2022—2023 学年高三年级上学期期末考试

文科数学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x\mid y=\ln(-x)\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$　　B. $\{x\mid -2\leqslant x<0\}$　　C. $\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 1\}$　　D. $\{x\mid x\geqslant -2\}$

2. 已知在复平面内，复数 z 所对应的点为 $(1,4)$，则 $\frac{z}{2-3\mathrm{i}}=$

A. $-\frac{10}{13}+\frac{11}{13}\mathrm{i}$　　B. $\frac{10}{13}+\frac{11}{13}\mathrm{i}$　　C. $-\frac{10}{13}-\frac{11}{13}\mathrm{i}$　　D. $\frac{10}{13}-\frac{11}{13}\mathrm{i}$

3. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，直线 $l:x=4$ 与 C 交于 A,B 两点，若 $|AB|=4\sqrt{6}$，则 $|AF|=$

A. 4　　B. $\frac{9}{2}$　　C. 5　　D. $\frac{11}{2}$

4. 已知向量 $\boldsymbol{m}=(t,1)$，$\boldsymbol{n}=(-2t,1)$，若 $|2\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}|^2=4\boldsymbol{m}^2+\boldsymbol{n}^2$，则 $t^2=$

A. $\sqrt{2}$　　B. 1　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

5. 已知在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，AD_1，A_1D 交于点 O，则

A. $OB\perp$ 平面 ACC_1A_1　　B. $OB\perp$ 平面 A_1B_1CD

C. $OB\,/\!/$ 平面 CD_1B_1　　D. $OB\perp BC_1$

6. 为了处理大数的运算，许凯与斯蒂菲尔两位数学家都想到了构造双数列模型的方法，如计算 256 ×4 096 时，我们发现 256 是 8 个 2 相乘，4 096 是 12 个 2 相乘，这两者的乘积，其实就是 2 的个数做一个加法，所以只需要计算 8 + 12 = 20，进而找到下表中对应的数字 1 048 576，即 256 ×4 096 = 1 048 576. 记 $a=\log_{\frac{1}{5}}(645\ 988\times 20\ 000\ 000)+\log_2 8\ 192$，则 $a\in$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024
n	11	12	…	19	20	21	22	23	24	25	…
2^n	2 048	4 096	…	524 288	1 048 576	2 097 152	4 194 304	8 388 608	16 777 216	33 554 432	…

A. $(-1,0)$　　B. $(-2,-1)$　　C. $(-3,-2)$　　D. $(-4,-3)$

7. 已知点 $M(0,2\sqrt{2})$，$N(0,-2\sqrt{2})$，若在直线 $l:mx-ny=0(m>0,n>0)$ 上存在点 A，使得 $|AM|-|AN|=2\sqrt{6}$，则

A. $m>n+2\sqrt{6}$　　B. $m<n+2\sqrt{6}$　　C. $m>\sqrt{3}n$　　D. $m<\sqrt{3}n$

8. 已知正数 a,b 满足 $a+b=3$，若 $a^5+b^5\geqslant\lambda ab$ 恒成立，则实数 λ 的取值范围为

A. $\left(-\infty,\frac{81}{2}\right]$　　B. $\left(-\infty,\frac{27}{4}\right]$　　C. $\left(-\infty,\frac{81}{4}\right]$　　D. $\left(-\infty,\frac{27}{2}\right]$

9. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，且当 $x\leqslant0$ 时，$f(x)=1.1^x-x-1$，则不等式 $f\left(\frac{1}{4^x}\right)+\frac{10}{11}>0$ 的解集为

A. $(-\infty,0)$　　B. $(0,+\infty)$　　C. $(-\infty,1)$　　D. $(1,+\infty)$

10. 已知在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，若 $A=\frac{\pi}{3}$，$4S_{\triangle ABC}+3\sqrt{3}a^2=\frac{8\sqrt{3}}{3}b^2$（$S_{\triangle ABC}$表示 $\triangle ABC$ 的面积），则 $\cos B=$

A. $\frac{3}{14}$　　B. $\frac{\sqrt{7}}{14}$　　C. $-\frac{\sqrt{7}}{14}$　　D. $-\frac{3}{14}$

11. 若函数 $f(x)=(2a-x)\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，则实数 a 的取值范围为

