# 炎德·英才·名校联考联合体 2024 届高三第二次联考

# 数学参考答案

| 题 号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答 案 | A | D | B | C | A | B | A | D | ABC | ABD | ABD | AC |

**一、选择题**(本大题共 **8** 小题,每小题 **5** 分,共 **40** 分.)

1. A 【解析】$z=(1+2i)(1-i)=3+i$,所以 $|z|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$,故选 A.

另解:因为 $z=(1+2i)(1-i)$,所以 $|z|=|(1+2i)(1-i)|=|1+2i||1-i|=\sqrt{5}\times\sqrt{2}=\sqrt{10}$,故选 A.

2. D 【解析】由已知 $A\cap B=\{-1,1,3\}$. 故选 D.

3. B 【解析】因为 $e^x=128$,$\lg 2\approx 0.3010$,$\lg e\approx 0.4343$,所以 $x=\ln 128=\dfrac{\lg 128}{\lg e}=\dfrac{7\lg 2}{\lg e}\approx\dfrac{7\times 0.3010}{0.4343}\approx 4.8515$,故选 B.

4. C 【解析】函数 $f(x)=(x+a)(x+2)^2$,$f'(x)=(x+2)^2+2(x+a)(x+2)=(x+2)(3x+2+2a)$,

函数 $f(x)=(x+a)(x+2)^2$ 在 $x=-1$ 处有极小值,可得 $f'(-1)=(-1+2)(-3+2+2a)=0$,解得 $a=\dfrac{1}{2}$.

当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时,$f'(x)=3(x+1)(x+2)$,$x\in(-2,-1)$ 时 $f'(x)<0$,$x\in(-1,+\infty)$ 时 $f'(x)>0$,$f(x)$ 在 $(-2,-1)$ 上单调递减,在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增,$f(x)$ 在 $x=-1$ 处有极小值,符合题意. 所以 $a=\dfrac{1}{2}$. 故选 C.

5. A 【解析】因为函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象,

所以 $g(x)=2\sin\left(2x-2\varphi+\dfrac{\pi}{4}\right)$,因为 $g(x)$ 为偶函数,所以 $-2\varphi+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,即 $\varphi=-\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

当 $k=-1$ 时 $\varphi=\dfrac{3\pi}{8}$,则 $\varphi=\dfrac{3\pi}{8}$ 可以推导出函数 $g(x)$ 为偶函数,

而函数 $g(x)$ 为偶函数不能推导出 $\varphi=\dfrac{3\pi}{8}$,所以"$\varphi=\dfrac{3\pi}{8}$"是"函数 $g(x)$ 为偶函数"的充分不必要条件. 故选 A.

6. B 【解析】记甲挑战成功为事件 $A$,乙挑战成功为事件 $B$,则 $P(A)=\dfrac{4}{15}$,$P(B)=\dfrac{2}{15}$,$P(A\cup B)=1-\dfrac{7}{10}=\dfrac{3}{10}$,

由概率加法公式知 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,

可得 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\dfrac{4}{15}+\dfrac{2}{15}-\dfrac{3}{10}=\dfrac{1}{10}$,

则在甲挑战成功的条件下,乙挑战成功的概率为 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{4}{15}}=\dfrac{3}{8}$. 故选 B.

7. A 【解析】由已知 $DD_1\perp$ 平面 $ABCD$,$DO\perp AC$,所以 $D_1O\perp OC$,同理 $OE\perp OC$,

又 $D_1O=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$,$OE=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$,$D_1E=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}=3$, 则

所以 $D_1E^2=D_1O^2+OE^2$,所以 $D_1O\perp OE$,所以 $D_1O\perp$ 平面 $OCE$,

所以三棱锥 $D_1-OCE$ 的体积为 $V=\dfrac{1}{3}S_{\triangle OCE}\cdot OD_1=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{6}=1$. 故选 A.

