齐鲁名校联盟 2022—2023 学年高三年级联考

数学·答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. B　　2. A　　3. D　　4. B　　5. B　　6. C

7. A　　8. C

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. AD　　10. BC　　11. ABD　　12. BC

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. $90°$　　14. 240

15. -8　　16. $\dfrac{\sqrt{30}}{30}$

四、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **解析**　(Ⅰ)如图,在$\triangle ABD$中,由正弦定理可得$\dfrac{BD}{\sin\angle BAD}=\dfrac{AD}{\sin\angle ABD}$, ………………(1 分)

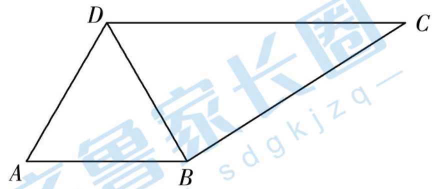
在$\triangle BCD$中,由正弦定理可得$\dfrac{BD}{\sin\angle BCD}=\dfrac{BC}{\sin\angle BDC}$. ………………(2 分)

因为$AB\,/\!/\,CD$,所以$\angle ABD=\angle BDC$,所以$\dfrac{\sin\angle BAD}{\sin\angle BCD}=\dfrac{BC}{AD}$. ………………(3 分)

而$BC=\sqrt{3}AD$,$\angle BAD=2\angle BCD$,故$\dfrac{\sin 2\angle BCD}{\sin\angle BCD}=\sqrt{3}$, ………………(4 分)

得$\cos\angle BCD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ………………(5 分)

因为$0°<\angle BCD<180°$,故$\angle BCD=30°$,故$\angle ABC=150°$. ………………(6 分)



(Ⅱ)因为$\angle BAD=2\angle BCD=60°$,且$\angle ABD=\angle ADB$,

故$AB=AD=BD$,$\triangle ABD$为等边三角形. ………………(7 分)

所以$\angle DBC=180°-60°-30°=90°$,

因为$CD=4$,所以$BD=2$. ………………(9 分)

故梯形$ABCD$的面积$S=\dfrac{1}{2}\times(2+4)\times2\times\sin60°=3\sqrt{3}$. ………………(10 分)

18. **解析**　(Ⅰ)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,则$\begin{cases}a_4=a_1+3d=13,\\ S_6=6a_1+15d=72,\end{cases}$ ………………(2 分)

解得$a_1=7$,$d=2$,故$a_n=2n+5$. ………………(3 分)

因为$3T_n=4b_n-4$,所以当$n=1$时,$b_1=4$. ………………(4 分)

当$n\geqslant2$时,$3T_n=4b_n-4$,$3T_{n-1}=4b_{n-1}-4$,

两式相减可得 $3b_n=4b_n-4b_{n-1}$，得 $b_n=4b_{n-1}$，由题易知 $b_n\neq0$，则 $\frac{b_n}{b_{n-1}}=4$.

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 4 为首项，4 为公比的等比数列，…………（5 分）

故 $b_n=4^n$. …………（6 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $\sqrt{b_n}=2^n$，故 $R_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$. …………（7 分）

$c_n=\frac{(a_n-5)\cdot b_n}{2^{n+1}}=\frac{2n\cdot4^n}{2^{n+1}}=n\cdot2^n$，

所以 $Q_n=1\times2^1+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\times2^n$，

$2Q_n=1\times2^2+2\times2^3+3\times2^4+\cdots+n\times2^{n+1}$，…………（8 分）

两式相减可得 $-Q_n=2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^n-n\times2^{n+1}=(1-n)\times2^{n+1}-2$，…………（9 分）

故 $Q_n=(n-1)\times2^{n+1}+2$. …………（11 分）

故 $\frac{Q_n+R_n}{c_n}=\frac{n\times2^{n+1}-2^{n+1}+2+2^{n+1}-2}{n\times2^n}=2$，为定值. …………（12 分）

