海淀区高三年级第二学期期末练习

数　　学（文科）

2019. 5

本试卷共4页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题　共40分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

（1）已知集合 $A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x\mid 3\leqslant x\leqslant 6\}$，则 $A\cap B=$

（A）$[1,3]$　　（B）$[3,5]$

（C）$[5,6]$　　（D）$[1,6]$

（2）复数 $z=a+\mathrm{i}$（$a\in\mathbf{R}$）的实部是虚部的 2 倍，则 a 的值为

（A）$-\frac{1}{2}$　　（B）$\frac{1}{2}$

（C）-2　　（D）2

（3）已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3}=1$（$a>0$）的右顶点和抛物线 $y^2=8x$ 的焦点重合，则 a 的值为

（A）1　　（B）2

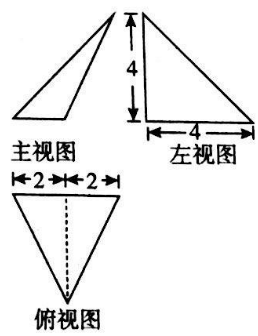
（C）3　　（D）4

（4）若关于 x 的方程 $x+\frac{1}{x}=a$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解，则 a 的取值范围是

（A）$(0,+\infty)$　　（B）$[1,+\infty)$

（C）$[2,+\infty)$　　（D）$[3,+\infty)$

（5）某三棱锥的三视图如右图所示，则该三棱锥的所有棱长构成的集合为



（A）$\{2,4,2\sqrt{3},6\}$

（B）$\{2,4,2\sqrt{5},4\sqrt{3},6\}$

（C）$\{2,4,2\sqrt{5},4\sqrt{2},6\}$

（D）$\{2,4,2\sqrt{5},4\sqrt{3}\}$

(6) 把函数 $y=2^x$ 的图象向左平移 t 个单位长度，得到的图象对应函数的解析式为 $y=3\cdot 2^x$，则 t 的值为

(A) $\log_3 2$　　(B) $\log_2 3$

(C) $\sqrt{2}$　　(D) $\sqrt{3}$

(7) 已知函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$，则“函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(\frac{\pi}{4},1)$”是“函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(\frac{\pi}{2},0)$”的

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

(8) 记 $x^2+y^2\leqslant 1$ 表示的平面区域为 W，点 O 为原点，点 P 为直线 $y=2x-2$ 上的一个动点．若区域 W 上存在点 Q，使得 $|OQ|=|PQ|$，则 $|OP|$ 的最大值为

(A) 1　　(B) $\sqrt{2}$

(C) $\sqrt{3}$　　(D) 2

第二部分（非选择题　共110分）

二、　填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

(9) 已知直线 $l_1: x+y+1=0$ 与 $l_2: x+ay+3=0$ 平行，则 $a=$______，l_1 与 l_2 之间的距离为______．

(10) 函数 $f(x)=(x+t)(x-t^2)$ 是偶函数，则 $t=$______．

(11) 已知 $a=\frac{1}{2}$，$b=\log_4 3$，$c=\sin\frac{\pi}{8}$，则这三个数中最大的是______．

(12) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}$，且 $a_5=15$，则 $a_8=$______．

(13) 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=1$，点 E 为 BC 的中点，点 F 在线段 DC 上．若 $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AP}$，且点 P 在直线 AC 上，则 $|\overrightarrow{AF}|=$______．

(14) 已知集合 $A_0=\{x\mid 0<x<1\}$．给定一个函数 $y=f(x)$，定义集合 $A_n=\{y\mid y=f(x),\ x\in A_{n-1}\}$，若 $A_n\cap A_{n-1}=\varnothing$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立，则称该函数 $y=f(x)$ 具有性质“$\wp$”．

(Ⅰ) 具有性质“$\wp$”的一个一次函数的解析式可以是______；

(Ⅱ) 给出下列函数：① $y=\frac{1}{x}$；② $y=2^x$；③ $y=\sin(\frac{\pi}{2}x)+1$，其中具有性质“$\wp$”的函数的序号是______．（写出所有正确答案的序号）

三、 解答题共6小题，共80分．解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程．

（15）（本小题满分13分）

在△ ABC 中，$a=7$，$b=8$，$A=\frac{\pi}{3}$．

（Ⅰ）求 $\sin B$ 的值；

（Ⅱ）若△ ABC 是锐角三角形，求△ ABC 的面积．

（16）（本小题满分13分）

已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，且 $a_{n+1}-a_n=2\cdot 3^n$．