8. D 【解析】令 $y=1$,得 $(x+1)f(x)f(1)=xf(x+1)$,代入 $f(1)=2$,得 $2(x+1)f(x)=xf(x+1)$,

当 $x$ 为正整数时,$\dfrac{f(x+1)}{f(x)}=\dfrac{2(x+1)}{x}$,

所以 $\dfrac{f(x+1)}{f(x)}\cdot\dfrac{f(x)}{f(x-1)}\cdot\dfrac{f(x-1)}{f(x-2)}\cdot\cdots\cdot\dfrac{f(2)}{f(1)}=\dfrac{2(x+1)}{x}\cdot\dfrac{2x}{x-1}\cdot\dfrac{2(x-1)}{x-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2\times 2}{1}$,

所以 $\dfrac{f(x+1)}{f(1)}=2^x\cdot(x+1)$,代入 $f(1)=2$,得 $f(x+1)=(x+1)\cdot 2^{x+1}$,

所以 $f(x)=x\cdot 2^x(x\geq 2$ 且 $x\in\mathbf{N}^*)$,又当 $x=1$ 时,也符合题意,所以 $f(x)=x\cdot 2^x(x\in\mathbf{N}^*)$.

所以 $\sum\limits_{k=1}^{20}f(k)=f(1)+f(2)+\cdots+f(20)=1\times 2+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+20\times 2^{20}$,

令 $S_{20}=1\times 2+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+20\times 2^{20}$,则 $2S_{20}=1\times 2^2+2\times 2^3+3\times 2^4+\cdots+20\times 2^{21}$,

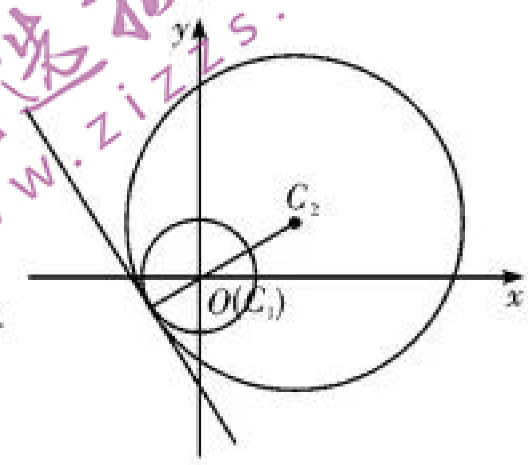
所以 $S_{20}-2S_{20}=2+2^2+2^3+\cdots+2^{20}-20\times 2^{21}$,所以 $-S_{20}=\dfrac{2(1-2^{20})}{1-2}-20\times 2^{21}$,

所以 $S_{20}=19\times 2^{21}+2$. 故选 D.

二、选择题(本大题共4小题,每小题5分,共20分.)

9. ABC 【解析】对于选项A,从折线图能看出世界人口的总量随着年份的增加而增加,故A正确;对于选项B,从扇形图中能够明显地看出2050年亚洲人口将比其他各洲人口的总和还要多,故B正确;对于选项C,从条形图中能够明显地看出2050年南美洲及大洋洲人口之和将与欧洲人口基本持平,故C正确;对于选项D,由题中三幅统计图并不能得出从1957年到2050年中哪个洲人口增长速度最慢,故D错误.故选ABC.

10. ABD 【解析】如图,由题意得 $C_1$ 与 $C_2$ 相内切,故A正确;



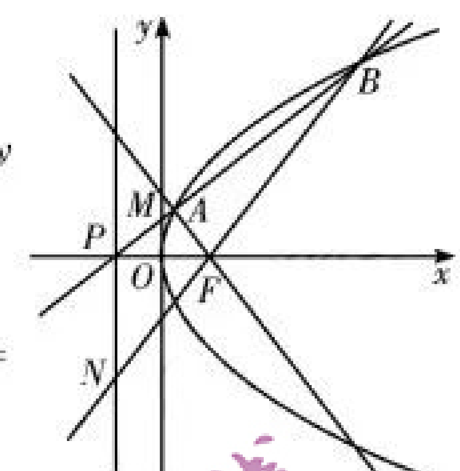
又 $C_2$:$(x-\sqrt{3}a)^2+(y-a)^2=4a^2+5$,由圆 $C_1$ 与 $C_2$ 内切,

