2023 年普通高等学校全国统一模拟招生考试
新未来 3 月联考·理科数学
参考答案、提示及评分细则

1.【答案】C

【解析】利用二项式定理可知 $(1+kx)^5$ 的展开式中 x^2 的系数为 $C_5^2k^2=10k^2=40$，得 $k=\pm2$，故选 C.

2.【答案】C

【解析】若集合 A 是非空集合，则一元二次方程 $x^2-2ax+1=0$ 有解，

即 $\Delta=4a^2-4\geqslant0$，所以 a 的取值集合为 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$，

集合 B 即函数 $y=\log_2(x-1)$ 的定义域 $(1,+\infty)$，

所以 a 的取值集合与集合 B 的交集是 $(1,+\infty)$，故选 C.

3.【答案】A

【解析】若 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，则 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$，

即 $(2x+1)(2-x)+12=0$，得 $x=-2$ 或 $\frac{7}{2}$，

又因为 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影是正数，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x+2>0$，

所以 $x=\frac{7}{2}$，即 $p\Rightarrow q$ 成立，但 $q\Rightarrow p$ 不成立，

所以 p 是 q 的充分不必要条件，故选 A.

4.【答案】C

【解析】由频率分布直方图得 $1000a=1-(0.00005\times2+0.0001\times2+0.00012+0.00015+0.00025)\times1000$，

解得 $a=0.00018$，故 A 错误；

该病人在医院住院消费了 4300 元，报销金额为 $(4300-400)\times65\%=2535$ 元，所以此人实际花费为 $4300-2535=1765$ 元，故 B 错误；

样本中可报销 80% 的占比为 0.15，所以该医院可报销为 80% 的概率为 $\frac{3}{20}$，故 C 正确；

样本中消费费用小于 4000 的直方图的面积为 $(0.00005+0.0001+0.00012+0.00018)\times1000=0.45$，所以中位数在 $[4000,5000)$ 内，所以消费费用的中位数的估计值为 $4000+\frac{0.5-0.45}{0.00025}=4200$ 元，故 D 错误. 故选 C.

5.【答案】B

【解析】因为 $\frac{2}{7}\pi=\frac{8}{28}\pi>\frac{7}{28}\pi=\frac{\pi}{4}$，则 $\tan\frac{2}{7}\pi>\tan\frac{\pi}{4}=1$，又因为 $\sin\frac{2}{7}\pi\in(0,1)$，$\cos1\in(0,1)$，则 a 最大，

$\sin\frac{2}{7}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{7}\pi\right)=\cos\frac{3}{14}\pi>\cos1$，则 $a>b>c$. 故选 B.

6.【答案】A

【解析】由 $\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3}{5}\Rightarrow\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{3}{5}$，

则 $\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-1=-\frac{7}{25}$. 故选 A.

7.【答案】D

【解析】令 $n=1\Rightarrow a_1=2$，由题意可得 $S_{n+1}-2=2(a_{n+1}-2^{n+1})$，与原式作差可得 $a_{n+1}=2a_n+2^{n+1}$，变形可得 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+1$，所以数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 是首项为 1，公差为 1 的等差数列，所以 $\frac{a_n}{2^n}=n\Rightarrow a_n=n\cdot2^n$. 故选 D.

8.【答案】A

【解析】法一：几何直观化

依题意可知曲线 $f(a,b)=0$ 表示一个以 $(1,1)$ 为圆心，1 为半径的圆，

求 $(3a+4b-1)^2$ 的最小值相当于先求 $d=\frac{|3a+4b-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|3a+4b-1|}{5}$ 的最小值，

即求圆 $(a-1)^2+(b-1)^2=1$ 上一点到直线 $3x+4y-1=0$ 的距离 d 的最小值，

所以 $d_{\min}=\frac{|3a+4b-1|_{\min}}{5}=\frac{|3\times1+4\times1-1|}{5}-1=\frac{1}{5}$，

即 $(3a+4b-1)^2$ 的最小值为 1. 故选 A.

