

2021~2022 学年度第二学期期末学业水平诊断

高二数学

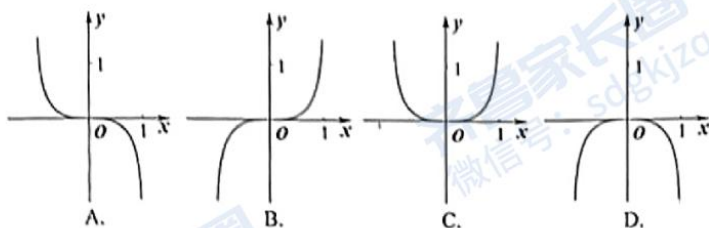
注意事项:

1. 本试题满分 150 分, 考试时间为 120 分钟.
2. 答卷前, 务必将姓名和准考证号填涂在答题纸上.
3. 使用答题纸时, 必须使用 0.5 毫米的黑色签字笔书写, 要字迹工整, 笔迹清晰; 超出答题区书写的答案无效; 在草稿纸、试题卷上答题无效.

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求.

1. 已知集合 $A = \{x | x = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x | x^2 > 9\}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) =$
A. $\{0\}$ B. $\{-3, 0, 3\}$ C. $\{-3, 3\}$ D. $\{x | -3 \leq x \leq 3\}$
2. 命题 “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$ ” 的否定为
A. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$ B. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 < 0$
C. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 \leq 0$ D. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 \leq 0$
3. 已知 $p: x \in \{x | y = \sqrt{2^x - 1}\}$, $q: x \in \{y | y = x^{\frac{2}{3}}\}$, 则 p 是 q 的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 中国跳水队是中国体育奥运冠军团队. 自 1984 年以来, 中国跳水队已经累计为我国赢得了 40 枚奥运金牌. 在一次高台跳水比赛中, 若某运动员在跳水过程中其重心相对于水面的高度 h (单位: 米) 与起跳后的时间 t (单位: 秒) 存在函数关系 $h(t) = 10 - 5t^2 + 5t$, 则该运动员在起跳后 1 秒时的瞬时速度为
A. 10 米/秒 B. -10 米/秒 C. 5 米/秒 D. -5 米/秒
5. 已知曲线 $y = e^x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线与曲线 $y = ax^2 + 3x + 3 (a \neq 0)$ 只有一个公共点, 则实数 a 的值为
A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. $-\frac{1}{2}$
6. 函数 $f(x) = \ln(1-x^2) \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ 的图象大致为

高二数学试题 (第 1 页, 共 4 页)



7. 设 $a = 0.9$, $b = \sqrt{0.9}$, $c = \ln(\frac{9}{10}c)$, 则 a, b, c 的大小关系为

- A. $b > c > a$ B. $b > a > c$ C. $c > b > a$ D. $c > a > b$

8. 若函数 $f(x) = x^3 - \frac{3a}{2}x^2 + 4$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最小值为 0, 则实数 a 的值为

- A. -2 B. -1 C. 2 D. $\frac{10}{3}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-3, 3]$ 上的奇函数, 且 $f(1) < f(2)$, 则下列各式一定成立的是

- A. $f(0) = 0$ B. $f(0) < f(2)$ C. $f(-1) > f(-2)$ D. $f(1) < f(3)$

10. 关于函数 $f(x) = \ln(e^{2x} + 1) - x$, 下列说法正确的有

- A. $f(x)$ 为奇函数
B. $f(x)$ 为偶函数
C. $f(x)$ 的最小值为 $\ln 2$
D. 对 $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 都有 $f(\frac{x_1 + x_2}{2}) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$

11. 设 l_1, l_2 为曲线 $f(x) = |\ln x|$ 的两条切线, 切点分别为 A, B , 若 $l_1 \perp l_2$, 且垂足为 P ,

则下列说法正确的有

- A. A, B 两点的横坐标之和为定值 B. A, B 两点的横坐标之积为定值
C. 直线 AB 的斜率为定值 D. P 点横坐标的取值范围为 $(0, 1)$

12. 若函数 $f(2x+2)$ 为偶函数, $f(x+1)$ 为奇函数, 且当 $x \in (0,1]$ 时, $f(x) = \ln x$, 则

A. $f(x)$ 为偶函数

B. $f(e) = 1$

C. $f(4 - \frac{1}{e}) = -1$

D. 当 $x \in [1,2)$ 时, $f(x) = -\ln(2-x)$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & x \geq 0 \\ -\frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$, 若 $f(2x-1) = 3$, 则 x 的值为