19. **解析**　（Ⅰ）因为 $\angle BCA=\angle BAC$，所以 $AB=BC$，

而 E 为 AC 的中点，所以 $BE\perp AC$. …………（1 分）

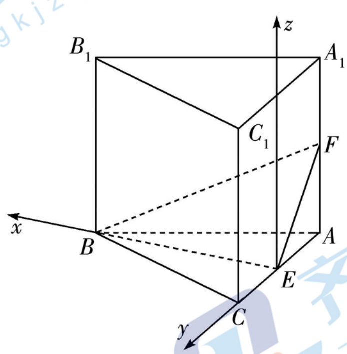
因为 $A_1A\perp$ 平面 ABC，$BE\subset$ 平面 ABC，所以 $A_1A\perp BE$. …………（2 分）

又 $A_1A\cap AC=A$，所以 $BE\perp$ 平面 ACC_1A_1. …………（3 分）

因为 $BE\subset$ 平面 BEF，所以平面 $BEF\perp$ 平面 ACC_1A_1. …………（4 分）

（Ⅱ）因为 $\cos\angle ACB=\frac{\sqrt5}{5}$，设 $AB=BC=\sqrt5$，则 $AC=2$，$BE=2$. …………（5 分）

以 E 为坐标原点，以 EB，EC 所在直线分别为 x，y 轴，过点 E 与平面 ABC 垂直的直线为 z 轴，建立空间直角坐标系如图，



设 $AF=t(t>0)$，则 $AA_1=2t$，$E(0,0,0)$，$F(0,-1,t)$，$A(0,-1,0)$，$B(2,0,0)$，

所以 $\overrightarrow{EB}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{EF}=(0,-1,t)$，$\overrightarrow{AF}=(0,0,t)$，$\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$. …………（6 分）

设平面 BEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2x_1=0,\\-y_1+tz_1=0,\end{cases}$ 令 $z_1=1$，则 $\boldsymbol{n}=(0,t,1)$. …………（8 分）

设平面 ABF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}tz_2=0,\\2x_2+y_2=0,\end{cases}$ 令 $x_2=1$，则 $\boldsymbol{m}=(1,-2,0)$. …………（9 分）

所以 $|\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle| = \dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|} = \dfrac{|-2t|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{t^2+1}} = \dfrac{2t}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{t^2+1}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{5}$,解得 $t=3$. ………………………… (11 分)

故 $\dfrac{AA_1}{AC} = \dfrac{6}{2} = 3$. ………………………………………………………………………………………… (12 分)

20. **解析** (Ⅰ)小明在 9 月选择项目 B,则小明在 10 月选择项目 A,B,C 的概率分别为 0.3,0.1,0.6, … (1 分)

小明在 11 月选择项目 B 的概率 $P=0.3\times0.2+0.1\times0.1+0.6\times0.6=0.43$. ……………………………… (4 分)

(Ⅱ)依题意,X 的所有可能取值为 12 000,13 000,14 000,15 000,16 000,

$P(X=12\ 000)=0.1\times0.1=0.01$,

$P(X=13\ 000)=0.3\times0.2+0.1\times0.3=0.09$,

$P(X=14\ 000)=0.3\times0.4+0.1\times0.6+0.6\times0.6=0.54$,

$P(X=15\ 000)=0.3\times0.4+0.6\times0.2=0.24$,

$P(X=16\ 000)=0.6\times0.2=0.12$, ……………………………………………………………………………… (8 分)

故 X 的分布列为:

X	12 000	13 000	14 000	15 000	16 000
P	0.01	0.09	0.54	0.24	0.12

…… (10 分)

故 $E(X)=12\ 000\times0.01+13\ 000\times0.09+14\ 000\times0.54+15\ 000\times0.24+16\ 000\times0.12=14\ 370$.