法二：线性规划

设 $(3a+4b-1)^2=x\geqslant0$，则 $|3a+4b-1|=\sqrt{x}$，

若 $3a+4b-1-\sqrt{x}=0$，因为实数 a,b 满足 $a+b=\frac{a^2+b^2+1}{2}$，

所以直线 $3a+4b-1-\sqrt{x}=0$ 需与圆 $(a-1)^2+(b-1)^2=1$ 在可行域 $3a+4b\geqslant0$ 有交点，所以当 x 最小时，直线 $3a+4b-1-\sqrt{x}=0$ 需与圆 $(a-1)^2+(b-1)^2=1$ 相切，

有 $d=\frac{|3+4-1-\sqrt{x}|}{5}=1$，解得 $x=1$ 或 121（舍），此时切点为 $\left(\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)$ 在可行域内；

若 $3a+4b-1+\sqrt{x}=0$，同理 $d=\frac{|3+4-1+\sqrt{x}|}{5}=1$，无解.

综上，$(3a+4b-1)^2=x$ 的最小值为 1. 故选 A.

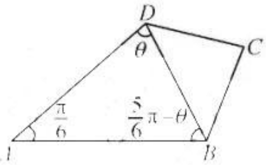
9.【答案】C

【解析】易知直线 l 的斜率不为 0，设直线 l 的方程为 $x=my+\frac{9}{2}$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

联立 $\begin{cases}x=my+\frac{9}{2},\\ y^2=2px,\end{cases}$ 消去 x，得 $y^2-2pmy-9p=0$，则 $\Delta=4p^2m^2+36p>0$，$y_1y_2=-9p$.

$\because \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{9}{4}$，$\therefore x_1x_2+y_1y_2=\left(\frac{y_1y_2}{2p}\right)^2+y_1y_2=\frac{81}{4}-9p=\frac{9}{4}$，$\therefore p=2$. 故选 C.

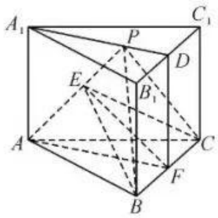
10.【答案】B

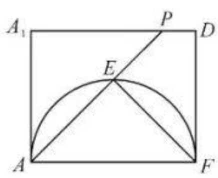


【解析】设 $\angle ADB=\theta$，在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理可得 $\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{AB}{\sin\theta}\Rightarrow AB=6\sin\theta$，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=\pi-\theta$，由余弦定理可得 $AC^2=BC^2+AB^2-2AB\cdot BC\cos\angle ABC=3+36\sin^2\theta-12\sqrt{3}\sin\theta\cos(\pi-\theta)=12\sqrt{3}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)+21$，所以

当 $\theta=\frac{5}{12}\pi$ 时，AC^2 取得最大值为 $12\sqrt{3}+21$. 故选 B.

11.【答案】A





【解析】由题可得，外接球半径为 $\sqrt{5}$，设三棱柱的侧棱长为 h，则有 $\left(\frac{h}{2}\right)^2+2^2=5\Rightarrow h=2$，即侧棱 $AA_1=2$，

设 BC 的中点为 F，作出截面如图所示，$\because AP\perp\alpha$，$\therefore AE\perp EF$，

$\therefore$ 点 E 在以 AF 为直径的圆上，三棱锥 $A-BCE$ 的体积最大，

$\therefore$ 点 E 到底面 ABC 距离的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}\times2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，由于 $DF<AF$，此时点 P 在线段 A_1D 上，符合条件. 此时体积最大为 $\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{3})^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 故选 A.

12.【答案】D

【解析】设双曲线 C 的焦距为 $2c$，由 $PF_1\perp PF_2$ 可得点 P 在圆 $x^2+y^2=c^2$ 上，联立方程 $\begin{cases}x^2+y^2=c^2,\\ y=\frac{b}{a}x,\end{cases}$ 可解得点 P 的坐标为 (a,b)，直线 PF_1 的方程为 $y=\frac{b}{a+c}(x+c)$，令 $x=0$，可得点 N 的坐标为 $\left(0,\frac{bc}{a+c}\right)$，直线 PF_2

的方程为 $y=\frac{b}{a-c}(x-c)$，令 $\frac{b}{a-c}(x-c)=\frac{bc}{a+c}$，解得 $x=\frac{2ac}{a+c}$，可得点 M 的坐标为 $\left(\frac{2ac}{a+c},\frac{bc}{a+c}\right)$，将点 M 的坐标代入双曲线 C 的方程有 $\frac{\left(\frac{2ac}{a+c}\right)^2}{a^2}-\frac{\left(\frac{bc}{a+c}\right)^2}{b^2}=1$，有 $\frac{4c^2}{(a+c)^2}-\frac{c^2}{(a+c)^2}=1$，有 $\frac{3c^2}{(a+c)^2}=1$，解得 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. 故选 D.