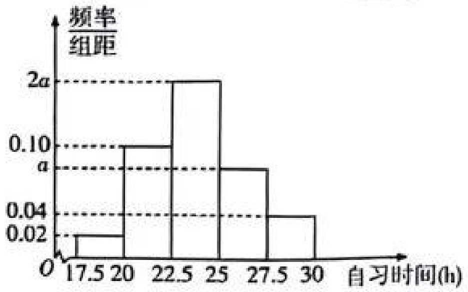
A. $\left(-\infty,-\frac{1}{e^2}\right]$　　B. $\left(-\infty,-\frac{1}{e}\right]$　　C. $(-\infty,0]$　　D. $\left(-\infty,-\frac{1}{2e^2}\right]$

12. 已知正四棱锥 $S-ABCD$ 的外接球半径为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$，底面边长为 2，$SA>2$. 若 SC 垂直于过点 A 的平面 α，则平面 α 截正四棱锥 $S-ABCD$ 所得的截面面积为

A. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$　　C. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{8}{3}$

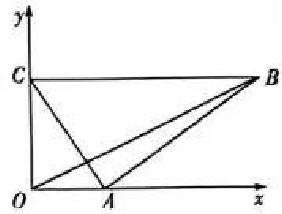
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 为了解某专业大一新生的学习生活情况，辅导员将该专业部分学生一周的自习时间（单位：h）统计后制成如图所示的统计图，则 $a=$ ________.



14. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\omega\pi}{3}\right)$，$g(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\omega\pi}{3}\right)$，$\omega>0$，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象的对称轴相同，则 ω 的一个值为__________.

15. 在通用技术课程上，老师教大家利用现有工具研究动态问题. 如图，老师事先给学生准备了一张坐标纸及一个三角板，三角板的三个顶点记为 A,B,C，$|AC|=2$，$|AB|=2\sqrt{3}$，$|BC|=4$. 现移动边 AC，使得点 A,C 分别在 x 轴、y 轴的正半轴上运动，则 $|OB|$（点 O 为坐标原点）的最大值为__________.



16. 过动点 A 作直线 l 与圆 $C:x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 相切于点 B，若 $|AB|=\sqrt{2}|AO|$（O 为坐标原点），且 $|AB|\leqslant\lambda$，则实数 λ 的取值范围为__________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22,23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）

近年来，各地电商行业迅速发展，电商行业的从业人数也相应增长. 现将某地近 5 年电商行业的从业人数统计如下表所示.

第 x 年	1	2	3	4	5
从业人数 y(万人)	5	8	11	11	15

（Ⅰ）若 y 与 x 线性相关，求 y 与 x 之间的回归直线方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$；

（Ⅱ）已知甲、乙、丙、丁、戊 5 名大学生今年毕业，其中 3 人的就业意向为电商行业，其余 2 人的就业意向为金融行业，若从这 5 人中随机抽取 3 人，求至少有 2 人的就业意向为电商行业的概率.

参考公式：在线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中，$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

18.（12 分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_4+a_{12}=16$，$S_7=28$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

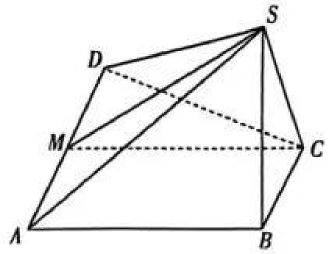
（Ⅱ）若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\dfrac{4a_n}{3^{a_n}}$，且 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求满足不等式 $a_n\cdot|T_n-3|>1$ 的 n 的值.

19.（12 分）

如图所示，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，$BC//AD$，M 为棱 AD 的中点，$BC=SC=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}SD=\frac{1}{2}AB=2$，$\angle ABC=90°$，平面 $SCM\perp$ 平面 $ABCD$.

(Ⅰ)求证:$SC\perp$平面 SAD;

(Ⅱ)求点 M 到平面 SCD 的距离.



20. (12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$,过右焦点且与 x 轴垂直的直线 l 与椭圆 C 交于 M,N 两点,且 $|MN|=3\sqrt{2}$.

(Ⅰ)求椭圆 C 的方程.

(Ⅱ)若过点 $(0,\sqrt{2})$ 的直线 l' 与椭圆 C 交于 P,Q 两点,点 R 的坐标为 $(x_0,3\sqrt{2})$,且 $QR\perp x$ 轴,探究:直线 PR 是否过定点? 若是,请求出定点坐标;若不是,请说明理由.

21. (12 分)

已知函数 $f(x)=e^x+\frac{x^3}{2}-x^2-2ax(a\in\mathbf{R})$.

