 $b = \frac{1-3a}{2}$. $f'(x) = e^x [ax^2 + (2a + \frac{1-3a}{2})x + \frac{1-3a}{2} - 1] = \frac{1}{2}e^x [2ax^2 + (a+1)x - 3a - 1] = \frac{1}{2}e^x (x-1)(2ax+3a+1)$. 当 $a=0$ 时, $f'(x) = \frac{1}{2}e^x (x-1)$, 当 $x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 符合题意; 当 $a < 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = 1, x_2 = -\frac{3a+1}{2a}$, $f'(x) = ae^x (x-1)(x + \frac{1+3a}{2a})$, 若 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 则 $-\frac{1+3a}{2a} > 1$, 解得 $-\frac{1}{5} < a < 0$. 综上, a 的取值范围 $(-\frac{1}{5}, 0]$. 故答案为 $(-\frac{1}{5}, 0]$.

参考答案

• 数学 •

16. $(2+2\sqrt{5})\pi$ 【解析】在平面图形中设 $\angle CBD = \theta$ (0

$< \theta < 90^\circ$), $\angle ABD = 90^\circ - \theta$, 即 $\text{Rt} \triangle ADB$ 中,



$\angle BAD = \theta$, $AD = \frac{2}{\tan \theta}$. 在 $\triangle BCD$ 中, $CD = 2BC \cdot$

$\sin \frac{\theta}{2} = 4 \sin \frac{\theta}{2}$. 设 $\triangle BCD$ 外接圆圆心为 M , 外接

圆半径为 r , 由正弦定理可得 $2r = \frac{CD}{\sin \theta} =$

$$\frac{4 \sin \frac{\theta}{2}}{2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{2}{\cos \frac{\theta}{2}}, r = \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2}}. \text{ 设三棱锥}$$

$A-BCD$ 外接球球心为 O , 则 $OM \perp$ 平面 BCD .

又 $\because$ 平面 $ADB \perp$ 平面 BDC , 交线为 BD , $\angle ADB =$

90° , $\therefore AD \perp$ 平面 BDC , $\therefore AD \parallel OM$, $\therefore$ 四边形

$OMDA$ 为直角梯形. 设外接球的半径为 R , 在平面

$OMDA$ 中, 过 O 做 $OE \perp AD$ 于 E , 在 $\triangle AOD$ 中,

$AO = DO = R$, $\therefore E$ 为 AD 的中点, $\therefore OM = ED =$

$$\frac{1}{2}AD = \frac{1}{\tan \theta}, AO^2 = AE^2 + OE^2, \therefore R^2 = \frac{1}{\tan^2 \theta} +$$

$$\frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos^2 \theta}{1 - \cos^2 \theta} + \frac{2}{1 + \cos \theta} = \frac{\cos^2 \theta + 2 - 2 \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta} = -1$$

$$+ \frac{3 - 2 \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta}. \text{ 令 } 3 - 2 \cos \theta = t, 1 < t < 3, \text{ 则 } \cos \theta =$$

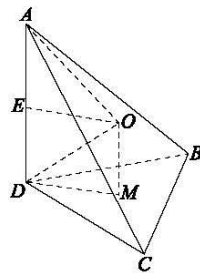
$$\frac{3-t}{2}, R^2 = -1 + \frac{t}{1 - \left(\frac{3-t}{2}\right)^2} = -1 + \frac{4t}{-5 + 6t - t^2} =$$

$$-1 + \frac{4}{6 - \left(t + \frac{5}{t}\right)} \geq -1 + \frac{4}{6 - 2\sqrt{t \times \frac{5}{t}}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

当且仅当 $t = \frac{5}{t}$ 时, 即 $t = \sqrt{5}$ 时 (满足 $1 < t < 3$) 等号

成立. 所以球表面积最小值为 $4\pi \times \frac{1 + \sqrt{5}}{2} =$

$(2 + 2\sqrt{5})\pi$. 故答案为 $(2 + 2\sqrt{5})\pi$.