（Ⅰ）求公比 q 和 a_3 的值；

（Ⅱ）若 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，求证：-3，S_n，a_{n+1} 成等差数列．

（17）（本小题满分14分）

如图1所示，在等腰梯形 $ABCD$ 中，$BC \parallel AD$，$CE \perp AD$，垂足为 E，$AD=3BC=3$，$EC=1$．将△ DEC 沿 EC 折起到△ D_1EC 的位置，使平面 $D_1EC \perp$ 平面 $ABCE$，如图2所示，点 G 是 AD_1 的中点．

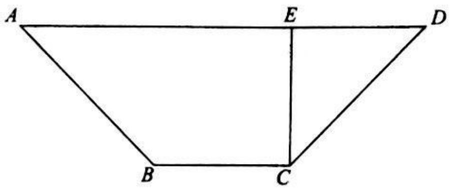


图1

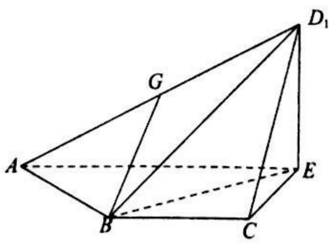


图2

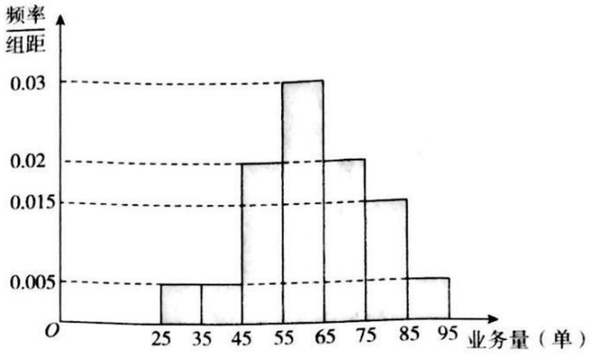
（Ⅰ）求证：$BG \parallel$ 平面 D_1EC；

（Ⅱ）求证：$AB \perp$ 平面 D_1EB；

（Ⅲ）求三棱锥 D_1-GEC 的体积．

(18)(本小题满分 13 分)

某快餐连锁店招聘外卖骑手．该快餐连锁店提供了两种日工资方案：方案（1）规定每日底薪 50 元，快递业务每完成一单提成 3 元；方案（2）规定每日底薪 100 元，快递业务的前 44 单没有提成，从第 45 单开始，每完成一单提成 5 元．该快餐连锁店记录了每天骑手的人均业务量．现随机抽取 100 天的数据，将样本数据分为 $[25,35)$, $[35,45)$, $[45,55)$, $[55,65)$, $[65,75)$, $[75,85)$, $[85,95]$ 七组，整理得到如图所示的频率分布直方图．



（Ⅰ）随机选取一天，估计这一天该连锁店的骑手的人均日快递业务量不少于 65 单的概率；

（Ⅱ）若骑手甲、乙选择了日工资方案（1），丙、丁选择了日工资方案（2）．现从上述 4 名骑手中随机选取 2 人，求至少有 1 名骑手选择方案（1）的概率；

（Ⅲ）若仅从人均日收入的角度考虑，请你利用所学的统计学知识为新聘骑手做出日工资方案的选择，并说明理由．（同组中的每个数据用该组区间的中点值代替）

(19)(本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x)=e^x(ax^2+x+1)$．

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-2,f(-2))$ 处的切线的倾斜角；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 的极大值大于 1，求 a 的取值范围．

(20)(本小题满分 13 分)

已知椭圆 C: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左顶点 A 与上顶点 B 的距离为 $\sqrt{6}$．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程和焦点的坐标；

（Ⅱ）若点 P 在椭圆 C 上，线段 AP 的垂直平分线分别与线段 AP，x 轴，y 轴交于不同的三点 M，H，Q．

（i）求证：点 M，Q 关于点 H 对称；

（ii）若 $\triangle APQ$ 为直角三角形，求点 P 的横坐标．

海淀区高三年级第二学期期末练习参考答案

数　学（文科）　　2019.05

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

（1）B	（2）D	（3）B	（4）C
（5）C	（6）B	（7）A	（8）D

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（9）$1, \sqrt{2}$　　（10）$0, 1$