13.**【答案】**2

【解析】$z=\frac{1+2\mathrm{i}}{a-\mathrm{i}}=\frac{(1+2\mathrm{i})(a+\mathrm{i})}{a^2+1}=\frac{a-2+(2a+1)\mathrm{i}}{a^2+1}$ 为纯虚数，则 $a=2$.

14.**【答案】**660

【解析】若代表队中有 1 名女同学，此时共有 $C_6^3\times C_2^1\times C_4^1\times C_3^1=480$ 种可能，若女同学的人数为 2，则共有 $C_6^2\times C_2^2\times C_4^1\times C_3^1=180$ 种可能，所以一共有 660 种可能.

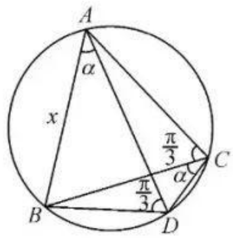
15.**【答案】**5

【解析】因为 $2a^2$，b^2+ac，$2c^2$ 成等差数列，

所以 $a^2+c^2=b^2+ac$，即 $a^2+c^2-b^2=2ac\cos B=ac$，

即 $\cos B=\frac{1}{2}$，因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$，

因为△ABC 是等腰三角形，所以△ABC 是正三角形，



设△ABC 的边长为 x，$\angle BAD=\alpha$，易得 $\angle CAD=\frac{\pi}{3}-\alpha$，

根据圆周角定理，有 $\angle ADB=\angle ADC=\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，

所以 $\angle ABD=\frac{2\pi}{3}-\alpha$，$\angle ACD=\frac{\pi}{3}+\alpha$，

在△ABD 中，根据正弦定理有 $BD=\frac{2\sqrt{3}}{3}x\sin\alpha$，

同理在△ACD 中，$CD=\frac{2\sqrt{3}}{3}x\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$，$AD=\frac{2\sqrt{3}}{3}x\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$，

所以 $BD+CD=\frac{2\sqrt{3}}{3}x\left(\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}x\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=AD=5$.

16.**【答案】**$\left(-\infty,\frac{1}{\ln 2}\right]$

【解析】令 $f(x)=a\ln x-e^{x-2}$，则 $f'(x)=\frac{a}{x}-e^{x-2}=\frac{a-xe^{x-2}}{x}$，$x\in[2,+\infty)$，

①当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 为减函数，∴当 $x\geqslant 2$ 时，$f(x)\leqslant f(2)=a\ln 2-1<0$，不等式恒成立；

②当 $a>0$ 时，令 $g(x)=a-xe^{x-2}$，$x\in[2,+\infty)$，则 $g'(x)=-(x+1)e^{x-2}<0$，∴$g(x)\leqslant g(2)=a-2$，

若 $a\leqslant 2$，则 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上为减函数，不等式恒成立时，$f(x)\leqslant f(2)=a\ln 2-1<0$，即 $a\leqslant\frac{1}{\ln 2}$，

若 $a\geqslant 2$，则易知存在 $x_0\in[2,+\infty)$，使得 $f'(x_0)=0$，∴$f(x)$ 在 $(2,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，此时 $a=x_0e^{x_0-2}$，∴$f(x_0)=x_0e^{x_0-2}\cdot\ln x_0-e^{x_0-2}=e^{x_0-2}(x_0\ln x_0-1)>e^{x_0-2}(2\ln 2-1)>0$，不符合题意，综上所述，不等式恒成立时，实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{1}{\ln 2}\right]$.