14. 设函数 $f(x)$ 满足: 对任意实数 x 都有 $f(x) = f(-1)x^2 + f(1)x - 1$, 若 $f(x) \geq a$ 在 $[0,2]$ 上恒成立, 则实数 a 的取值范围为

15. 已知 m 为方程 $x^2 + \lg x - 2 = 0$ 的实数根, n 为方程 $2x - \lg(2-x) = 0$ 的实数根, 则 $m^2 + n$ 的值为

16. 若一圆锥的母线长为 2, 则此圆锥体积的最大值为

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 设集合 $A = \{x | \log_2(x+2) \leq 2\}$, $B = \{x | m-1 < x < m+1\}$.

(1) 若 $x \in A$ 是 $x \in B$ 的必要条件, 求实数 m 的取值范围;

(2) 若命题 “ $\exists x \in B, x \in \complement_{\mathbb{R}} A$ ” 为真命题, 求实数 m 的取值范围.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = x^3 - x^2 + 1$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 讨论方程 $f(x) = a (a \in \mathbb{R})$ 的解的个数.

19. (12 分) 已知 $f(x) = 2^x + a \cdot 2^{-x}$ 是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的奇函数.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 若关于 x 的不等式 $f^2(x) > kf(2x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有解, 求实数 k 的取值范围.

高二数学试题 (第 3 页, 共 4 页)

20. (12分) 已知函数 $f(x) = mxe^x - \ln x - 1$.

(1) 当 $m=1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

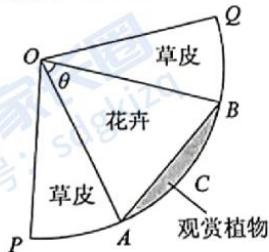
(2) 若 $f(x) \geq x$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

21. (12分) 如图所示, 某小区有一个半径为 40 米、圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的扇形花圃 OPQ , 点 A, B

在弧 PQ 上, 且 $\widehat{PA} = \widehat{QB}$. 小区物业计划在弓形 ACB 区域 (阴影部分) 种植观赏植物, $\triangle AOB$ 区域种植花卉, 其余区域种植草皮. 已知种植观赏植物的成本是每平方米 80 元, 种植花卉的成本是每平方米 40 元, 种植草皮的成本是每平方米 60 元. 记 $\angle AOB = \theta$, $0 < \theta < \frac{2\pi}{3}$.

(1) 用 θ 表示弓形 ACB 的面积;

(2) 求种植总费用的最小值及相应 θ 的值.



22. (12分) 已知函数 $f(x) = ax^2 - \ln x + 1 (a \in \mathbb{R})$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 极值点的个数;

(2) 若函数 $f(x)$ 在定义域内有两个不同的零点 x_1, x_2 ,

①求 a 的取值范围; ②证明: $x_1 + x_2 > \frac{\sqrt{2a}}{a}$.

2021~2022 学年度第二学期期末学业水平诊断

高二数学参考答案

一、选择题

B C B D A A B C

二、选择题

9. AC 10. BC 11. BCD 12. ACD

三、填空题

13. $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{3}{2}$ 14. $a \leq -\frac{5}{4}$ 15. 2 16. $\frac{16\sqrt{3}}{27}\pi$

四、解答题

17. 解: (1) 由 $\log_2(x+2) \leq 2$ 得, $0 < x+2 \leq 4$, 即 $-2 < x \leq 2$,
所以 $A = \{x | -2 < x \leq 2\}$, 2 分
因为 $x \in A$ 是 $x \in B$ 的必要条件, 所以 $B \subseteq A$, 4 分
所以 $\begin{cases} m-1 \geq -2 \\ m+1 \leq 2 \end{cases}$, 则 $-1 \leq m \leq 1$,
综上, m 的取值范围 $-1 \leq m \leq 1$ 6 分
(2) 由题意知, $B \cap \complement_U A \neq \emptyset$, 7 分
因为 $\complement_U A = \{x | x \leq -2 \text{ 或 } x > 2\}$, 8 分
所以 $m-1 < -2$ 或者 $m+1 > 2$, 故 $m < -1$ 或 $m > 1$ 10 分
18. 解: (1) $f'(x) = 3x^2 - 2x = 3x(x - \frac{2}{3})$, 1 分
令 $f'(x) = 0$ 得, $x = 0$ 或 $x = \frac{2}{3}$, 2 分
 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,
 $x \in (0, \frac{2}{3})$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