所以 $|C_1C_2|=\sqrt{3a^2+a^2}=\sqrt{4a^2+5}-1$,即 $2a+1=\sqrt{4a^2+5}$,解得 $a=1$,故B正确;

由 $C_1(0,0)$,$C_2(\sqrt{3},1)$,得 $k_{C_1C_2}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.联立 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=9,\end{cases}$ 解得

$\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{3}}{2},\\y=-\frac{1}{2},\end{cases}$ 所以切点的坐标为 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$,故所求公切线的方程为 $y+\frac{1}{2}=-\sqrt{3}\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,即 $\sqrt{3}x+y+2=0$.故C错误,D正确.故选ABD.

11. ABD 【解析】因为抛物线为 $y^2=8x$,可得准线 $l$:$x=-2$,所以 $P(-2,0)$,故A正确;



由已知 $F(2,0)$,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,直线 $AB$:$x=my-2$,由 $\begin{cases}x=my-2,\\y^2=8x,\end{cases}$ 得 $y^2-8my+16=0$,$\therefore\Delta=64m^2-64>0$,解得 $m<-1$ 或 $m>1$,$\therefore y_1+y_2=8m$,$y_1y_2=16$,

$\therefore k_{FA}+k_{FB}=\frac{y_1}{x_1-2}+\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{y_1}{\frac{y_1^2}{8}-2}+\frac{y_2}{\frac{y_2^2}{8}-2}=\frac{8y_1}{y_1^2-16}+\frac{8y_2}{y_2^2-16}=$

$\frac{8y_1y_2^2-128y_1+8y_1^2y_2-128y_2}{(y_1^2-16)(y_2^2-16)}=\frac{8(y_1y_2-16)(y_1+y_2)}{(y_1^2-16)(y_2^2-16)}=\frac{8(16-16)(y_1+y_2)}{(y_1^2-16)(y_2^2-16)}=0$,所以直线 $FA$,$FB$ 关于 $x$ 轴对称,故B正确;

设 $k_{FA}=k$,则 $k_{FB}=-k$,$\therefore$ 直线 $FA$:$y=k(x-2)$,直线 $FB$:$y=-k(x-2)$,$\therefore M(0,-2k)$,$N(-2,4k)$,

$\therefore\frac{|FM|}{|FN|}=\sqrt{\frac{(2-0)^2+(0+2k)^2}{(2+2)^2+(0-4k)^2}}=\sqrt{\frac{4+4k^2}{4(4+4k^2)}}=\frac{1}{2}$.故C错误,D正确.故选ABD.

12. AC 【解析】由 $n^2e^n=-\ln n$,得 $ne^n=e^n\ln e^n=\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}$,$0<n<1$,则 $e^n>1$,

令 $f(x)=x\ln x$ 且 $x>1$,则 $f'(x)=1+\ln x>0$,即 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增,所以 $e^n=\frac{1}{n}$;

由 $m+\ln m=\frac{1}{m}+e^{\frac{1}{m}}$,则 $m+\ln m=e^{\frac{1}{m}}+\frac{1}{m}=e^{\frac{1}{m}}+\ln e^{\frac{1}{m}}$,而 $\frac{1}{m}>0$,则 $e^{\frac{1}{m}}>1$,

令 $g(x)=x+\ln x$ 且 $x>0$,则 $f'(x)=1+\frac{1}{x}>0$,即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增,所以 $m=e^{\frac{1}{m}}$,即 $\ln m=\frac{1}{m}$,

综上可知 $n$ 是 $y=e^x$ 与 $y=\frac{1}{x}$ 交点横坐标,$m$ 是 $y=\ln x$ 与 $y=\frac{1}{x}$ 交点横坐标,

由于 $y=\ln x$ 与 $y=e^x$ 互为反函数,其图象关于直线 $y=x$ 对称,$y=\frac{1}{x}$ 图象也关于 $y=x$ 对称,

所以 $m=e^n>1$,且 $mn=ne^n=1$,故 $mn<e^n=m$.故选项AC正确.故选AC.

三、填空题(本大题共4小题,每小题5分,共20分.)