17.**【答案】**(1)$a_n=2^{n(n+1)}$　(2)$b_n=2n$

【解析】(1)已知 $a_{n+1}^n=a_n^{n+2}$（$a_n>0$ 且 $a_n\neq 1$），设 $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$，

即 $n\log_x a_{n+1}=(n+2)\log_x a_n$，

所以 $\frac{\log_x a_{n+1}}{\log_x a_n}=\frac{n+2}{n}$，…………………………………………………… 2 分

当 $n>1$ 时，$\frac{\log_x a_n}{\log_x a_{n-1}}\cdot\frac{\log_x a_{n-1}}{\log_x a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{\log_x a_3}{\log_x a_2}\cdot\frac{\log_x a_2}{\log_x a_1}=\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n-1}{n-3}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{3}{1}$.

即$\dfrac{\log_x a_n}{\log_x a_1}=\log_4 a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，所以 $a_n=2^{n(n-1)}$. ………………………………………… 4 分

当 $n=1$ 时，$a_n=4$ 符合上式，

所以 $a_n=2^{n(n+1)}$；………………………………………… 6 分

(2) $S_n=\log_2 2^{n(n+1)}=n^2+n$, ………………………………………… 8 分

当 $n=1$ 时，$b_1=S_1=2$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$b_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n-(n-1)^2-(n-1)=2n$，

则 $b_n=2n$. ………………………………………… 12 分

18.【答案】(1)有 95%的把握认为是否愿意参与文艺和体育活动与性别有关　(2)分布列见解析，$E(X)=\dfrac{9}{8}$

【解析】(1)由已知得 2×2 列联表：

	愿意参与	不愿参与	总计
男性居民	15	20	35
女性居民	25	10	35
总计	40	30	70

………………………………………… 2 分

因为 $K^2=\dfrac{70\times(15\times 10-25\times 20)^2}{35\times 35\times 40\times 30}=\dfrac{35}{6}\approx 5.833>3.841$. ………………………………………… 4 分

所以有 95%的把握认为是否愿意参与文艺和体育活动与性别有关；………………………………………… 6 分

(2)用分层抽样方法，在愿意参与的居民中抽取 8 人，男性居民应抽取 3 人，女性居民应抽取 5 人，再从这 8 人中随机抽取 3 人，记抽到的男性居民为 X，则 X 的可能取值为 0，1，2，3. ………………………………………… 7 分

$P(X=0)=\dfrac{C_3^0C_5^3}{C_8^3}=\dfrac{10}{56}=\dfrac{5}{28}$，$P(X=1)=\dfrac{C_3^1C_5^2}{C_8^3}=\dfrac{30}{56}=\dfrac{15}{28}$，$P(X=2)=\dfrac{C_3^2C_5^1}{C_8^3}=\dfrac{15}{56}$，

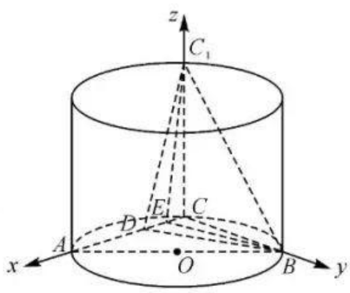
$P(X=3)=\dfrac{C_3^3C_5^0}{C_8^3}=\dfrac{1}{56}$，………………………………………… 10 分

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{5}{28}$	$\dfrac{15}{28}$	$\dfrac{15}{56}$	$\dfrac{1}{56}$

所以 $E(X)=0\times\dfrac{10}{56}+1\times\dfrac{30}{56}+2\times\dfrac{15}{56}+3\times\dfrac{1}{56}=\dfrac{9}{8}$. ………………………………………… 12 分

19.【答案】(1)略　(2)$\dfrac{19\sqrt{385}}{385}$



【解析】证明：(1)因为 $C_1C\perp$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，

所以 $C_1C\perp BC$，又因为 $AC\perp BC$，$AC\cap CC_1=C$，

所以 $BC\perp$ 平面 ACC_1，

因为 $C_1D\subset$ 平面 ACC_1，所以 $BC\perp C_1D$；………………………… 4 分

(2)由题意分别以 CA，CB，CC_1 所在直线为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，

所以 $A(2\sqrt{2},0,0)$，$B(0,2\sqrt{2},0)$，$C_1(0,0,4)$，则 $D(\sqrt{2},0,0)$，$E\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},0,0\right)$，