（11）b　　（12）24

（13）$\sqrt{2}$　　（14）$y=x+1$ （答案不唯一），① ②

三、解答题（共 6 小题，共 80 分）

（15）（共 13 分）

解：（Ⅰ）在$\triangle ABC$中，因为$a=7$，$b=8$，$A=\dfrac{\pi}{3}$，

所以由正弦定理$\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin A}{a}$

得$\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{8}{7}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

（Ⅱ）**方法 1：**

因为$a=7$，$b=8$，所以$B>A=\dfrac{\pi}{3}$，所以$C<\pi-\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$，

即C一定为锐角，所以B为$\triangle ABC$中的最大角

所以$\triangle ABC$为锐角三角形当且仅当B为锐角

因为$\sin B=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$，所以$\cos B=\dfrac{1}{7}$

因为$\sin C=\sin(A+B)$

$$=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$=\frac{5\sqrt{3}}{14}$$

所以$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times7\times8\times\dfrac{5\sqrt{3}}{14}=10\sqrt{3}$

方法 2：

由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

得 $49=64+c^2-2\times8\times c\times\frac{1}{2}$

即 $c^2-8c+15=0$

解得 $c=5$ 或 $c=3$

当 $c=3$ 时，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}<0$，与 $\triangle ABC$ 为锐角三角形矛盾，舍去

当 $c=5$ 时，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}>0$，所以 B 为锐角，

因为 $b>a>c$，所以 B 为最大角，所以 $\triangle ABC$ 为锐角三角形

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times8\times5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$.

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $10\sqrt{3}$

（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ）方法 1：

由题设得 $\begin{cases}a_2-a_1=6\\a_3-a_2=18\end{cases}$

因为 $\{a_n\}$ 为等比数列，

所以 $\begin{cases}a_2-a_1=6\\a_2q-a_1q=18\end{cases}$

所以 $q=3$

又因为 $a_2-a_1=a_1q-a_1=6$

所以 $a_1=3$

所以 $a_n=3^n$

经检验，此时 $a_{n+1}-a_n=3^{n+1}-3^n=2\cdot3^n$ 成立，且 $\{a_n\}$ 为等比数列

所以 $a_3=3^3=27$

方法 2：

因为 $a_n-a_{n-1}=2\cdot3^{n-1}(n\geq2)$

$a_{n-1}-a_{n-2}=2\cdot3^{n-2}$

$a_{n-2}-a_{n-3}=2\cdot3^{n-3}$

$\cdots$

$a_3 - a_2 = 2 \cdot 3^2$

$a_2 - a_1 = 2 \cdot 3^1$

把上面 $n-1$ 个等式叠加，得到

$a_n - a_1 = 2 \cdot \left(3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1}\right) = 3^n - 3$

所以 $a_n = a_1 - 3 + 3^n (n \geq 2)$

而 $a_1 = a_1 - 3 + 3^1$ 也符合上式

所以 $a_n = a_1 - 3 + 3^n (n \in \mathbf{N}^*)$

因为数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，设公比为 q

所以对于 $\forall n \in \mathbf{N}^*$，有 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{a_1 - 3 + 3^{n+1}}{a_1 - 3 + 3^n} = q$ 恒成立

所以 $a_1 - 3 + 3^{n+1} - q(a_1 - 3 + 3^n) = 0$

即 $3^n(3-q) + (a_1 - 3)(1-q) = 0$

所以 $q = 3$，$(a_1 - 3)(1-q) = 0$

而显然 $q = 1$ 不成立，所以 $a_1 = 3$

所以 $a_n = 3^n$

所以 $a_3 = 3^3 = 27$

方法 3：

由题设得：$\begin{cases} a_n - a_{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} \\ a_{n+1} - a_n = 2 \cdot 3^n \end{cases}$，其中 $n \geq 2$

因为 $\{a_n\}$ 为等比数列，

所以 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$ 对于 $\forall n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立

所以 $\begin{cases} a_n - a_{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} \\ a_n q - a_{n-1} q = 2 \cdot 3^n \end{cases}$

所以 $q=3$

又因为 $a_2-a_1=a_1q-a_1=6$

所以 $a_1=3$

所以 $a_3=a_1q^2=27$

方法 4：

因为 $\{a_n\}$ 为等比数列，

所以，对于 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，有 $a_{n+1}^2=a_na_{n+2}$ 恒成立