(Ⅰ)设函数 $m(x)=\frac{f(x)+2ax}{x}$,判断 $m(x)$ 的单调性;

(Ⅱ)若当 $x\geqslant0$ 时,关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant\frac{x^3}{2}+\cos x$ 恒成立,求 a 的取值范围.

(二)选考题:共 10 分. 请考生在第 22,23 题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4:坐标系与参数方程](10 分)

已知在平面直角坐标系 xOy 中,直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{3}+2t,\\y=3-2\sqrt{3}t\end{cases}$($t$ 为参数),以坐标原点 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴,建立极坐标系,曲线 C 的极坐标方程为 $\rho(1+\cos 2\theta)=2\sin\theta$,点 P 的极坐标为 $\left(8,\frac{2\pi}{3}\right)$.

(Ⅰ)求直线 l 的极坐标方程以及曲线 C 的直角坐标方程;

(Ⅱ)记 M 为直线 l 与曲线 C 的一个交点,其中 $|OM|<4$,求 $\triangle OMP$ 的面积.

23. [选修 4-5:不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x)=|2x+m|+|x-4|$,$g(x)=2x^2-4x+3$.

(Ⅰ)若 $m=3$,求不等式 $f(x)>7$ 的解集;

(Ⅱ)若 $\forall x_1\in\mathbf{R}$,$\exists x_2\in\mathbf{R}$,使得 $f(x_1)\geqslant g(x_2)$ 成立,求实数 m 的取值范围.

天一大联考

2022—2023 学年高三年级上学期期末考试

文科数学·答案（新）

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

1. 答案　B

命题意图　本题考查函数的定义域及集合的运算.

解析　依题意，$B=\{x|-x>0\}=\{x|x<0\}$，则 $A\cap B=\{x|-2\leqslant x<0\}$.

2. 答案　A

命题意图　本题考查复数的几何意义、复数的四则运算.

解析　依题意，$\frac{z}{2-3i}=\frac{1+4i}{2-3i}=\frac{(1+4i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=-\frac{10}{13}+\frac{11}{13}i$.

3. 答案　D

命题意图　本题考查抛物线的定义与方程.

解析　不妨设点 A 在第一象限，则 $A(4,2\sqrt{6})$，代入 $y^2=2px$ 中，解得 $p=3$. 故 $|AF|=x_A+\frac{p}{2}=4+\frac{3}{2}=\frac{11}{2}$.

4. 答案　D

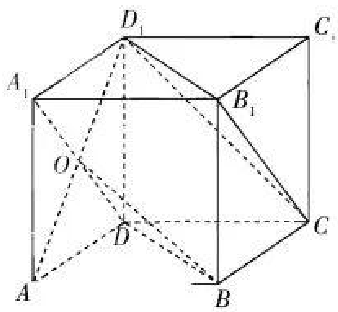
命题意图　本题考查平面向量的数量积及其应用.

解析　依题意，$2\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}=(2t,2)-(-2t,1)=(4t,1)$，故 $16t^2+1=4t^2+4+4t^2+1$，则 $t^2=\frac{1}{2}$.

5. 答案　C

命题意图　本题考查空间线面的位置关系.

解析　作出图形如图所示，连接 BD，因为 $BD// B_1D_1$，$OD// B_1C$，所以平面 $OBD//$ 平面 CD_1B_1，故 $OB//$ 平面 CD_1B_1，其他三个选项易知是错误的.



6. 答案　B

命题意图　本题考查对数的运算、数学文化.

解析　因为 $645\ 988\in(524\ 288,1\ 048\ 576)$，$20\ 000\ 000\in(16\ 777\ 216,33\ 554\ 432)$，故 $\log_2 645\ 988\in(19,20)$，$\log_2 20\ 000\ 000\in(24,25)$，则 $\log_2(645\ 988\times 20\ 000\ 000)\in(43,45)$，则 $\log_{\frac{1}{8}}(645\ 988\times 20\ 000\ 000)=-\frac{1}{3}\log_2(645\ 988\times 20\ 000\ 000)\in\left(-15,-\frac{43}{3}\right)$，而 $\log_2 8\ 192=\log_2 2+\log_2 4\ 096=13$，故 $a\in\left(-2,-\frac{4}{3}\right)$，故选 B.

7. 答案　C

命题意图 本题考查双曲线的定义与性质.

解析 由题可知点 A 在双曲线 $C:\frac{y^2}{6}-\frac{x^2}{2}=1$ 的下支上,故直线 l 与曲线 C 有交点. 而曲线 C 的渐近线为 $y=\pm\sqrt{3}x$,直线 $l:y=\frac{m}{n}x$,故 $\frac{m}{n}>\sqrt{3}$,即 $m>\sqrt{3}n$. 来源：高三答案公众号

8. **答案** B

命题意图 本题考查基本不等式.