………………………………………… 6 分

则 $\overrightarrow{BC_1}=(0,-2\sqrt{2},4)$，$\overrightarrow{BE}=(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-2\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{BD}=(\sqrt{2},-2\sqrt{2},0)$，

设平面 BEC_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{BC_1}\cdot \boldsymbol{n}_1=0,\\ \overrightarrow{BE}\cdot \boldsymbol{n}_1=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-2\sqrt{2}y_1+4z_1=0,\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}x_1-2\sqrt{2}y_1=0,\end{cases}$

令 $x_1=4$,则 $y_1=1$,则 $z_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,所以$\boldsymbol{n}_1=\left(4,1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$,………………………………………… 8 分

设平面 BDC_1 的一个法向量为$\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$,

则$\begin{cases}\overrightarrow{BC_1}\cdot \boldsymbol{n}_2=0,\\ \overrightarrow{BD}\cdot \boldsymbol{n}_2=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-2\sqrt{2}y_2+4z_2=0,\\ \sqrt{2}x_2-2\sqrt{2}y_2=0,\end{cases}$

令 $x_2=2$,则 $y_2=1$,$z_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,所以$\boldsymbol{n}_2=\left(2,1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$,………………………………………… 10 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{8+1+\frac{1}{2}}{\sqrt{17+\frac{1}{2}}\times\sqrt{5+\frac{1}{2}}}=\dfrac{19}{\sqrt{35\times 11}}=\dfrac{19\sqrt{385}}{385}$,

即二面角 $D-BC_1-E$ 的余弦值为$\dfrac{19\sqrt{385}}{385}$.………………………………………… 12 分

20.【答案】(1)$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$　(2)直线 DE 过定点$\left(\dfrac{4}{5},0\right)$,证明略

【解析】(1)设点 F_1,F_2 的坐标分别为$(-c,0)$、$(c,0)$.

由题意有$\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{3}{4b^2}=1,\\ c^2=a^2-b^2,\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\ b=1,\\ c=\sqrt{3},\end{cases}$………………………………………… 3 分

故椭圆 C 的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$;………………………………………… 4 分

(2)证明:设直线 l_1 的斜率为 $k(k\neq 0)$,可得直线 l_2 的斜率为 $-\dfrac{1}{k}$.

设点 D 的坐标为(x_1,y_1),点 E 的坐标为(x_2,y_2),

直线 l_1 的方程为 $y=k(x-1)$,

联立方程$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=k(x-1),\end{cases}$消除 y 后有$(4k^2+1)x^2-8k^2x+4k^2-4=0$,有 $2x_1=\dfrac{8k^2}{4k^2+1}$,可得 $x_1=\dfrac{4k^2}{4k^2+1}$,

$y_1=k\left(\dfrac{4k^2}{4k^2+1}-1\right)=-\dfrac{k}{4k^2+1}$,………………………………………… 6 分

同理 $x_2=\dfrac{\frac{4}{k^2}}{\frac{4}{k^2}+1}=\dfrac{4}{k^2+4}$,$y_2=-\dfrac{-\frac{1}{k}}{\frac{4}{k^2}+1}=\dfrac{k}{k^2+4}$,………………………………………… 8 分

由对称性可知直线 DE 所过的定点 T 必定在 x 轴上,设点 T 的坐标为$(t,0)$,………………………… 9 分

有$\dfrac{y_2}{x_2-t}=\dfrac{y_1}{x_1-t}$,有$\dfrac{\frac{k}{k^2+4}}{\frac{4}{k^2+4}-t}=\dfrac{-\frac{k}{4k^2+1}}{\frac{4k^2}{4k^2+1}-t}$,化简得$(5k^2+5)t=4k^2+4$,解得 $t=\dfrac{4}{5}$,

故直线 DE 过定点$\left(\dfrac{4}{5},0\right)$.………………………………………… 12 分

21.【答案】(1)$2x+y-5=0$　(2)略

【解析】(1)当 $a=0$ 时,$f(x)=\ln x+\dfrac{3}{x}$,$f'(x)=\dfrac{x-3}{x^2}$,$f(1)=3$,$f'(1)=-2$,