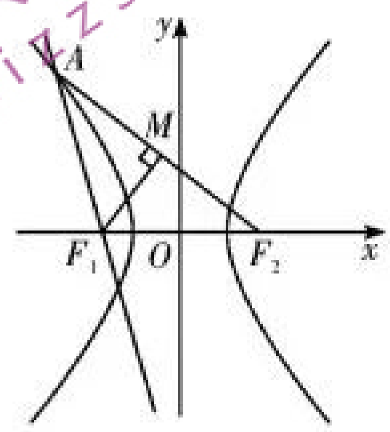
13. $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ 【解析】$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

14. $2\boldsymbol{a}$ 【解析】因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角为 $\frac{\pi}{4}$，$|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=2$，

所以 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{4}=(2\sqrt{2})^2+2\times2\sqrt{2}\times2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=16$，

所以向量 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影向量为 $\frac{(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{16}{2\sqrt{2}}\times\frac{\boldsymbol{a}}{2\sqrt{2}}=2\boldsymbol{a}$.

15. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ 【解析】因为 $|F_1A|=|F_1F_2|$，所以 $|AF_1|=|F_1F_2|=2c$，




由双曲线的定义知 $|AF_2|-|AF_1|=2a$，所以 $|AF_2|=2a+2c$.

如图，取 $M$ 为 $AF_2$ 的中点，所以 $|F_2M|=\frac{1}{2}|AF_2|=a+c$，

又 $\angle AF_2F_1=30^\circ$，得 $|F_1M|=c$，所以在直角 $\triangle F_1MF_2$ 中，$|F_1M|^2+|F_2M|^2=|F_1F_2|^2$，

即 $c^2+(a+c)^2=(2c)^2$，得 $a^2-2c^2+2ac=0$，所以 $1-2e^2+2e=0$，解得 $e=\frac{\pm\sqrt{3}+1}{2}$，

因为 $e>0$，所以双曲线 $C$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.来源：高三标答公众号

16. $\frac{64\sqrt{2}}{3}\pi$ 【解析】由题意可知，设 $\triangle ABG$ 的外接圆半径为 $r$，由正弦定理得 $2r=\frac{AB}{\sin\angle AGB}=\frac{4}{\sin\angle AGB}$，

当 $\angle AGB=\frac{\pi}{2}$ 时，$r$ 取得最小值为 2，此时外接球半径 $R$ 满足 $R^2=r^2+2^2\geqslant8$，解得 $R\geqslant2\sqrt{2}$.

所以三棱锥 $C-ABG$ 的外接球的半径的最小值为 $2\sqrt{2}$. 所以外接球体积的最小值为 $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{64\sqrt{2}}{3}\pi$.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17.【解析】(1) 因为 $2\sin A\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\frac{1}{2}\cos A\right)$ ………… 1 分

$=\sqrt{3}\sin^2A+\sin A\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\cos 2A)+\frac{1}{2}\sin 2A$ ………… 2 分

$=\sin\left(2A-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$， ………… 3 分

得 $\sin\left(2A-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$， ………… 4 分

又 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，得 $2A-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ………… 5 分

(2) 由正弦定理及 $\sqrt{2}a=\sqrt{3}b$，得 $\sqrt{2}\sin A=\sqrt{3}\sin B$，

又 $A=\frac{\pi}{3}$，$B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$， ………… 6 分

所以 $\sin C=\sin(A+B)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$， ………… 7 分

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，又 $c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，

所以 $a=\frac{c\cdot\sin A}{\sin C}=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=2\sqrt{3}$， ………… 9 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=3+\sqrt{3}$. ………… 10 分

18.【解析】(1) 设递增等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$，则 $d>0$，

因为 $a_{n+1}^2-2a_{n+1}=a_n^2+2a_n$，所以 $a_{n+1}^2-a_n^2=2a_{n+1}+2a_n$，

即 $(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n)=2(a_{n+1}+a_n)$， ………… 3 分

因为 $a_1=2$，$d>0$，所以 $a_{n+1}+a_n>0$，所以 $a_{n+1}-a_n=2$，所以 $d=2$， …………

故数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=a_1+(n-1)d=2+(n-1)\times2=2n$. ………………………………………… 6 分