高二数学答案 (第 1 页, 共 6 页)

- $x \in (\frac{2}{3}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增. 5 分
- 所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 0), (\frac{2}{3}, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, \frac{2}{3})$ 6 分
- (2) 由 (1) 知, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 0), (\frac{2}{3}, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, \frac{2}{3})$,
- 当 $x = 0$ 时, $f(x)$ 有极大值 $f(0) = 1$; 7 分
- 当 $x = \frac{2}{3}$ 时, $f(x)$ 有极小值 $f(\frac{2}{3}) = \frac{23}{27}$, 8 分
- 当 $x \rightarrow -\infty, f(x) \rightarrow -\infty$; 当 $x \rightarrow +\infty, f(x) \rightarrow +\infty$ 9 分
- 所以当 $a < \frac{23}{27}$ 或 $a > 1$, $f(x) = a$ 的解有 1 个; 10 分
- 当 $a = \frac{23}{27}$ 或 $a = 1$, $f(x) = a$ 的解有 2 个; 11 分
- 当 $\frac{23}{27} < a < 1$, $f(x) = a$ 的解有 3 个. 12 分

19. 解: (1) 因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(-x) = -f(x)$,
- 即 $2^{-x} + a \cdot 2^x = -(2^x + a \cdot 2^{-x})$, 2 分

整理得 $(a+1)(2^x + 2^{-x}) = 0$.

因为上式对 $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 恒成立, 所以 $a = -1$ 4 分

- (2) 因为 $x > 0$, 所以 $f(2x) = 2^{2x} - 2^{-2x} > 0$,

所以 $k < \frac{f^2(x)}{f(2x)} = \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$, 6 分

令 $g(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}} = \frac{4^x - 1}{4^x + 1} = 1 - \frac{2}{4^x + 1}, x \in (0, +\infty)$, 8 分

因为 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow 1$, 10 分

所以要使 $k < g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有解, 只需要 $k < 1$ 12 分

高二数学答案 (第 2 页, 共 6 页)

20. 解: (1) 当 $m=1$ 时, $f(x) = xe^x - \ln x - 1$, $f(1) = e - 1$

$$f'(x) = (x+1)e^x - \frac{1}{x}, \quad f'(1) = 2e - 1. \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

所以曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - (e - 1) = (2e - 1)(x - 1)$,

$$\text{即 } (2e - 1)x - y - e = 0. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 由已知得, $mxe^x - \ln x - 1 \geq x$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

$$\text{即 } m \geq \frac{\ln x + x + 1}{xe^x} \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上恒成立.} \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{令 } h(x) = \frac{\ln x + x + 1}{xe^x}, \quad x \in (0, +\infty),$$

$$\text{则 } h'(x) = -\frac{(x+1)(x+\ln x)}{x^2 e^x}, \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{令 } u(x) = x + \ln x, \text{ 则 } u'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0,$$

所以 $u(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{又因为 } u\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - 1 < 0, \quad u(1) = 1 > 0,$$

$$\text{所以 } \exists x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right), \text{ 使得 } u(x_0) = x_0 + \ln x_0 = 0, \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $u(x) < 0$, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增,

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $u(x) > 0$, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,

$$\text{所以 } h(x)_{\max} = h(x_0) = \frac{\ln x_0 + x_0 + 1}{x_0 e^{x_0}}, \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{由 } x_0 + \ln x_0 = 0 \text{ 得, } e^{x_0} = \frac{1}{x_0},$$

$$\text{所以 } h(x)_{\max} = h(x_0) = \frac{\ln x_0 + x_0 + 1}{x_0 e^{x_0}} = 1,$$

故 $m \geq 1$, 即 m 的取值范围为 $[1, +\infty)$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

高二数学答案 (第 3 页, 共 6 页)

21. 解: (1) $S_{\text{扇形}AOB} = \frac{1}{2} \times 40^2 \times \theta$, 1 分

$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times 40^2 \sin \theta$, 2 分

$S_{\text{弓形}ACB} = S_{\text{扇形}AOB} - S_{\triangle AOB} = 800(\theta - \sin \theta), 0 < \theta < \frac{2\pi}{3}$ 4 分

