2023 年普通高等学校招生全国统一考试
数学冲刺卷(二)参考答案

1. A 【命题意图】本题考查集合的运算,要求考生能求两个集合的交集.
【解题分析】由 $B=\{-1,0,1,2\}$,知 $A\cup B=\{-1,0,1,2,4\}$.

2. D 【命题意图】本题考查复数的运算,要求考生能进行复数代数形式的四则运算.
【解题分析】$\frac{-1+2i}{1+i}=\frac{(-1+2i)(1-i)}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$.

3. B 【命题意图】本题考查导数,要求考生能利用导数公式求简单函数的导数.
【解题分析】由题意知 $\begin{cases}f(1)=f'(0)+f(1)-2\\ f'(0)=f(1)\end{cases}$,解得 $f'(0)=f(1)=2$,则 $f(x)=2x^2+2x-2$,故 $f(2)=10$.

4. A 【命题意图】本题考查简易逻辑,要求考生理解必要条件、充分条件与充要条件的意义.
【解题分析】当 $a=1,b=0$ 时,$a^3=b^3+1$;当 $a^3>b^3+1$ 时,$a^3>b^3$,即 $a>b$. 故"$a>b$"是"$a^3>b^3+1$"的必要不充分条件.

5. C 【命题意图】本题考查指数函数的应用,要求考生了解指数函数模型的广泛应用.
【解题分析】因为前 9 个小时废气中的污染物恰好被过滤掉 80%,所以 $P_0\cdot e^{-9k}=\frac{1}{5}P_0$,所以 $e^{-3k}=(\frac{1}{5})^{\frac{1}{3}}$. 再继续过滤 3 小时,废气中污染物的残留量约为 $P_0\cdot e^{-12k}=P_0\times(e^{-3k})^4=P_0\times(\frac{1}{5})^{\frac{4}{3}}\approx\frac{1}{5}\times0.585\times P_0\approx12\%P_0$.

6. A 【命题意图】本题考查函数图象的判断,要求考生能通过函数的性质判断图象.
【解题分析】由题意可知,函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,$f(-x)=(-x)^2\lg\frac{2-\cos(-x)}{2+\cos(-x)}=x^2\lg\frac{2-\cos x}{2+\cos x}=f(x)$,所以 $f(x)$ 为偶函数,排除选项 C,D;当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时,$0<\cos x<1$,所以 $0<\frac{2-\cos x}{2+\cos x}<1$,则 $\lg\frac{2-\cos x}{2+\cos x}<0$,所以 $f(x)=x^2\lg\frac{2-\cos x}{2+\cos x}<0$,排除 B.

7. C 【命题意图】本题考 数学文化与圆台,要求考生了解圆台体积的计算公式.
【解题分析】由题意知几何体 B 的高为 2,故几何体 B 的体积为 $\frac{1}{3}(\pi+4\pi+\sqrt{\pi\cdot4\pi})\times2=\frac{14\pi}{3}$,故几何体 A 的体积为 $\frac{28\pi}{3}$.

8. C 【命题意图】本题考查双曲线,要求考生了解双曲线的定义、几何图形和标准方程,以及它的简单几何性质.
【解题分析】因为 $\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_2P}=0$,所以 $PF_1\perp PF_2$,所以 $\triangle APF_1$ 为直角三角形,
所以 $|AP|+|PF_1|-|AF_1|=8$,因为 $|AF_1|=|AF_2|$,
所以 $|AP|+|PF_1|-|AF_1|=|AP|+|PF_1|-|AF_2|=|PF_1|-|PF_2|=8$.
因为 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 9,所以 $|PF_1||PF_2|=18$,因为 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_1|^2=4c^2$,所以

$4c^2=(|PF_1|-|PF_2|)^2+2|PF_1||PF_2|=64+36=100$,所以 $c=5$.

易知 $\mathrm{Rt}\triangle AOF_2\backsim\mathrm{Rt}\triangle F_1PF_2$,所以$\frac{|AF_2|}{|F_1F_2|}=\frac{|OF_2|}{|PF_2|}$,所以$|AF_2||PF_2|=2c^2=50$.