四、解答题

17. 解: (1) 因为 $\sqrt{3}b + c \cos \left(\frac{\pi}{2} + B \right) = b \sin \left(C - \frac{\pi}{3} \right)$,

$$\text{所以 } \sqrt{3} \sin B - \sin C \sin B = \sin B \sin \left(C - \frac{\pi}{3} \right),$$

(1 分)

$$\text{因为 } \sin B \neq 0, \text{ 所以 } \sqrt{3} - \sin C = \sin \left(C - \frac{\pi}{3} \right),$$

(2 分)

$$\sqrt{3} - \sin C = \frac{1}{2} \sin C - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos C, \text{ 即 } \frac{\sqrt{3}}{2} \sin C -$$

$$\frac{1}{2} \cos C = 1, \text{ 所以 } \sin \left(C - \frac{\pi}{6} \right) = 1, \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{又 } 0 < C < \pi, \text{ 所以 } -\frac{\pi}{6} < C - \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}, \text{ 所以 } C - \frac{\pi}{6} =$$

$$\frac{\pi}{2}, \text{ 即 } C = \frac{2\pi}{3}. \quad (5 \text{ 分})$$

(2) 因为 $\angle ADC + \angle BDC = \pi$, 由余弦定理

$$\frac{\frac{c^2}{4} + CD^2 - b^2}{2 \times \frac{c}{2} \times CD} + \frac{\frac{c^2}{4} + CD^2 - a^2}{2 \times \frac{c}{2} \times CD} = 0,$$

$$\text{解得 } 2 = a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}, \quad (7 \text{ 分})$$

$$\text{又 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C, \text{ 所以 } c^2 = a^2 + b^2 + ab,$$

$$\text{所以 } 2 = a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2} = \frac{1}{2} (a^2 + b^2) - \frac{1}{2} ab \geq ab -$$

$$\frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} ab,$$

当且仅当 $a = b$ 时取等号, (9 分)

所以 $ab \leq 4$,

$$\text{因为 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{\sqrt{3}}{4} ab, \text{ 所以 } \triangle ABC \text{ 面积的}$$

• 数学 •

参考答案

最大值为 $\sqrt{3}$. (10分)

18. 解: (1) 设 $\{b_n\}$ 的公比为 q , 显然 $q \neq 1$, (1分)

$$\text{由 } S_2 = \frac{4}{3}, S_3 = \frac{13}{9}, \therefore \begin{cases} \frac{b_1(1-q^2)}{1-q} = \frac{4}{3} \\ \frac{b_1(1-q^3)}{1-q} = \frac{13}{9} \end{cases}, \quad (2\text{分})$$

解得 $q = \frac{1}{3}$ 或 $q = -\frac{1}{4}$ (舍去), $b_1 = 1$, 所以 $b_n =$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}. \quad (3\text{分})$$

又对任意 $n \geq 2$, $a_n T_n, a_1, a_n T_{n-1}$ 成等差数列, $a_1 = 2$,

所以 $a_n T_n + a_n T_{n-1} = 4$, (4分)

因为 $a_n = T_n - T_{n-1}$ ($n \geq 2$),

有 $(T_n - T_{n-1})(T_n + T_{n-1}) = 4$, $T_n^2 - T_{n-1}^2 = 4$ ($n \geq 2$),

故 $\{T_n^2\}$ 是以 $T_1^2 = 4$ 为首项, 公差 $d = 4$ 的等差数列, (5分)

所以 $T_n^2 = 4 + (n-1) \times 4 = 4n$, 又 $a_n > 0$, 所以 $T_n > 0$, $T_n = 2\sqrt{n}$,

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = \frac{4}{T_n + T_{n-1}} = 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$,

$n = 1$ 时, $a_1 = 2$ 满足上式,

故 $a_n = 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$. (7分)

$$(2) c_n = 4n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1},$$

设 $T'_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$,

$$T'_n = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 + 8 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 + 12 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + 4n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad ①,$$

$$\frac{1}{3} T'_n = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 + 8 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 12 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots + 4(n-1) \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 4n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad ②, \quad (8\text{分})$$

$$① - ②: \frac{2}{3} T'_n = 4 + 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 + 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots + 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 4n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= 4 \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} - n \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] \\ = 4 \left[\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n - n \left(\frac{1}{3}\right)^n \right], \quad (9\text{分})$$

$$T'_n = 9 - 9 \left(\frac{1}{3}\right)^n - 6n \left(\frac{1}{3}\right)^n = 9 - (3+2n) \frac{1}{3^{n-1}} <$$

9, 故不存在正整数 n , 使 $c_1 + c_2 + \dots + c_n > 9$.