解析 依题意,$\frac{a^4}{b}+\frac{b^4}{a}\geqslant\lambda$. 而 $\frac{a^4}{b}+\frac{b^4}{a}=\frac{\left(\frac{a^4}{b}+\frac{b^4}{a}\right)(a+b)}{3}=\frac{\frac{a^5}{b}+\frac{b^5}{a}+a^4+b^4}{3}\geqslant\frac{2\sqrt{\frac{a^5}{b}\cdot\frac{b^5}{a}}+a^4+b^4}{3}=\frac{a^4+b^4+2a^2b^2}{3}=\frac{(a^2+b^2)^2}{3}\geqslant\frac{(a+b)^4}{12}=\frac{27}{4}$,当且仅当 $a=b$,即 $a=\frac{3}{2}$,$b=\frac{3}{2}$时前后两个不等号中的等号同时成立,所以 λ 的取值范围为$\left(-\infty,\frac{27}{4}\right]$.

9. **答案** B

命题意图 本题考查函数的图象与性质.

解析 当 $x\leqslant0$ 时,$f'(x)=1.1^x\ln1.1-1\leqslant\ln1.1-1<0$,故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减. 又 $f(x)$ 为奇函数,故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减. 而 $f(-1)=\frac{10}{11}$,则 $f(1)=-\frac{10}{11}$,故 $f\left(\frac{1}{4^x}\right)+\frac{10}{11}>0\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{4^x}\right)>f(1)\Leftrightarrow4^{-x}<1\Leftrightarrow x>0$.

10. **答案** C

命题意图 本题考查余弦定理、三角形的面积公式.

解析 由余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,即 $a^2=b^2+c^2-bc$ ①. 又 $4S_{\triangle ABC}+3\sqrt{3}a^2=\frac{8\sqrt{3}}{3}b^2$,即 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{12}(8b^2-9a^2)=\frac{1}{2}bc\sin A$ ②,将①代入②可得$\frac{\sqrt{3}}{12}[8b^2-9(b^2+c^2-bc)]=\frac{\sqrt{3}}{4}bc$,整理可得 $b^2-6bc+9c^2=0$,则 $b=3c$,此时 $a=\sqrt{b^2+c^2-bc}=\sqrt{7}c$,由余弦定理可得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\frac{\sqrt{7}}{14}$.

11. **答案** D

命题意图 本题考查利用导数研究函数的性质.

解析 依题意,$f'(x)=\frac{2a}{x}-\ln x-1$,令 $f'(x)\leqslant0$,则 $2a\leqslant x(\ln x+1)$. 令 $h(x)=x(\ln x+1)$,则 $h'(x)=\ln x+2$. 令 $h'(x)=0$,则 $x=\frac{1}{e^2}$,故当 $x\in\left(0,\frac{1}{e^2}\right)$时,$h'(x)<0$,当 $x\in\left(\frac{1}{e^2},+\infty\right)$时,$h'(x)>0$,故 $h(x)$ 在$\left(0,\frac{1}{e^2}\right)$上单调递减,在$\left(\frac{1}{e^2},+\infty\right)$上单调递增,故 $h(x)_{\min}=h\left(\frac{1}{e^2}\right)=-\frac{1}{e^2}$,故 $2a\leqslant-\frac{1}{e^2}$,则 $a\leqslant-\frac{1}{2e^2}$,故实数 a 的取值范围为$\left(-\infty,-\frac{1}{2e^2}\right]$.

12. **答案** A

命题意图 本题考查空间几何体的表面积与体积.

解析 设正四棱锥 $S-ABCD$ 的高为 h,其外接球的半径为 R. 因为 $R^2=(h-R)^2+2$,解得 $h=\sqrt{6}$或 $h=\frac{\sqrt{6}}{3}$. 当 $h=\frac{\sqrt{6}}{3}$时,$SA=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+(\sqrt{2})^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}<2$,不符合题意;当 $h=\sqrt{6}$时,$SA=AC=SC=2\sqrt{2}$,所以$\triangle SAC$ 为等边三角形. 取 SC 的中点 E,连接 AE,则 $AE\perp SC$,且 $AE=\sqrt{6}$. 设平面 $\alpha\cap$直线 $SB=F$,平面 $\alpha\cap$直线 $SD=H$,则