9. BD 【命题意图】本题考查椭圆,要求考生了解椭圆的标准方程,以及它们的简单几何性质.

【解题分析】设椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,$F_1(-c,0)$. 由题意知 $AB\perp F_1F_2$,易得$|AB|=\frac{2b^2}{a}$,又$|AB|=|BF_1|=2|BF_2|$,$|BF_1|+|BF_2|=2a$,故 $b^2=\frac{2a^2}{3}$,显然 B、D 选项正确.

10. BC 【命题意图】本题考查三角恒等换,要求考生能运用两角和与差的正弦、余弦公式以及二倍角公式进行简单的恒等变换.

【解题分析】因为$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{1+\cos 2\beta}{1+\cos 2\alpha}=\frac{2\cos^2\beta}{2\cos^2\alpha}$,所以有 $\cos^3\alpha=\cos^3\beta$,所以得到 $\cos\alpha=\cos\beta$,$\sin\alpha=2\cos\beta>0$,可得 $\tan\alpha=2$ 且 α 为第一象限角,故 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$,故 A 不正确,B 正确;又 $\cos\beta=\frac{1}{2}\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$,$\beta\in(-\frac{\pi}{2},0)$,故 $\sin\beta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$,$\sin 2\beta=-\frac{4}{5}$,故 C 正确;由 $\tan\alpha=2$,$\tan\beta=-2$,知 $\tan(\alpha+\beta)=0$,故 D 不正确.

11. AD 【命题意图】本题考查数列,要求考生了解数列的概念,能在具体的问题情境中识别数列的关系.

【解题分析】由题意知$\begin{cases}-a_n^2+2a_n\geqslant 0\\ a_n\geqslant 1\end{cases}$,则 $1\leqslant a_n\leqslant 2$,因为 $a_{n+1}=\sqrt{-a_n^2+2a_n}+1$,所以$(a_{n+1}-1)^2+(a_n-1)^2=1$,令 $b_n=(a_n-1)^2$,所以 $b_{n+1}+b_n=1$,所以 $b_{n+2}+b_{n+1}=1$,所以 $b_{n+2}=b_n$,即 $a_{n+2}=a_n$ 或 $a_{n+2}+a_n=2$,又 $1\leqslant a_n\leqslant 2$,故 $a_{n+2}=a_n$. 当 a_3 取最大值时,
$a_3=2$,此时 $a_2=1$,则 $a_{2n}=1$,$a_{2n-1}=2$,故 $S_{2023}=3035$,故 A 正确;
当 a_3 取最小值时,$a_3=1$,此时 $a_2=2$,则 $a_{2n}=2$,$a_{2n-1}=1$,故 $S_{2023}=3034$,故 B 不正确;由$(a_{n+1}-1)^2+(a_n-1)^2=1$,知$\frac{a_{n+1}-1+a_n-1}{2}\leqslant\sqrt{\frac{(a_{n+1}-1)^2+(a_n-1)^2}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,即 $a_{n+1}+a_n\leqslant 2+\sqrt{2}$,当且仅当 $a_{n+1}=a_n=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$时取等号,故当 S_{100}取最大值时,$S_{200}=100(a_1+a_2)=200+100\sqrt{2}$,此时 $S_{100}=100+50\sqrt{2}$,故 C 不正确,D 正确.

12. ACD 【命题意图】本题考查方程与不等式,要求考生理解方程和不等式之间的联系,体会数学的整体性.

【解题分析】令 $2x+y-2=2\sin\theta$,$x-2y-1=2\cos\theta$,则 $x=\frac{4\sin\theta+2\cos\theta}{5}+1$,$y=\frac{2\sin\theta-4\cos\theta}{5}$,所以 $x+y=\frac{6\sin\theta-2\cos\theta}{5}+1=\frac{2\sqrt{10}}{5}\sin(\theta-\varphi)+1\in[-\frac{2\sqrt{10}}{5}+1,\frac{2\sqrt{10}}{5}+1]$,其中 $\tan\varphi=\frac{1}{3}$,故 A 项不正确,B 项正确;又 $x-2y=2\cos\theta+1$,当 $\cos\theta=1$ 时,$x-2y$ 取得最大值,此时 $x=\frac{7}{5}$,故 C 不正确;当 $\cos\theta=-1$ 时,$x-2y$ 取得最小值,此时 $y=\frac{4}{5}$,故 D 不正确.