(12分)

19. 证明: (1) 连接 AD, DF , $\because AB = AC, D$ 为 BC 的中点, $\therefore AD \perp BC$,

又 $\because BB_1 \perp AD, BB_1 \cap BC = B, BB_1, BC \subset$ 平面 B_1BCC_1 , $\therefore AD \perp$ 平面 B_1BCC_1 , (2分)

又 $\because CM \subset$ 平面 B_1BCC_1 , 故 $AD \perp CM$,

又 $\because BM = 1, BC = 2, CD = 1, CF = 2$,

$$\therefore \tan \angle MCB = \frac{1}{2}, \tan \angle CDF = 2,$$

$\therefore CM \perp DF$, 又 $\because DF \cap AD = D, DF, AD \subset$ 平面 ADF ,

故 $CM \perp$ 平面 ADF , (4分)

$\because AF \subset$ 平面 ADF , $\therefore CM \perp AF$. (5分)

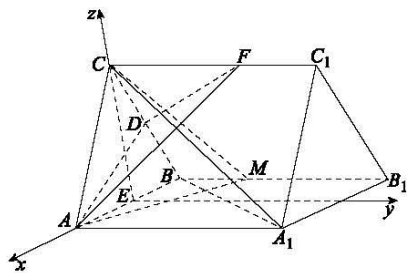
(2) 过 C 作 $CE \perp AB$ 于点 E , 又因为 $BB_1 \perp$ 平面 ABC , 所以 $BB_1 \perp CE$,

$\because AB \cap BB_1 = B, AB, BB_1 \subset$ 平面 B_1BAA_1 , 所以 $CE \perp$ 平面 B_1BAA_1 , 所以 $\angle CAE$ 即为 AC 与平面 B_1BAA_1 所成的角且为 60° , (6分)

又 $\because AB = AC$, $\therefore \triangle ABC$ 为正三角形, E 为 AB 的中点, 因为 EA, BB_1, EC 两两垂直, 所以以 E 为原点, EA, EC 所在直线分别为 x, z 轴, 过点 E 做 BB_1 的平行线为 y 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系 $E-xyz$,

参考答案

• 数学 •



可知各点坐标分别为: $E(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $C(0,0,\sqrt{3})$, $B(-1,0,0)$, $M(-1,1,0)$, $A_1(1,3,0)$,

$$\therefore \overrightarrow{AC} = (-1, 0, \sqrt{3}), \overrightarrow{AM} = (-2, 1, 0), \overrightarrow{A_1B} = (-2, -3, 0), \overrightarrow{A_1C} = (-1, -3, \sqrt{3}), \quad (7 \text{ 分})$$

设平面 ACM 的法向量为 $n_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\therefore \begin{cases} n_1 \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ n_1 \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + \sqrt{3}z_1 = 0 \\ -2x_1 + y_1 = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x_1 = \sqrt{3}z_1 \\ y_1 = 2\sqrt{3}z_1 \end{cases},$$

$$\text{取 } n_1 = (\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 1). \quad (8 \text{ 分})$$

设平面 CBA_1 的法向量为 $n_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\therefore \begin{cases} n_2 \cdot \overrightarrow{A_1B} = 0 \\ n_2 \cdot \overrightarrow{A_1C} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x_2 - 3y_2 = 0 \\ -x_2 - 3y_2 + \sqrt{3}z_2 = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x_2 = -\sqrt{3}z_2 \\ y_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}z_2 \end{cases},$$

$$\text{取 } n_2 = (-3, 2, \sqrt{3}). \quad (10 \text{ 分})$$

设平面 ACM 与平面 CBA_1 所成的锐二面角为 θ , 则

$$\cos \theta = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1| |n_2|} = \frac{\sqrt{3}}{8},$$

故平面 CAM 与平面 CBA_1 所成锐二面角余弦值为

$$\frac{\sqrt{3}}{8}. \quad (12 \text{ 分})$$

20. 解: (1) 设“李明被终止比赛”事件为 M , M 表示选的 4 题均会操作或 3 题会操作, 故 $P(M) = 1 -$

$$P(M) = 1 - \frac{C_3^3 \cdot C_2^2 + C_3^2 \cdot C_2^1}{C_5^4} = \frac{2}{7}. \quad (4 \text{ 分})$$