(2)解法一：$T_{2n}=b_1+b_2+\cdots+b_{2n-1}+b_{2n}=(1-a_1)+(a_2+1)+\cdots+(1-a_{2n-1})+(a_{2n}+1)$

$=-(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})+n+(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})+n$ ………………………………………… 9 分

$=-\left[2n+\frac{n(n-1)}{2}\times4\right]+\left[4n+\frac{n(n-1)}{2}\times4\right]+2n=4n$. ………………………………………… 12 分

解法二：$T_{2n}=b_1+b_2+\cdots+b_{2n-1}+b_{2n}=(1-a_1)+(a_2+1)+\cdots+(1-a_{2n-1})+(a_{2n}+1)$

$=(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{2n}-a_{2n-1})+n+n=2n+2n=4n$. ………………………………………… 12 分

19.【解析】(1)由题意得$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，且$\frac{1}{2}\cdot2a\cdot2b=4$，又$a^2=b^2+c^2$， ………………………………………… 2 分

解得$a^2=4,b^2=1$， ………………………………………… 4 分

所以椭圆$C$的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………………………… 5 分

(2)设$P(x_0,y_0)$，$Q(x_1,y_1)$，由(1)得$B_1(0,1)$，$B_2(0,-1)$，

当直线$PQ$的斜率存在时，

设直线$PQ$的方程为$y=kx+k-1=kx+m$，其中$m=k-1$，

将直线方程代入$\frac{x^2}{4}+y^2=1$得，$(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

其判别式为$\Delta=64k^2m^2-4(4k^2+1)(4m^2-4)=64k^2+16-16m^2=16(3k^2+2k)>0$，

$\therefore k>0$或$k<-\frac{2}{3}$，且$k\neq2$，

$\therefore x_0+x_1=\frac{-8km}{4k^2+1}$，$x_0x_1=\frac{4m^2-4}{4k^2+1}\neq0$， ………………………………………… 8 分

$\therefore k_1+k_2=\frac{y_0-1}{x_0}+\frac{y_1-1}{x_1}=\frac{kx_0+m-1}{x_0}+\frac{kx_1+m-1}{x_1}=2k+(m-1)\frac{x_0+x_1}{x_0x_1}$

$=2k+(m-1)\frac{-8km}{4m^2-4}=2k-\frac{2km}{m+1}=2k-2m=2$. ………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)如图，在$AB$上取点$G$，使得$BG=CD=1$，连接$FG$，$GD$，

又$BG/\!/CD$，所以四边形$BGDC$为平行四边形，所以$BC/\!/GD$，

又$GD\not\subset$平面$PBC$，$BC\subset$平面$PBC$，所以$GD/\!/$平面$PBC$. ………………………………………… 2 分

又$DF/\!/$平面$PBC$，$DF\cap GD=D$，$DF,GD\subset$平面$DFG$，

所以平面$PBC/\!/$平面$DFG$，

又平面$DFG\cap$平面$PAB=FG$，平面$PBC\cap$平面$PAB=PB$，

所以$FG/\!/PB$， ………………………………………… 4 分

所以在$\triangle PAB$中，$\frac{AF}{FP}=\frac{AG}{GB}=\frac{2}{1}=2$，所以$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FP}$，所以$\lambda=2$. ………………………………………… 5 分

(2)如图，取$AD$的中点$O$，连接$OG$，$OP$，由底面$ABCD$为直角梯形，

$AB/\!/CD$，$AB\perp BC$，$\angle DAB=45^\circ$，$PA=PD=BC=2CD=2$，

可知$\triangle AGD$为等腰直角三角形，且$\angle AGD=90^\circ$，所以$OG\perp AD$.