…… (12 分)

21. **解析** (Ⅰ)依题意,$f'(x)=2(x-a)\left(\dfrac{e^x-1}{e^x}\right)$, ………………………………………………… (1 分)

令 $f'(x)=0$,得 $x=a$ 或 $x=0$. ……………………………………………………………………… (2 分)

若 $a>0$,当 $x\in(-\infty,0)$ 时,$f'(x)>0$,当 $x\in(0,a)$ 时,$f'(x)<0$,当 $x\in(a,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,此时 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点,符合题意; ………………………………………………………………………… (3 分)

若 $a=0$,则 $f'(x)\geqslant0$,不符合题意,舍去; ……………………………………………………………… (4 分)

若 $a<0$,当 $x\in(-\infty,a)$ 时,$f'(x)>0$,当 $x\in(a,0)$ 时,$f'(x)<0$,当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,此时 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点,不符合题意,舍去. ……………………………………………………………… (5 分)

综上所述,实数 a 的取值范围为 $(0,+\infty)$. ……………………………………………………………… (6 分)

(Ⅱ)当 $a>0$ 时,令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{2}+a-1=\dfrac{1}{2}x^2-ax+\dfrac{x-a+1}{e^x}-(1-a)$,

观察可知,$g(x)$,$f(x)$ 单调性相同,由(Ⅰ)可知,当 $a>0$ 时,$g(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减,在 $(a,+\infty)$ 上单调递增,故 $g(a)<g(0)=0$. ……………………………………………………………………………… (8 分)

下面证明 $g(2a)=\dfrac{a+1}{e^{2a}}-(1-a)>0$.

设 $h(x)=\dfrac{x+1}{e^{2x}}+x-1$,则 $h'(x)=\dfrac{e^{2x}-2x-1}{e^{2x}}$, ……………………………………………… (9 分)

设 $\varphi(x)=e^x-x-1$,则 $\varphi'(x)=e^x-1$,

当 $x<0$ 时,$\varphi'(x)<0$,当 $x>0$ 时,$\varphi'(x)>0$,

所以 $\varphi(x)\geqslant\varphi(0)=0$, ……………………………………………………………………………… (10 分)

所以 $h'(x)\geqslant0$,故 $h(x)$ 单调递增,

所以 $g(2a)=h(a)>h(0)=0$. ……………………………………………………………………………… (11 分)

根据零点存在性定理,$g(x)$ 在 $(a,2a)$ 内存在唯一正零点,即原命题得证. ……………………… (12 分)

22. **解析** （Ⅰ）设双曲线 $C:x^2-y^2=\lambda(\lambda>0)$，双曲线的右焦点为 $(c,0)(c>0)$，

则直线 $MN:y=2(x-c)$，其中 $c=\sqrt{2\lambda}$.

联立 $\begin{cases}y=2(x-c),\\x^2-y^2=\lambda,\end{cases}$ 化简可得 $3x^2-8cx+\dfrac{9c^2}{2}=0$. ……（2 分）

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{8c}{3}$，$x_1x_2=\dfrac{3c^2}{2}$. ……（3 分）

$|MN|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{5}\cdot\sqrt{\dfrac{64c^2}{9}-6c^2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{3}c=\dfrac{10\sqrt{2}}{3}$，解得 $c=2$，故 $\lambda=2$. ……（5 分）

故双曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$. ……（6 分）

（Ⅱ）易知直线 MN 一定不与坐标轴垂直，设其方程为 $x=my+n(m\neq0)$.

联立 $\begin{cases}x=my+n,\\x^2-y^2=2,\end{cases}$ 整理得 $(m^2-1)y^2+2mny+n^2-2=0$，

由题易知 $m^2-1\neq0$，则 $y_1y_2=\dfrac{n^2-2}{m^2-1}$. ……（8 分）

由于 $|OQ|=|MQ|$，$|MQ|=|NQ|$，故 Q 为 $\triangle MNO$ 的外接圆圆心，可设外接圆方程为 $x^2+y^2+Ey=0$，

则 $\begin{cases}x_1^2+y_1^2+Ey_1=0,\\x_2^2+y_2^2+Ey_2=0,\end{cases}$ 则 $y_2(x_1^2+y_1^2)=y_1(x_2^2+y_2^2)$，即 $y_2(2y_1^2+2)=y_1(2y_2^2+2)$，……（10 分）

整理得 $2(y_1y_2-1)(y_1-y_2)=0$，由题知 $y_1\neq y_2$，故 $y_1y_2=1=\dfrac{n^2-2}{m^2-1}$. ……（11 分）

所以 $n^2=m^2+1$，故原点到直线 MN 的距离为 $\dfrac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}=1$. ……（12 分）