$EF \perp SC, EH \perp SC$. 在$\triangle SBC$中，由余弦定理可得$\cos\angle BSC = \frac{8+8-4}{2\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}} = \frac{3}{4}$，所以$SF = \frac{SE}{\cos\angle BSC} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$. 在$\triangle SBD$中，$FH /\!/ BD$，故$\frac{FH}{BD} = \frac{SF}{SB} = \frac{2}{3}$，故$FH = \frac{2}{3}BD = \frac{4\sqrt{2}}{3}$. 在四边形$AFEH$中，$AE \perp FH$，故$S_{AFEH} = \frac{1}{2}AE \cdot FH = \frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. 来源：高三答案公众号

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. **答案** 0.08

命题意图 本题考查频率分布直方图.

解析 依题意，$(0.02+0.04+0.10+a+2a)\times2.5=1$，解得$a=0.08$.

14. **答案** $\frac{3}{2}$(其他符合条件的答案也给分)

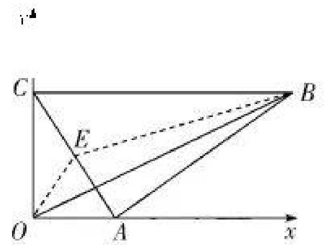
命题意图 本题考查三角函数的图象与性质.

解析 因为$f(x)$与$g(x)$的图象的对称轴相同，所以$\frac{\omega\pi}{3} = -\frac{\omega\pi}{3} + k\pi(k\in\mathbf{Z})$，故$\omega = \frac{3k}{2}(k\in\mathbf{Z})$，因为$\omega>0$，故$\omega = \frac{3k}{2}(k\in\mathbf{N}^*)$.

15. **答案** $1+\sqrt{13}$

命题意图 本题考查数学文化.

解析 如图，取AC的中点E，因为$\triangle OAC$为直角三角形，故$|OE| = \frac{1}{2}|AC| = 1$. 由于$\triangle ABC$为直角三角形，故$|BE| = \sqrt{|AB|^2+|AE|^2} = \sqrt{13}$，显然$|OB| \leqslant |OE|+|BE|$，当且仅当$O,B,E$三点共线时等号成立，故$|OB|$的最大值为$1+\sqrt{13}$.



16. **答案** $[2+\sqrt{6},+\infty)$

命题意图 本题考查圆的方程、直线与圆的位置关系.

解析 圆C的方程可化为$(x-1)^2+(y-1)^2=1$. $|AB| = \sqrt{2}|AO| \Rightarrow |AC|^2-1 = 2|AO|^2$，设$A(x,y)$，则$(x-1)^2+(y-1)^2-1 = 2(x^2+y^2)$，化简得$(x+1)^2+(y+1)^2=3$，故点$A$的轨迹是以$(-1,-1)$为圆心、$\sqrt{3}$为半径的圆，设该圆的圆心为$M$，则$|AC|_{\max} = |MC|+\sqrt{3} = 2\sqrt{2}+\sqrt{3}$，故$|AB|_{\max} = 2+\sqrt{6}$，则实数$\lambda$的取值范围为$[2+\sqrt{6},+\infty)$.

三、解答题：共70分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查回归直线方程、古典概型.

解析 (Ⅰ)依题意，$\bar{x}=3$，$\bar{y} = \frac{5+8+11+11+15}{5} = 10$，…………………………………………（1分）

而$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i = 5+16+33+44+75 = 173$，$\sum_{i=1}^{5}x_i^2 = 1+4+9+16+25 = 55$，…………………………（3分）

故 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}=\dfrac{173-5\times3\times10}{55-5\times3^2}=2.3,\hat{a}=10-2.3\times3=3.1,$ ………………………… (5 分)

故所求回归直线方程为 $\hat{y}=2.3x+3.1$. ………………………………………… (6 分)

(Ⅱ)就业意向为金融行业的 2 人记为 A,B,就业意向为电商行业的 3 人记为 a,b,c.

任取 3 人,所有的情况为 $(A,B,a),(A,B,b),(A,B,c),(A,a,b),(A,a,c),(A,b,c),(B,a,b),(B,a,c),(B,b,c),(a,b,c)$,共 10 种, ………………………………………… (8 分)

其中满足条件的为 $(A,a,b),(A,a,c),(A,b,c),(B,a,b),(B,a,c),(B,b,c),(a,b,c)$,共 7 种, …… (10 分)

故所求概率 $P=\dfrac{7}{10}$. ………………………………………… (12 分)

18. **命题意图** 本题考查等差数列的通项公式、错位相减法、数列的性质.