(2) 设种植总费用为 y 元, 由题意得,

$$y = 800(\theta - \sin \theta) \times 80 + \frac{1}{2} \times 40^2 \sin \theta \times 40 + \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{3} - \theta \right) \times 40^2 \times 60$$

$$= 16000(\theta - 2 \sin \theta) + 32000\pi$$
 7 分

令 $g(\theta) = \theta - 2 \sin \theta, (0 < \theta < \frac{2\pi}{3})$,

则 $g'(\theta) = 1 - 2 \cos \theta$, 8 分

令 $g'(\theta) = 0$ 得, $\cos \theta = \frac{1}{2}, \theta = \frac{\pi}{3}$, 9 分

$\theta \in (0, \frac{\pi}{3})$ 时, $g'(\theta) < 0$, $g(\theta)$ 单调递减,

$\theta \in (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ 时, $g'(\theta) > 0$, $g(\theta)$ 单调递增,

所以当 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 时, $g(\theta)$ 取得最小值, 此时 y 取得最小值, 10 分

$y_{\min} = 16000 \left(\frac{\pi}{3} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 32000\pi = \frac{112000\pi}{3} - 16000\sqrt{3}$, 11 分

故当 θ 的值为 $\frac{\pi}{3}$ 时, 总种植费用取最小值 $\frac{112000\pi}{3} - 16000\sqrt{3}$ 元. 12 分

22. 解: (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = 2ax - \frac{1}{x} = \frac{2ax^2 - 1}{x}$, 1 分

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 无极值点; 2 分

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{\sqrt{2a}}{2a}$. $x \in (0, \frac{\sqrt{2a}}{2a})$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, \frac{\sqrt{2a}}{2a})$

高二数学答案 (第 4 页, 共 6 页)

上单调递减; $x \in (\frac{\sqrt{2a}}{2a}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(\frac{\sqrt{2a}}{2a}, +\infty)$ 上单调递增,

故 $x = \frac{\sqrt{2a}}{2a}$ 时, $f(x)$ 取得极小值. 4 分

综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 无极值点; 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 有一个极小值点. 5 分

(2) ①由题意, 方程 $ax^2 - \ln x + 1 = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 有两个不等实根,

即 $a = \frac{\ln x - 1}{x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 有两个不等实根, 6 分

设 $g(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$, 过点 $(e, 0)$,

则 $g'(x) = \frac{3 - 2 \ln x}{x^3}$, 7 分

令 $g'(x) = 0$ 得, $x = e^{\frac{3}{2}}$,

$x \in (0, e^{\frac{3}{2}})$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

$x \in (e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

且 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$; $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow 0$,

$x = e^{\frac{3}{2}}$ 时, $g(e^{\frac{3}{2}}) = \frac{1}{2e^3}$,

故实数 a 的取值范围为 $(0, \frac{1}{2e^3})$ 9 分

②不妨设 $0 < x_1 < x_2$,

由已知得, $ax_1^2 - \ln x_1 + 1 = 0$, $ax_2^2 - \ln x_2 + 1 = 0$,

两式相减得, $a = \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1^2 - x_2^2}$, 10 分

要证 $x_1 + x_2 > \frac{\sqrt{2a}}{a}$, 只需证 $(x_1 + x_2)^2 > \frac{2}{a}$, 只需证 $x_1 + x_2 > \frac{2(x_1 - x_2)}{\ln x_1 - \ln x_2}$,

高二数学答案 (第 5 页, 共 6 页)

只需证 $\ln x_1 - \ln x_2 < \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2}$, 即证 $\ln \frac{x_1}{x_2} < \frac{2(\frac{x_1}{x_2} - 1)}{\frac{x_1}{x_2} + 1}$11 分

令 $t = \frac{x_1}{x_2}$ ($0 < t < 1$), 上述不等式变形为 $(t+1)\ln t < 2(t-1)$,

令 $h(t) = (t+1)\ln t - 2(t-1)$, $0 < t < 1$,

则 $h'(t) = \ln t + \frac{1}{t} - 1$, $h''(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} = \frac{t-1}{t^2} < 0$,

所以 $h'(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减, 又 $h'(1) = 0$, 所以 $h'(t) > 0$ 恒成立,

所以 $h(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增, 又因为 $h(1) = 0$, 故 $h(t) < 0$,

即 $(t+1)\ln t < 2(t-1)$, 原不等式得证.12 分

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。



微信搜一搜

Q 齐鲁家长圈

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索