惠州市2024届高三第一次调研考试试题

数　学

全卷满分150分，时间120分钟．

注意事项：

1．答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号、座位号、学校、班级等考生信息填写在答题卡上。

2．作答单项及多项选择题时，选出每个小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案信息点涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案，写在本试卷上无效。

3．非选择题必须用黑色字迹签字笔作答，答案必须写在答题卡各题指定的位置上，写在本试卷上无效。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题满分5分，共40分。

在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，选对得5分，选错得0分。

1．已知集合$U=\{x\mid x\in \mathbf{N}^*,x\le 6\}$，$A=\{1,2,3\}$，$B=\{3,5\}$，求$\complement_U(A\cup B)=$（　　）

A．$\varnothing$　　B．$\{4,6\}$　　C．$\{1,2,3,5\}$　　D．$\{1,2,3,4,5,6\}$

2．已知复数z满足$z(1-i)=1+i$，则z的虚部是（　　）

A．2　　B．$2i$　　C．1　　D．i

3．若$(x+2)^4=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，则$a_4-a_3+a_2-a_1+a_0=$（　　）

A．1　　B．-1　　C．15　　D．-15

4．设$a\in \mathrm{R}$，则“$|a|>1$”是“$a^2>1$”的（　　）

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　D．既非充分也非必要条件

5．蚊香（如图1）具有悠久的历史，我国蚊香的发明与古人端午节的习俗有关．某校数学社团用数学软件制作“蚊香”模型，画法如下：在水平直线上取长度为1的线段AB，作一个等边三角形ABC，然后以点B为圆心，AB为半径逆时针画圆弧交线段CB的延长线于点D，由此得到第1段圆弧$\overset{\frown}{AD}$，再以点C为圆心，CD为半径逆时针画圆弧交线段AC的延长线于点E，再以点A为圆心，AE为半径逆时针画圆弧……以此类推，当得到如图2所示的“蚊香”恰好有11段圆弧时，则该“蚊香”的长度为（　　）


蚊香

图1

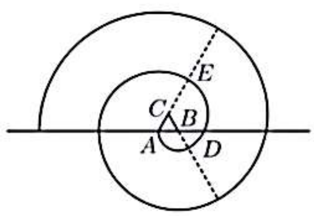


图2

A．14π　　B．18π　　C．30π　　D．44π

6. 甲乙两位游客慕名来到惠州旅游，准备分别从惠州西湖、博罗罗浮山、龙门南昆山、惠东盐洲岛和大亚湾红树林 5 个景点中各随机选择其中一个景点游玩，记事件 A：甲和乙选择的景点不同，事件 B：甲和乙恰好一人选择罗浮山，则 $P(B|A)=$（　　）

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{9}{25}$　　D. $\frac{9}{20}$

7. 设 O 为坐标原点，F_1,F_2 是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，已知双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{3}$，过 F_2 作一条渐近线的垂线，垂足为 P，则 $\frac{|PF_1|}{|OP|}=$（　　）

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{6}$

8. 已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(2+x)=f(-x)$，且当 $x\in[0,1]$ 时 $f'(x)>\pi$，则不等式 $f(x)\le\sin\pi x$ 在 $[-3,3]$ 上的解集为（　　）

A. $[-2,0]\cup[2,3]$　　B. $[-1,3]$　　C. $[-1,2]$　　D. $[-3,-2]\cup[0,2]$

二、多选题：本题共 4 小题，每小题满分 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知 $a=\log_2 e$，$b=\ln 2$，$c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$，则下列关系式中，正确的是（　　）

A. $a>b$　　B. $a>c$　　C. $c>a$　　D. $a+b=2$

10. 下列说法正确的是（　　）

A. 残差图中若样本数据对应的点分布的带状区域越狭窄，说明该模型的拟合精确度越高

B. 在频率分布直方图中，各小长方形的面积等于各组的频数

C. 数据 1，3，4，5，7，9，11，16 的第 75 百分位数为 9

D. 某校有男女学生共 1500 人，现按性别采用分层抽样的方法抽取容量为 100 的样本，若样本中男生有 55 人，则该校女生有 675 人

11. 若过点 $P(1,\lambda)$ 可作 3 条直线与函数 $f(x)=(x-1)e^x$ 的图象相切，则实数 λ 可以是（　　）

A. $-\frac{4}{e}$　　B. $-\frac{2}{e}$　　C. $-\frac{1}{e}$　　D. 0

12．已知棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，以正方体中心 O 为球心的球与正方体的各条棱都相切，点 P 为球面上的动点，则下列说法正确的是（　　）

A．球 O 的半径 $R=\frac{1}{2}$

B．球 O 在正方体外部分的体积大于 $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi-1$

C．若点 P 在球 O 的正方体外部（含正方体表面）运动，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\in\left[-\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$

D．若点 P 在球 O 的正方体外部（含正方体表面）运动，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\in\left[-\frac{1}{4},\frac{7}{4}\right]$

三、填空题：本题共 4 小题，每题 5 分，共 20 分。

13．若 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，则 $\tan\alpha=$__________.