由 $a_{n+1}-a_n=2\cdot 3^n$ ，

得 $a_{n+1}=a_n+2\cdot 3^n$， $a_{n+2}=a_{n+1}+2\cdot 3^{n+1}=a_n+8\cdot 3^n$

所以 $\left(a_n+2\cdot 3^n\right)^2=a_n\left(a_n+8\cdot 3^n\right)$

所以 $a_n=3^n$

所以 $q=3$， $a_3=27$

（II）因为 $a_n=a_1q^{n-1}=3^n$

所以 $a_{n+1}=a_1q^n=3^{n+1}$

$$S_n=\frac{3(1-3^{n)}}{1-3}=\frac{3^{n+1}-3}{2}$$

因为 $S_n-(-3)=\dfrac{3^{n+1}-3}{2}+3=\dfrac{3^{n+1}+3}{2}$

$$a_{n+1}-S_n=3^{n+1}-\frac{3^{n+1}-3}{2}=\frac{3^{n+1}+3}{2}$$

所以 $S_n-(-3)=a_{n+1}-S_n$

所以 $-3,S_n,a_{n+1}$ 成等差数列

（17）（共 14 分）

解：（Ⅰ）**方法 1：**

在图 1 的等腰梯形 $ABCD$ 内，过 B 作 AE 的垂线，垂足为 F，

因为 $CE\perp AD$，所以 BF // EC

又因为 BC // AD ， $BC=CE=1$， AD=3

所以四边形 $BCEF$ 为正方形，

且 $AF=FE=ED=1$， F 为 AE 中点

在图 2 中，连结 GF

因为点 G 是 AD_1 的中点，

所以 GF // D_1E

又因为 BF // EC， $GF\cap BF=F$，

GF，$BF\subset$ 平面 BFG ， $D_1E,EC\subset$ 平面 D_1EC，

所以平面 BFG // 平面 CED_1

又因为 $BG\subset$ 面GFB ，所以 BG // 平面 D_1EC

方法 2：

在图 1 的等腰梯形 $ABCD$ 内，过 B 作 AE 的垂线，垂足为 F

因为 $CE\perp AD$，所以 BF // EC

又因为 BC // AD ， $BC=CE=1$， AD=3

所以四边形 $BCEF$ 为正方形， F 为 AE 中点

在图 2 中，连结 GF

因为点 G 是 AD_1 的中点，

所以 GF // D_1E

又 $D_1E\subset$ 平面 D_1EC ， $GF\not\subset$ 平面 D_1EC

所以 GF // 平面 D_1EC

又因为 BF // EC， $EC\subset$ 平面 D_1EC ， $BF\not\subset$ 平面 D_1EC

所以 BF // 平面 D_1EC

又因为 $GF\cap BF=F$

所以平面 BFG // 平面 D_1EC

又因为 $BG\subset$ 面GFB ，所以 BG // 平面 D_1EC

方法 3：

在图 1 的等腰梯形 $ABCD$ 内，过 B 作 AE 的垂线，垂足为 F，

因为 $CE\perp AD$，所以 BF // EC

又因为 $BC // AD$ ， $BC=CE=1$， $AD=3$

所以四边形 $BCEF$ 为正方形， $AF=FE=ED=1$，得 $AE=2$

所以 $BC // AE$， $BC=\dfrac{1}{2}AE$

在图 2 中设点 M 为线段 D_1E 的中点，连结 MG,MC ，

因为点 G 是 AD_1 的中点，

所以 $GM // AE$， $GM=\dfrac{1}{2}AE$

所以 $GM // BC$， $GM=BC$ ，所以四边形 $MGBC$ 为平行四边形

所以 $BG // CM$

又因为 $CM \subset$ 平面 D_1EC ， $BG \not\subset$ 平面 D_1EC

所以 $BG //$ 平面 D_1EC

（Ⅱ） 因为平面 $D_1EC \perp$ 平面 $ABCE$ ，

平面 $D_1EC \cap$ 平面 $ABCE=EC$,

$D_1E \perp EC$, $D_1E \subset$ 平面 D_1EC ，

所以 $D_1E \perp$ 平面 $ABCE$

又因为 $AB \subset$ 平面 $ABCE$

所以 $D_1E \perp AB$

又 $AB=\sqrt{2}, BE=\sqrt{2}, AE=2$，满足 $AE^2=AB^2+BE^2$ ，

所以 $BE \perp AB$

又 $BE \cap D_1E=E$

所以 $AB \perp$ 平面 D_1EB

（Ⅲ） $CE \perp D_1E, CE \perp AE$， $AE \cap D_1E=E$

所以 $CE \perp$ 面D_1AE

线段 CE 为三棱锥 $C-D_1AE$ 底面 D_1AE 的高

所以 $V_{D_1-GEC}=\dfrac{1}{2}V_{C-D_1AE}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\cdot 1=\dfrac{1}{6}$