解析 (Ⅰ)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,则 $\begin{cases}a_4+a_{12}=2a_1+14d=16,\\S_7=7a_1+21d=28,\end{cases}$ ………………………… (2 分)

解得 $a_1=d=1$, ………………………………………… (3 分)

故 $a_n=n$. ………………………………………… (4 分)

(Ⅱ)依题意,$b_n=\dfrac{4n}{3^n}$,

故 $T_n=4\cdot\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{3}{3^3}+\cdots+\dfrac{n-1}{3^{n-1}}+\dfrac{n}{3^n}\right)$,

则 $\dfrac{1}{3}T_n=4\cdot\left(\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{2}{3^3}+\dfrac{3}{3^4}+\cdots+\dfrac{n-1}{3^n}+\dfrac{n}{3^{n+1}}\right)$, ………………………… (5 分)

两式相减可得 $\dfrac{2}{3}T_n=4\cdot\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}-\dfrac{n}{3^{n+1}}\right)=4\cdot\left[\dfrac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}-\dfrac{n}{3^{n+1}}\right]=2-\dfrac{4n+6}{3^{n+1}}$,

解得 $T_n=3-\dfrac{2n+3}{3^n}$. ………………………………………… (8 分)

故 $a_n\cdot|T_n-3|>1$ 可转化为 $\dfrac{n(2n+3)}{3^n}>1$. ………………………………………… (9 分)

令 $d_n=\dfrac{n(2n+3)}{3^n}$,则 $d_{n+1}-d_n=\dfrac{(n+1)(2n+5)}{3^{n+1}}-\dfrac{n(2n+3)}{3^n}=\dfrac{-4n^2-2n+5}{3^{n+1}}<0$,

故 $d_{n+1}<d_n$,即 $\{d_n\}$ 单调递减. ………………………………………… (11 分)

注意到 $d_3=1$,所以满足条件的 n 的值为 1,2. ………………………………………… (12 分)

19. **命题意图** 本题考查空间线面的位置关系、空间几何体的体积.

解析 (Ⅰ)因为 $BC=\dfrac{1}{2}AD,AM=\dfrac{1}{2}AD,BC/\!/AD$,

所以 $BC/\!/AM$ 且 $BC=AM$.

而 $\angle ABC=90^\circ$,故四边形 $ABCM$ 为矩形,则 $AD\perp CM$. ………………………………………… (1 分)

因为平面 $SCM\perp$ 平面 $ABCD$,且平面 $SCM\cap$ 平面 $ABCD=CM$,

所以 $AD\perp$ 平面 SCM. ………………………………………… (3 分)

又 $SC\subset$ 平面 SCM,$SM\subset$ 平面 SCM,故 $AD\perp SC$ 且 $AD\perp SM$. ………………………… (4 分)

因为 $SC=2,CM=4,SM=\sqrt{SD^2-MD^2}=2\sqrt{3}$,

所以 $CM^2=SM^2+SC^2$，即 $SM\perp SC$. …………………………………………………………………… (5 分)

而 $SM\cap AD=M$，故 $SC\perp$ 平面 SAD. …………………………………………………………………… (6 分)

(Ⅱ)记点 M 到平面 SCD 的距离为 h. 来源：高三答案公众号

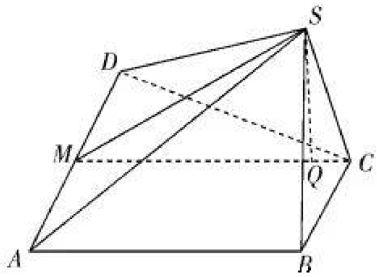
如图，过点 S 作 $SQ\perp CM$，垂足为 Q，则 $SQ\perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $SM\cdot SC=MC\cdot SQ$，故 $SQ=\sqrt{3}$. …………………………………………………………… (7 分)

因为 $SC\perp$ 平面 SAD，所以 $SC\perp SD$. …………………………………………………………… (8 分)

所以 $S_{\triangle SCD}=\frac{1}{2}\times4\times2=4$，$S_{\triangle MCD}=\frac{1}{2}\times2\times4=4$. ……………………………………………… (10 分)

因为 $V_{M-SCD}=V_{S-MCD}$，即 $\frac{1}{3}\times4\times h=\frac{1}{3}\times4\times\sqrt{3}$，故 $h=\sqrt{3}$. …………………………………… (12 分)



20. **命题意图** 本题考查椭圆的方程，直线与椭圆的综合性问题.