(2) 设李明在竞赛中, A 类题全部操作正确后得分为 x , x 的取值为 40, 60, 80, 100,

$$B \text{ 类题正确操作题数 } n \sim B\left(3, \frac{2}{3}\right), \quad (6 \text{ 分})$$

$$P(x=40) = C_3^0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27};$$

$$P(x=60) = C_3^1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9};$$

$$P(x=80) = C_3^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{4}{9};$$

$$P(x=100) = C_3^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{8}{27};$$

所求的分布列

x	40	60	80	100
$P(x)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

$$E(x) = 40 \times \frac{1}{27} + 60 \times \frac{2}{9} + 80 \times \frac{4}{9} + 100 \times \frac{8}{27} = 80. \quad (8 \text{ 分})$$

(3) 设李明获二等奖的事件为 N , 事件 N 即 A 类题全部操作正确, B 类题正确操作 2 题

或 A 类题操作正确 3 题, B 类题全部正确操作, (10 分)

$$P(N) = \frac{C_3^3}{C_3^3} \times C_3^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \frac{C_3^3 C_2^1}{C_3^4} \times C_3^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{44}{189}. \quad (12 \text{ 分})$$

$$21. \text{ 解: (1) } \because \text{双曲线 } C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$\text{渐近线为 } y = \pm \frac{b}{a}x, \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{又一条渐近线为 } y = \frac{\sqrt{2}}{2}x, \therefore \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \therefore b^2 = \frac{1}{2}a^2, \quad (2 \text{ 分})$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + \frac{1}{2}a^2 = \frac{3}{2}a^2, \text{ 则双曲线 } C \text{ 的离}$$



· 数学 ·

参考答案

心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, (3分)

双曲线 C 的方程可写为: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{2y^2}{a^2} = 1$, $\therefore$ 经过点

$(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $\therefore \frac{8}{a^2} - \frac{4}{a^2} = 1$, $\therefore a^2 = 4, b^2 = 2$,

$\therefore$ 双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$. (4分)

(2) 双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$,

假设存在点 $N(t, 0)$ ($|t| < 2$), 满足题设条件,

当直线 l 的斜率不存在时, 直线 l 的方程为 $x = t$, $|t| < 2$, 与双曲线无交点;

直线 l 的斜率存在时, 设为 k , 直线 l 的方程为 $y = k(x - t)$, l 与 C 交点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

联立方程组: $\begin{cases} y = k(x - t) \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$, 消去 y 可得:

$(1 - 2k^2)x^2 + 4k^2tx - 2k^2t^2 - 4 = 0$,

由题可知 $1 - 2k^2 \neq 0$, 且 $\Delta = (4k^2t)^2 + 4(1 - 2k^2) \cdot (2k^2t^2 + 4) > 0$,

$\therefore x_1 + x_2 = \frac{4k^2t}{2k^2 - 1}, x_1x_2 = \frac{2k^2t^2 + 4}{2k^2 - 1}$, (7分)

则 $\overrightarrow{MA} = (x_1 - \frac{13}{4}, y_1), \overrightarrow{MB} = (x_2 - \frac{13}{4}, y_2)$,

所以 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (x_1 - \frac{13}{4})(x_2 - \frac{13}{4}) + y_1y_2$

$= x_1x_2 - \frac{13}{4}(x_1 + x_2) + \frac{169}{16} + k^2(x_1 - t)(x_2 - t)$

$= (1 + k^2)x_1x_2 - (k^2t + \frac{13}{4})(x_1 + x_2) + k^2t^2$

$+ \frac{169}{16}$

$= (1 + k^2) \frac{2k^2t^2 + 4}{2k^2 - 1} - (k^2t + \frac{13}{4}) \frac{4k^2t}{2k^2 - 1} + k^2t^2 +$

$\frac{169}{16} = \frac{(t^2 - 13t + 4)k^2 + 4}{2k^2 - 1} + \frac{169}{16}$, (9分)

若为常数, 则 $\frac{t^2 - 13t + 4}{2} = \frac{4}{-1}$, 解得 $t = 1$ 或 12 ,

(11分)