因为平面$PAD\perp$平面$ABCD$，所以$OG\perp$平面$PAD$，

又$PA=PD=2$，所以$PO\perp AD$，

所以$OP\perp$平面$ABCD$. ………………………………………… 7 分

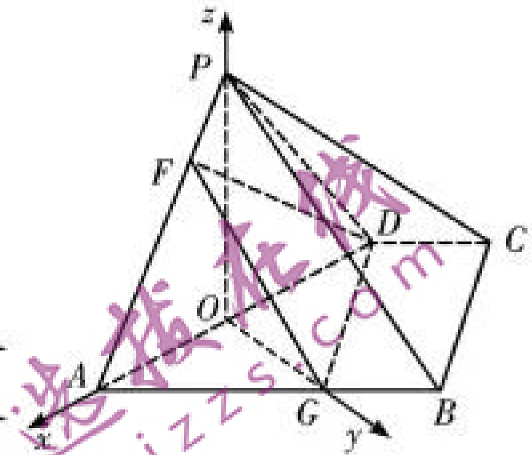
以$O$为原点，$OA$，$OG$，$OP$分别为$x,y,z$轴建立如图所示的空间直角坐标系，

因为$PA=PD=2$，$AD=2\sqrt{2}$，$AB=3$，$\angle BAD=\frac{\pi}{4}$，

所以$P(0,0,\sqrt{2})$，$B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2},0\right)$，$C\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$， ………………………………………… 8 分

所以$\overrightarrow{PB}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2}\right)$，$\overrightarrow{PC}=\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2}\right)$，

设平面 $PBC$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，




则 $\begin{cases}\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{m}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}y-\sqrt{2}z=0,\\ \overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{m}=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y-\sqrt{2}z=0,\end{cases}$

不妨取 $x=1$，则 $\boldsymbol{m}=(1,-1,-2)$， ………………………………………… 10 分

因为 $OG\perp$ 平面 $PAD$，所以平面 $PAD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,1,0)$， ………… 11 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1\times0+(-1)\times1+(-2)\times0}{\sqrt{6}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，

所以平面 $PAD$ 与平面 $PBC$ 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. ………………………………………… 12 分

21.【解析】(1)因为每局比赛结果仅有“甲获胜”和“乙获胜”，所以 $p+q=1$，

由题意得 $X$ 的所有可能取值为 2,4,5，则

$P(X=2)=p^2+q^2$， ………………………………………… 1 分

$P(X=4)=(pq+qp)p^2+(pq+qp)q^2=2pq(p^2+q^2)$， ………………………………………… 2 分

$P(X=5)=(pq+qp)\cdot(pq+qp)\cdot1=4p^2q^2$. ………………………………………… 3 分

所以 $X$ 的分布列为

| $X$ | 2 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $p^2+q^2$ | $2pq(p^2+q^2)$ | $4p^2q^2$ |

所以 $X$ 的期望 $E(X)=2(p^2+q^2)+8pq(p^2+q^2)+20p^2q^2$ ………………………………………… 4 分

$=2(1-2pq)+8pq(1-2pq)+20p^2q^2=4p^2q^2+4pq+2$，

因为 $p+q=1\geqslant2\sqrt{pq}$，所以 $pq\leqslant\dfrac{1}{4}$，当且仅当 $p=q=\dfrac{1}{2}$ 时，等号成立，

所以 $pq\in\left(0,\dfrac{1}{4}\right]$，所以 $E(X)=4p^2q^2+4pq+2=(2pq+1)^2+1\leqslant\left(2\times\dfrac{1}{4}+1\right)^2+1=\dfrac{13}{4}$，

故 $E(X)$ 的最大值为 $\dfrac{13}{4}$. ………………………………………… 6 分

(2)设事件 $A$，$B$ 分别表示每局比赛“甲获胜”，“乙获胜”.

由题设可知前两局比赛结果可能是 $AA$，$BB$，$AB$，$BA$，其中事件 $AA$ 表示“甲运动员赢得比赛”，事件 $BB$ 表示“乙运动员赢得比赛”，事件 $AB$，$BA$ 表示“甲、乙两名运动员各得 1 分”，

当甲、乙两名运动员得分总数相同时，甲运动员赢得比赛的概率与比赛一开始甲运动员赢得比赛的概率相同.