18. （共 13 分）搜索北京高考在线网，获取更多试题及答案

解：（Ⅰ）设事件 A 为“随机选取一天，这一天该连锁店的骑手的人均日快递业务量不少于 65 单”

依题意，连锁店的人均日快递业务量不少于 65 单的频率分别为：

$0.2, 0.15, 0.05$

因为 $0.2+0.15+0.05=0.4$

所以 $P(A)$ 估计为 0.4.

（Ⅱ）设事件 B 为"从四名骑手中随机选取 2 人，至少有 1 名骑手选择方案（1）"

从四名新聘骑手中随机选取 2 名骑手，有 6 种情况，即

{甲，乙}，{甲，丙}，{甲，丁}，{乙，丙}，{乙，丁}，{丙，丁}

其中至少有 1 名骑手选择方案（1）的情况为

{甲，乙}，{甲，丙},，{甲，丁}，{乙，丙}，{乙，丁}

所以 $P(B)=\frac{5}{6}$

（Ⅲ）**方法 1：**

快餐店人均日快递量的平均数是：

$30\times0.05+40\times0.05+50\times0.2+60\times0.3+70\times0.2+80\times0.15+90\times0.05=62$

因此，方案（1）日工资约为 $50+62\times3=236$

方案 2 日工资约为 $100+\left(62-44\right)\times5=190<\ 236$

故骑手应选择方案（1）

方法 2：

设骑手每日完成快递业务量为 n 件

方案（1）的日工资 $y_1=50+3n(n\in\mathbf{N}^*)$，

方案（2）的日工资 $y_2=\begin{cases}100, n\le44, n\in\mathbf{N}^*\\100+5(n-44), n>44, n\in\mathbf{N}^*\end{cases}$

当 $n<17$ 时，$y_1<y_2$

依题意，可以知道 $n\ge25$，所以这种情况不予考虑

当 $n\ge25$ 时

令 $50+3n>100+5\left(n-44\right)$

则 $n<85$

即若骑手每日完成快递业务量在 85 件以下，则方案（1）日工资大于方案（2）日工资，而依题中数据，每日完成快递业务量超过 85 件的频率是 0.05，较

低，

故建议骑手应选择方案（1）

方法 3：

设骑手每日完成快递业务量为 n 单，

方案（1）的日工资 $y_1 = 50 + 3n (n \in \mathbf{N}^*)$ ，

方案（2）的日工资 $y_2 = \begin{cases} 100, n \le 44, n \in \mathbf{N}^* \\ 100 + 5(n-44), n > 44, n \in \mathbf{N}^* \end{cases}$

所以方案（1）日工资约为

$140 \times 0.05 + 170 \times 0.05 + 200 \times 0.2 + 230 \times 0.3 + 260 \times 0.2 + 290 \times 0.15 + 320 \times 0.05$

$= 236$

方案（2）日工资约为

$100 \times 0.05 + 100 \times 0.05 + 130 \times 0.2 + 180 \times 0.3 + 230 \times 0.2 + 280 \times 0.15 + 330 \times 0.05$

$= 194.5$

因为 $236 > 194.5$，所以建议骑手选择方案（1）.