14．已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=f(x)+2$，则 $f(x)$ 的解析式可以是_________.（写出满足条件的一个解析式即可）

15．已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2，$\angle ABC=60°$，点 P 在 BC 边上（包括端点），则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AP}$ 的取值范围是__________.

16．已知 O 为坐标原点，点 $A(1,1)$ 在抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 上，过点 $B(0,-1)$ 的直线交抛物线 C 于 P,Q 两点，则 $\frac{|OP|\cdot|OQ|}{|BP|\cdot|BQ|}$ 的取值范围是__________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

在 ΔABC 中，角 A,B,C 的对边分别是 a，b，c，已知 $b+b\cos A=\sqrt{3}a\sin B$.

（1）求 A；

（2）若 $a=\sqrt{21}$，$b=4$，求 ΔABC 的面积.

18.（本小题满分 12 分）

设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，且$d=2a_1$，$a_5=9$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

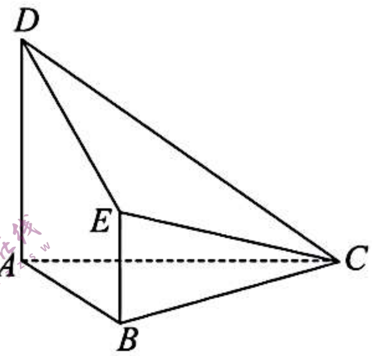
（2）设数列$\{b_n\}$满足$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=3-\dfrac{2n+3}{2^n}$，求$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$.

19.（本小题满分 12 分）

如图，在五面体$ABCDE$中，$AD\perp$平面ABC，$AD//BE$，$AD=2BE$，$AB=BC$.

（1）问：在线段CD上是否存在点P，使得$PE\perp$平面ACD？若存在，请指出点P的位置，并证明；若不存在，请说明理由.

（2）若$AB=\sqrt{3}$，$AC=2$，$AD=2$，求平面ECD与平面ABC夹角的余弦值.



20.（本小题满分 12 分）

学校团委和工会联合组织教职员工进行益智健身活动比赛．经多轮比赛后，由教师甲、乙作为代表进行决赛．决赛共设三个项目，每个项目胜者得10分，负者得-5分，没有平局．三个项目比赛结束后，总得分高的获得冠军．已知教师甲在三个项目中获胜的概率分别为0.4，0.5，0.75，各项目比赛结果相互独立．甲、乙获得冠军的概率分别记为p_1，p_2.

（1）用X表示教师乙的总得分，求X的分布列与期望；

（2）如果$|p_1-p_2|\geq\sqrt{\dfrac{2|p_1^2-p_2^2|}{5}+0.1}$，那么认为甲、乙获得冠军的实力有明显差别，否则认为没有明显差别．请根据上述要求判断甲、乙获得冠军的实力是否有明显差别.

21.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点为 A，上顶点为 B，右焦点为 $F(1,0)$，O 为坐标原点，线段 OA 的中点为 D，且 $|BD|=|DF|$.

（1）求 C 的方程；

（2）已知点 M、N 均在直线 $x=2$ 上，以 MN 为直径的圆经过 O 点，圆心为点 T，直线 AM、AN 分别交椭圆 C 于另一点 P、Q，证明直线 PQ 与直线 OT 垂直.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\ln x-a\left(x-\frac{1}{x}\right)$，$a>0$.

（1）讨论 $f(x)$ 极值点的个数；

（2）若 $f(x)$ 恰有三个零点 $t_1,t_2,t_3\left(t_1<t_2<t_3\right)$ 和两个极值点 $x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$.

（i）证明：$f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=0$；

（ii）若 $m<n$，且 $m\ln m=n\ln n$，证明：$\frac{(1-m)\mathrm{e}^{-m}}{t_1\cdot t_2\cdot t_3}>n(\ln n+1)$.