解析 (Ⅰ)设椭圆 C 的半焦距为 $c(c>0)$.

依题意，$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{1}{2}$，故 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{4}$①. ………………………………………………… (1 分)

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ x=c,\end{cases}$ 解得 $y=\pm\frac{b^2}{a}$，故 $|MN|=\frac{2b^2}{a}=3\sqrt{2}$②. …………………………………………… (3 分)

联立①②，解得 $a=2\sqrt{2}$，$b=\sqrt{6}$，

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1$. ………………………………………………………………… (4 分)

(Ⅱ)当直线 PR 的斜率不存在时，方程为 $x=0$.

若直线 PR 过定点，则该定点在 y 轴上. …………………………………………………………… (5 分)

当直线 PR 的斜率存在时，设直线 PQ 的方程为 $y=kx+\sqrt{2}$，

联立 $\begin{cases}y=kx+\sqrt{2},\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1,\end{cases}$ 消去 y 整理，得 $(4k^2+3)x^2+8\sqrt{2}kx-16=0$. ……………………………… (6 分)

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=\frac{-8\sqrt{2}k}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\frac{-16}{4k^2+3}$，$R(x_2,3\sqrt{2})$. …………………………………………… (7 分)

所以直线 PR 的方程为 $y-3\sqrt{2}=\frac{y_1-3\sqrt{2}}{x_1-x_2}(x-x_2)$.

令 $x=0$，得 $y=\frac{-x_2y_1+3\sqrt{2}x_2}{x_1-x_2}+3\sqrt{2}$

$=\frac{3\sqrt{2}x_1-x_2y_1}{x_1-x_2}$

$=\dfrac{3\sqrt{2}x_1-x_2(kx_1+\sqrt{2})}{x_1-x_2}$

$=\dfrac{3\sqrt{2}x_1-kx_1x_2-\sqrt{2}x_2}{x_1-x_2}$. ……………………………………………………………………………… (9 分)

因为 $kx_1x_2=\dfrac{-16k}{4k^2+3}=\sqrt{2}(x_1+x_2)$,

所以 $y=\dfrac{3\sqrt{2}x_1-kx_1x_2-\sqrt{2}x_2}{x_1-x_2}=\dfrac{3\sqrt{2}x_1-\sqrt{2}(x_1+x_2)-\sqrt{2}x_2}{x_1-x_2}=\dfrac{2\sqrt{2}x_1-2\sqrt{2}x_2}{x_1-x_2}=2\sqrt{2}$. …………………… (11 分)

所以此时直线 PR 过定点 $(0,2\sqrt{2})$.

直线 $x=0$ 也过点 $(0,2\sqrt{2})$.

综上,直线 PR 经过定点 $(0,2\sqrt{2})$. ……………………………………………………………………… (12 分)

21. **命题意图** 本题考查利用导数研究函数的性质.

解析 (Ⅰ)由题可知 $m(x)=\dfrac{e^x}{x}-x+\dfrac{x^2}{2},x\neq0$,

则 $m'(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}+(x-1)=(x-1)\left(\dfrac{e^x}{x^2}+1\right)$, …………………………………………………………… (2 分)

故当 $x<0$ 时,$m'(x)<0$,当 $0<x<1$ 时,$m'(x)<0$,当 $x>1$ 时,$m'(x)>0$, …………………………………… (3 分)

故 $m(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. ………………………………………… (4 分)

(Ⅱ)依题意,当 $x\geqslant0$ 时,$e^x-\cos x-x^2-2ax\geqslant0$ (*) 恒成立.

令 $g(x)=e^x-x^2-2ax-\cos x,x\in[0,+\infty)$,则 $g'(x)=e^x-2x-2a+\sin x$. ……………………………… (5 分)

令 $h(x)=e^x-2x-2a+\sin x,x\in[0,+\infty)$,则 $h'(x)=e^x+\cos x-2$.

令 $r(x)=e^x+\cos x-2,x\in[0,+\infty)$,则 $r'(x)=e^x-\sin x>0$,故 $r(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.