19.（共 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x) = \mathrm{e}^x (ax^2 + x + 1)$，

所以 $f'(x) = \mathrm{e}^x (x+2)(ax+1)$

所以 $f'(-2) = 0$，

所以切线的倾斜角为 0

（Ⅱ）因为 $f'(x) = \mathrm{e}^x (x+2)(ax+1)$

当 $a = 0$ 时，令 $f'(x) = 0$，得 $x_1 = -2$

当 x 变化时，$f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

由上表函数 $f(x)$ 只有极小值，没有极大值，不合题意，舍去

当 $a \ne 0$ 时，令 $f'(x) = 0$，得 $x_1 = -2, x_2 = -\dfrac{1}{a}$

当 $a<0$ 时，

当 x 变化时，$f'(x),f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-\frac{1}{a})$	$-\frac{1}{a}$	$(-\frac{1}{a},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

由上表函数 $f(x)$ 的极大值 $f(-\frac{1}{a})=e^{-\frac{1}{a}}>e^0=1$，满足题意

当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)=\frac{1}{2}e^x(x+2)^2\geq 0$，

所以函数 $f(x)$ 单调递增，没有极大值，舍去

当 $a>\frac{1}{2}$ 时，当 x 变化时，$f'(x),f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-\frac{1}{a})$	$-\frac{1}{a}$	$(-\frac{1}{a},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

由上表函数 $f(x)$ 的极大值 $f(-2)=e^{-2}(4a-1)>1$，

解得 $a>\frac{e^2+1}{4}$

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，当 x 变化时，$f'(x),f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-\frac{1}{a})$	$-\frac{1}{a}$	$(-\frac{1}{a},-2)$	-2	$(-2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

由上表函数 $f(x)$ 的极大值 $f(-\frac{1}{a})=e^{-\frac{1}{a}}<1$，不合题意

综上，a 的取值范围是 $(-\infty,0)\cup(\frac{e^2+1}{4},+\infty)$

20. （共 13 分）北京高考在线网

解：（Ⅰ）依题意，有 $\sqrt{4+b^2}=\sqrt{6}$

所以 $b=\sqrt{2}$

椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$

焦点坐标分别为 $F_1(-\sqrt{2},0),F_2(\sqrt{2},0)$,

（Ⅱ）(i)**方法 1：**

设 $P(x_0,y_0)$，则 $\dfrac{{x_0}^2}{4}+\dfrac{{y_0}^2}{2}=1$

依题意 $x_0\neq\pm2, y_0\neq0$， $A(-2,0)$,

所以 $M(\dfrac{x_0-2}{2},\dfrac{y_0}{2})$

所以直线 PA 的斜率 $k_{Ap}=\dfrac{y_0}{x_0+2}$

因为 $PA\perp MQ$，所以 $k_{PA}\cdot k_{MQ}=-1$

所以直线 MQ 的斜率 $k_{MQ}=-\dfrac{x_0+2}{y_0}$

所以直线 MQ 的方程为 $y-\dfrac{y_0}{2}=-\dfrac{x_0+2}{y_0}(x-\dfrac{x_0-2}{2})$

令 $x=0$，得到 $y_Q=\dfrac{y_0}{2}+\dfrac{(x_0+2)(x_0-2)}{2y_0}$

因为 $\dfrac{{x_0}^2}{4}+\dfrac{{y_0}^2}{2}=1$

所以 $y_Q=-\dfrac{y_0}{2}$ ， 所以 $Q(0,-\dfrac{y_0}{2})$

所以 H 是 M,Q 的中点，所以点 M,Q 关于点 H 对称

方法 2：

设 $P(x_0,y_0)$，直线 AP 的方程为 $y=k(x+2)$

联立方程 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ y=k(x+2)\end{cases}$

消元得 $(1+2k^2)x^2+8k^2x+8k^2-4=0$

所以 $\Delta=16>0$

所以 $x_0+(-2)=\dfrac{-8k^2}{1+2k^2}$

所以 $x_0=\dfrac{-4k^2+2}{1+2k^2}$

所以 $x_M=\dfrac{-4k^2}{1+2k^2}$， $y_M=k(\dfrac{-4k^2}{1+2k^2}+2)=\dfrac{2k}{1+2k^2}$

所以 $M(\dfrac{-4k^2}{1+2k^2},\dfrac{2k}{1+2k^2})$

因为 $AP\perp MQ$，所以 $K_{MQ}=-\dfrac{1}{k}$

所以直线 MQ 的方程为 $y-\dfrac{2k}{1+2k^2}=-\dfrac{1}{k}(x-\dfrac{-4k^2}{1+2k^2})$

令 $x=0$，得到 $y_Q=\dfrac{2k}{1+2k^2}-\dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{4k^2}{1+2k^2}=\dfrac{-2k}{1+2k^2}$