所以 $P(M)=P(AA)\cdot1+P(BB)\cdot0+P(AB)\cdot P(M)+P(BA)\cdot P(M)$ ………………………………………… 8 分

$=P(A)P(A)+P(A)P(B)P(M)+P(B)P(A)P(M)$

$=p^2+pqP(M)+qpP(M)=p^2+2pqP(M)$，

所以 $(1-2pq)P(M)=p^2$，即 $P(M)=\dfrac{p^2}{1-2pq}$， ………………………………………… 10 分

因为 $p+q=1$，

所以 $P(M)=\dfrac{p^2}{(p+q)^2-2pq}=\dfrac{p^2}{p^2+2pq+q^2-2pq}=\dfrac{p^2}{p^2+q^2}$. ………………………………………… 12 分

22.【解析】(1)由于 $f(x)>x$ 等价于 $e^x-\dfrac{1}{2}x^2-x-1>0$.

令 $h(x)=e^x-\dfrac{1}{2}x^2-x-1$，$x\in(0,+\infty)$，则 $h'(x)=e^x-x-1$， ………………………………………… 1 分

令 $\varphi(x)=e^x-x-1$，则 $\varphi'(x)=e^x-1$， ………………………………………… 2 分

因为 $x\in(0,+\infty)$，所以 $\varphi'(x)=e^x-1>0$，即 $h'(x)=e^x-x-1$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

所以 $h'(x)>h'(0)=0$，故 $h(x)=e^x-\dfrac{1}{2}x^2-x-1$ 为增函数，

所以 $h(x)>h(0)=0$,即 $f(x)>x$ 成立. ………………………………………………………………… 4 分

(2)由已知 $F(x)=f(x)-g(x)=e^x-ax\sin x-x-1$,

当 $x\in(0,\pi)$时,因为 $x>\sin x$,所以 $x\sin x<x^2$,

由(1)知当 $a\leqslant\frac{1}{2}$时,$F(x)=e^x-ax\sin x-x-1>e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1>0$,

此时当 $x\in(0,\pi)$时,函数 $y=F(x)$没有零点,不合题意,故舍去; ………………………………………… 6 分

当 $a>\frac{1}{2}$时,因为 $F(x)=e^x-ax\sin x-x-1$,所以 $F'(x)=e^x-a(x\cos x+\sin x)-1$,

设 $G(x)=F'(x)=e^x-a(x\cos x+\sin x)-1$,所以 $G'(x)=e^x+a(x\sin x-2\cos x)$.

当 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$时,$G'(x)>0$ 恒成立,所以 $G(x)$即 $F'(x)$单调递增;

当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时,设 $k(x)=G'(x)=e^x+a(x\sin x-2\cos x)$,

所以 $k'(x)=e^x+a(3\sin x+x\cos x)$.

因为 $e^x>0$,$a(3\sin x+x\cos x)\geqslant0$,所以 $k'(x)>0$,所以 $k(x)$即 $G'(x)$单调递增.

又 $G'(0)=1-2a<0$,$G'\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}a>0$,

因此 $G'(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上存在唯一的零点 $x_0$,且 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. ………………………………… 8 分

当 $x\in(0,x_0)$时,$G'(x)<0$,所以 $G(x)$即 $F'(x)$单调递减;

当 $x\in\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$G'(x)>0$,所以 $G(x)$即 $F'(x)$单调递增.

又 $F'(0)=0$,$F'(x_0)<F'(0)=0$,$F'(\pi)=e^\pi+a\pi-1>0$,

因此 $F'(x)$在$(0,\pi]$上存在唯一的零点 $x_1$,且 $x_1\in(x_0,\pi)$. ………………………………………… 10 分

当 $x\in(0,x_1)$时,$F'(x)<0$,所以 $F(x)$单调递减;

当 $x\in(x_1,\pi)$时,$F'(x)>0$,所以 $F(x)$单调递增.

又 $F(0)=0$,$F(x_1)<F(0)=0$,$F(\pi)=e^\pi-\pi-1>0$,

所以 $F(x)$在$(0,x_1)$上没有零点,在$(x_1,\pi)$上存在唯一零点,因此 $F(x)$在$(0,\pi)$上有唯一零点.

综上,实数 $a$ 的取值范围是$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$. ………………………………………………………… 12 分