则 $r(x)\geqslant r(0)=0$,故 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,则 $h(x)\geqslant h(0)=1-2a$. ……………………… (7 分)

当 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时,$h(x)\geqslant h(0)=1-2a\geqslant0$,此时 $g(x)$ 单调递增,从而 $g(x)\geqslant g(0)=0$,满足题意. ………… (8 分)

当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时,令 $s(x)=e^x-ex$,则 $s'(x)=e^x-e$,

当 $x\in(-\infty,1)$ 时,$s'(x)<0$,$s(x)$ 单调递减,当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$s'(x)>0$,$s(x)$ 单调递增,

所以 $s(x)\geqslant s(1)=0$,即 $e^x\geqslant ex$,当且仅当 $x=1$ 时取等号.

所以 $g'(x)=e^x-2x-2a+\sin x>(e-2)x-1-2a$,

从而 $g'\left(\dfrac{1+2a}{e-2}\right)>(e-2)\cdot\dfrac{1+2a}{e-2}-1-2a=0$. ……………………………………………………… (10 分)

又 $g'(0)=1-2a<0$,$g'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,故存在唯一的实数 $x_0\in\left(0,\dfrac{1+2a}{e-2}\right)$,使得 $g'(x_0)=0$,

且当 $x\in(0,x_0)$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$ 单调递减,

所以当 $x\in(0,x_0)$ 时,$g(x)<g(0)=0$,不合题意,舍去. …………………………………………………… (11 分)

综上所述,实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$. ……………………………………………………………… (12 分)

22. **命题意图** 本题考查参数方程、极坐标方程、普通方程、直角坐标方程之间的转化.

解析 (Ⅰ)由直线 l 的参数方程可得直线 l 的普通方程为 $\sqrt{3}x+y=6$,

将 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$ 代入得 $\sqrt{3}\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=2\rho\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=6$,

故直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=3$. …………………………………………………………… (3 分)

而曲线 $C:\rho(1+\cos 2\theta)=2\sin\theta$，即 $2\rho\cos^2\theta=2\sin\theta$，则 $\rho^2\cos^2\theta=\rho\sin\theta$，

故曲线 C 的直角坐标方程为 $y=x^2$. ……………………………………………………………………… (5 分)

(Ⅱ) 由 $\begin{cases}\sqrt{3}x+y-6=0,\\ y=x^2,\end{cases}$

可得 $\begin{cases}x=\sqrt{3},\\ y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-2\sqrt{3},\\ y=12.\end{cases}$ ……………………………………………………………… (7 分)

因为 $|OM|<4$，所以点 $M(\sqrt{3},3)$，转化为极坐标为 $M\left(2\sqrt{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$. ……………………………… (8 分)

由于点 P 的极坐标为 $\left(8,\dfrac{2\pi}{3}\right)$，

故 $\triangle OMP$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 8\times\sin\dfrac{\pi}{3}=12$. …………………………………………… (10 分)

23. **命题意图** 本题考查绝对值不等式的求解.

解析 (Ⅰ) 依题意，$|2x+3|+|x-4|>7$.

当 $x<-\dfrac{3}{2}$ 时，$-2x-3+4-x>7$，解得 $x<-2$，故 $x<-2$；………………………………………… (2 分)

当 $-\dfrac{3}{2}\leqslant x\leqslant 4$ 时，$2x+3+4-x>7$，解得 $x>0$，故 $0<x\leqslant 4$；……………………………… (3 分)

当 $x>4$ 时，$2x+3+x-4>7$，解得 $x>\dfrac{8}{3}$，故 $x>4$. ……………………………………………… (4 分)

综上所述，不等式 $f(x)>7$ 的解集为 $\{x\mid x<-2$ 或 $x>0\}$. ……………………………………………… (5 分)

(Ⅱ) 依题意，$f(x)=|2x+m|+|x-4|\geqslant\left|x+\dfrac{m}{2}\right|+|x-4|\geqslant\left|\dfrac{m}{2}+4\right|$，

当 $x=-\dfrac{m}{2}$ 时，取"="，故 $f(x)_{\min}=\left|\dfrac{m}{2}+4\right|$. ……………………………………………… (7 分)

$g(x)=2x^2-4x+3=2(x-1)^2+1$. ………………………………………………………………………… (8 分)

因为 $\forall x_1\in\mathbf{R}$，$\exists x_2\in\mathbf{R}$，使得 $f(x_1)\geqslant g(x_2)$ 成立，故 $\left|\dfrac{m}{2}+4\right|\geqslant 1$，

故 $\dfrac{m}{2}+4\leqslant -1$ 或 $\dfrac{m}{2}+4\geqslant 1$，则 $m\leqslant -10$ 或 $m\geqslant -6$，

故实数 m 的取值范围为 $(-\infty,-10]\cup[-6,+\infty)$. ………………………………………………… (10 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。