所以 $Q(0,\dfrac{-2k}{1+2k^2})$

所以 H 是 M,Q 的中点，所以点 M,Q 关于点 H 对称

方法 3：

设 $P(x_0,y_0)$，直线 AP 的方程为 $x=ty-2$

联立方程 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ x=ty-2\end{cases}$

消元得，$(t^2+2)y^2-4ty=0$

因为 $0+y_0=\dfrac{4t}{t^2+2}$，所以 $y_0=\dfrac{4t}{t^2+2}$

所以 $y_M=\dfrac{2t}{t^2+2}$ $x_M=\dfrac{-4}{t^2+2}$，

所以 $M(\dfrac{-4}{t^2+2},\dfrac{2t}{t^2+2})$

因为 $AP\perp MQ$，所以 $K_{MQ}=-\dfrac{1}{k}$

所以直线 MQ 的方程为 $y-\dfrac{2t}{t^2+2}=-t(x-\dfrac{-4}{t^2+2})$

令 $x=0$，得到 $y_Q=\dfrac{-2t}{t^2+2}$ ，所以 $Q(0,\dfrac{-2t}{t^2+2})$

所以 H 是 M,Q 的中点，所以点 M,Q 关于点 H 对称

（ii）**方法 1**：

因为$\triangle APQ$为直角三角形， 且$|PQ|=|AQ|$，所以$\triangle APQ$为等腰直角三角形

所以$|AP|=\sqrt{2}|AQ|$

因为$P(x_0,y_0)$， $Q(0,-\frac{y_0}{2})$

即$\sqrt{(x_0+2)^2+y_0{}^2}=\sqrt{2}\sqrt{2^2+\frac{y_0{}^2}{4}}$

化简，得到$3x_0{}^2+16x_0-12=0$，解得$x_0=\frac{2}{3},x_0=-6$（舍）

即点P的横坐标为$\frac{2}{3}$

方法 2：

因为$\triangle APQ$为直角三角形， 且$|PQ|=|AQ|$，所以$\angle AQP=90°$，

所以$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$

因为$P(x_0,y_0)$， $Q(0,-\frac{y_0}{2})$，

所以$\overrightarrow{AQ}=(2,-\frac{y_0}{2})$， $\overrightarrow{PQ}=(-x_0,-\frac{3y_0}{2})$

所以$(2,-\frac{y_0}{2})\cdot(-x_0,-\frac{3y_0}{2})=0$

即$-2x_0+\frac{3y_0^2}{4}=0$

因为$\frac{x_0{}^2}{4}+\frac{y_0{}^2}{2}=1$

化简，得到$3x_0{}^2+16x_0-12=0$，解得$x_0=\frac{2}{3},x_0=-6$（舍）

即点P的横坐标为$\frac{2}{3}$

方法 3：

因为$\triangle APQ$为直角三角形，且$|PQ|=|AQ|$，所以$\angle AQP=90°$

所以$|AP|=2|MQ|$

因为$P(x_0,y_0)$， $Q(0,-\frac{y_0}{2})$， $M(\frac{x_0-2}{2},\frac{y_0}{2})$

所以$\sqrt{(x_0+2)^2+y_0^2}=2\sqrt{(\frac{x_0-2}{2})^2+y_0^2}$

化简得到 $8x_0-3y_0^2=0$

因为 $\dfrac{{x_0}^2}{4}+\dfrac{{y_0}^2}{2}=1$

化简，得到 $3{x_0}^2+16x_0-12=0$，解得 $x_0=\dfrac{2}{3},x_0=-6$（舍）

即点 P 的横坐标为 $\dfrac{2}{3}$

方法 4：

因为 $\triangle APQ$ 为直角三角形，所以 $\angle AQP=90^\circ$

所以点 A,P,Q 都在以 AP 为直径的圆上，

因为 $P(x_0,y_0)$，$Q(0,-\dfrac{y_0}{2})$，$A(-2,0)$

所以有 $(x-\dfrac{-2+x_0}{2})^2+(y-\dfrac{y_0}{2})^2=(\dfrac{1}{2}\sqrt{(x_0+2)^2+{y_0}^2})^2$

所以 $-2x_0+\dfrac{3y_0^2}{4}=0$

因为 $\dfrac{{x_0}^2}{4}+\dfrac{{y_0}^2}{2}=1$

化简，得到 $3{x_0}^2+16x_0-12=0$，解得 $x_0=\dfrac{2}{3},x_0=-6$（舍）

即点 P 的横坐标为 $\dfrac{2}{3}$