$\therefore |t| < 2, \therefore t = 1$, 常数为 $\frac{105}{16}$, $\therefore 1 - 2k^2 \neq 0$, 且 $\Delta =$

$(4k^2t)^2 + 4(1 - 2k^2)(2k^2t^2 + 4) > 0$,

$\therefore k^2 < \frac{2}{3}$, 且 $k^2 \neq \frac{1}{2}$, 所以存在 $t = 1$, 得 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ 为

常数 $\frac{105}{16}$. (12分)

22. 解: (1) $H(x) = f(x) - xg(x) = x + \ln x - xe^x$, 定义域为 $(0, +\infty)$,

$H'(x) = 1 + \frac{1}{x} - (e^x + xe^x) = \frac{x+1}{x} - e^x(x+1) =$

$(x+1)(\frac{1}{x} - e^x) (x > 0)$, (1分)

令 $t(x) = \frac{1}{x} - e^x$, 则 $t'(x) = -\frac{1}{x^2} - e^x$,

所以 $t(x)$ 单调递减, (2分)

又 $t(1) = 1 - e < 0, t(\frac{1}{2}) = 2 - e^{\frac{1}{2}} > 0$, $\therefore$ 存在 $x_0 \in$

$(\frac{1}{2}, 1)$, 使 $t(x_0) = 0$, (4分)

即 $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$, 即 $x_0 + \ln x_0 = 0$, 当 $0 < x < x_0$ 时,

$H'(x) > 0, H(x)$ 单调递增; 当 $x > x_0$ 时, $H'(x) < 0, H(x)$ 单调递减, $\therefore H(x)$ 有最大值, $H(x_0) = x_0 + \ln x_0 - x_0 e^{x_0} = -1$. (5分)

(2) 不等式 $\frac{2xg(x-1)}{f(x) - (x-1)} \geq x^2 + 1$, 即证 $\frac{2xe^{x-1}}{1 + \ln x} \geq$

$x^2 + 1$, 即证 $\frac{e^{x-1}}{1 + \ln x} \geq \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$,

当 $x = 1$ 时, 不等式显然成立; (6分)

当 $\frac{1}{e} < x < 1$ 时, 令 $m(x) = e^{x-1} - x$, $\therefore m'(x) =$

$e^{x-1} - 1$,

又 $\frac{1}{e} < x < 1, \therefore m'(x) < 0$, 所以 $m(x)$ 在 $\frac{1}{e} < x < 1$

上单调递减,

$m(x) > m(1) = 0, \therefore e^{x-1} > x$,

要证不等式 $\frac{e^{x-1}}{1 + \ln x} \geq \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$,

参考答案

• 数学 •

可以证明： $\frac{x}{1+\ln x} \geq \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)$, (8分)

等价于证明： $\frac{2x^2}{1+x^2} \geq 1 + \ln x$,

令 $F(x) = \frac{2x^2}{1+x^2} - (1 + \ln x)$, $F'(x) =$

$\frac{-(x^2-1)^2}{x(1+x^2)^2} < 0$, $\therefore$ 函数 $F(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ 上单调递

减, $\therefore F(x) > F(1) = 0$, 即 $\frac{2x^2}{1+x^2} \geq 1 + \ln x$; (9分)

当 $x > 1$ 时, $\frac{2x^2}{1+x^2} \geq 1 + \ln x$ 只需证 $\frac{2e^{x-1}}{1+x^2}$

$> \frac{1+\ln x}{x}$,

令 $h(x) = \frac{2e^{x-1}}{1+x^2}$, $u(x) = \frac{1+\ln x}{x}$, $h'(x) =$

$\frac{2e^{x-1}(x-1)^2}{(1+x^2)^2} > 0$, $\therefore$ 函数 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单

调递增, $h(x) > h(1) = 1$, (10分)

又 $\because u'(x) = \frac{-\ln x}{x^2} < 0$,

$\therefore u(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递减, $\therefore u(x) < u(1) =$

1. (11分)

所以 $x > 1$ 时, $h(x) > u(x)$,

$\therefore$ 不等式 $\frac{2e^{x-1}}{1+x^2} > \frac{1+\ln x}{x}$ 成立;

综合上述不等式得证. (12分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线