所以 $f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程为 $2x+y-5=0$;………………………………………… 3 分

(2)证明如下：由题意可知 $x_1,x_2(x_1<x_2)$ 是方程 $x^2-3x+2a=0$ 的两个不等的正实数根，

$\therefore x_1+x_2=3,x_1x_2=2a$， …………………………………………………………………… 4 分

$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{\ln x_1+\dfrac{3}{x_1}-\dfrac{a}{x_1^2}-\left(\ln x_2+\dfrac{3}{x_2}-\dfrac{a}{x_2^2}\right)}{x_1-x_2}=\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}-\dfrac{3}{x_1x_2}+\dfrac{a(x_1+x_2)}{x_1^2x_2^2}$ …………… 6 分

$=\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}-\dfrac{3}{2a}+\dfrac{3a}{4a^2}=\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}-\dfrac{3}{4a}$.

要证 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\dfrac{3}{4a}$ 成立，只需证 $\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}-\dfrac{3}{4a}<\dfrac{3}{4a}$，即证 $\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}<\dfrac{3}{2a}$， …………………… 8 分

即证 $\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}<\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}$，即证 $\ln x_1-\ln x_2>\dfrac{x_1^2-x_2^2}{x_1x_2}$，即证 $\ln\dfrac{x_1}{x_2}>\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{x_2}{x_1}$，

设 $t=\dfrac{x_1}{x_2}$，则 $0<t<1$，即证 $\ln t>t-\dfrac{1}{t}$， ………………………………………………… 10 分

令 $h(t)=\ln t-t+\dfrac{1}{t}(0<t<1)$，则 $h'(t)=\dfrac{1}{t}-1-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{4}}{t^2}<0$，

$\therefore h(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，则 $h(t)>h(1)=0$，$\therefore \ln t>t-\dfrac{1}{t}$，故 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\dfrac{3}{4a}$. ……………… 12 分

22.【答案】(1) $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$　(2) $\left[\dfrac{4\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2},\dfrac{4\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}\right]$

【解析】(1)由 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ 可得 M 的普通方程为 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$； ………………………………… 4 分

(2)直线 l 可化简为 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=4$，将 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 代入直线 l 可得 $x+y-4=0$，…………………… 6 分

设 $D(\cos\theta,2\sin\theta)$，

则 $d=\dfrac{|\cos\theta+2\sin\theta-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|\sqrt{5}\cos(\theta+\varphi)-4|}{\sqrt{2}}$. ……………………………………………………… 8 分

$\therefore d\in\left[\dfrac{4\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2},\dfrac{4\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}\right]$. …………………………………………………………………… 10 分

23.【答案】(1)略　(2)略

【解析】(1)证明：由柯西不等式可得 $\left(a^2+\dfrac{b^2}{4}+\dfrac{c^2}{9}\right)(1^2+2^2+3^2)\geqslant(a+b+c)^2=16$，

当且仅当 $a=\dfrac{b}{4}=\dfrac{c}{9}=\dfrac{2}{7}$ 时取等号.

即 $a^2+\dfrac{b^2}{4}+\dfrac{c^2}{9}\geqslant\dfrac{16}{14}=\dfrac{8}{7}$，则原式成立； …………………………………………………………… 4 分

(2)证明：$\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}=\dfrac{1}{8}(a+c+a+b+b+c)\left(\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}\right)$ ……………………………… 6 分

$=\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{b+c}{a+b}+\dfrac{a+b}{b+c}+\dfrac{b+c}{c+a}+\dfrac{c+a}{b+c}+\dfrac{a+b}{c+a}+\dfrac{a+c}{a+b}\right)$ ……………………………………………… 8 分

$\geqslant\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{8}\left(2\sqrt{\dfrac{b+c}{a+b}\cdot\dfrac{a+b}{b+c}}+2\sqrt{\dfrac{b+c}{c+a}\cdot\dfrac{c+a}{b+c}}+2\sqrt{\dfrac{a+b}{c+a}\cdot\dfrac{c+a}{a+b}}\right)=\dfrac{9}{8}$. ……………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线