13. -7 【命题意图】本题考查平面向量,要求考生能用坐标表示平面向量的数量积,能用坐标表示平面向量垂直的条件.

【解题分析】由向量 $\boldsymbol{m}=(1,x)$,$\boldsymbol{n}=(2,1)$,且 $\boldsymbol{n}\perp(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})$,得 $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})=0$,得 $6+x+1=0$,解得 $x=-7$.

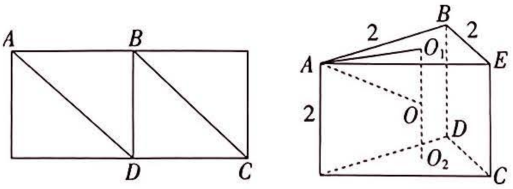
14. 150　120

【命题意图】本题考查排列组合中分组分配问题,要求考生能通过实例,理解排列、组合的概念.

【解题分析】由题意可得,5 名同学的分配方式有两种,第一种为 1∶1∶3 分配,方案数为 $\frac{C_5^1C_4^1C_3^3}{2!}\cdot A_3^3=60$,第二种为 1∶2∶2 分配,方案数为 $\frac{C_5^1C_4^2C_2^2}{2!}A_3^3=90$,故要求每个社团至少安排一人,不同的安排方案数为 150. 如果再加上一名同学且要求甲社团安排三人,有两种情况,若乙社团 1 人,丙社团 2 人,方案数为 $C_6^3C_3^2C_1^1=60$,若乙社团 2 人,丙社团 1 人,方案数为 $C_6^3C_3^2C_1^1=60$,故不同的安排方案数为 120.

15. $\frac{28\pi}{3}$ 【命题意图】本题考查三棱锥的外接球,要求考生了解球的体积的计算公式,能用公式解决实际问题.

【解题分析】由于 $AD=\sqrt{2}AB=\sqrt{2}BD=2\sqrt{2}$,故$\triangle ABD$ 和$\triangle BCD$ 均是腰长为 2 的等腰直角三角形,将其补充如图(1)所示的长方形,折后得到图(2)所示的直三棱柱,又由异面直线 CD 与 AB 所成角为 $60°$,可知$\angle ABE=60°$或 $120°$,又$\angle ADC$ 为锐角,故可知$\angle ABE=60°$,则图(2)所示的直三棱柱上下底面均是边长为 2 的等边三角形,且该三棱柱的外接球即为三棱锥 $C-ABD$ 的外接球. 设$\triangle ABE$ 外接圆的半径为 r,则 $2r=2O_1A=\frac{2}{\sin 60°}$,所以 $r=\frac{2}{\sqrt{3}}$,又三棱锥的高为 2,所以三棱柱外接球的半径 $R=\sqrt{1^2+(\frac{2}{\sqrt{3}})^2}=\sqrt{\frac{7}{3}}$,所以所求外接球的表面积为 $4\pi R^2=\frac{28\pi}{3}$.



图(1)　　图(2)

16. $(0,\frac{1}{12}]\cup[\frac{1}{6},\frac{7}{12}]$ 【命题意图】本题考查三角函数的图象与性质,要求考生了解参数的变化对函数图象的影响,能运用两角和与差的正弦、余弦公式以及二倍角公式进行简单的恒等变换.

【解题分析】$g(x)=\sin(2\omega x+\frac{\pi}{3})$,

令 $2\omega x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,可得 $x=\frac{\pi}{12\omega}+\frac{k\pi}{2\omega},k\in\mathbf{Z}$.

由函数 $g(x)$在区间$(\frac{\pi}{2},\pi)$上是单调的,可知$\frac{T}{2}\geqslant\frac{\pi}{2}$,即 $\omega\leqslant 1$,

又 $\omega>0$,故 $0<\pi\leqslant\frac{\pi}{12\omega}$ 或 $\begin{cases}\pi\leqslant\frac{7\pi}{12\omega}\\ \frac{\pi}{2}\geqslant\frac{\pi}{12\omega}\end{cases}$,解得 $0<\omega\leqslant\frac{1}{12}$ 或 $\frac{1}{6}\leqslant\omega\leqslant\frac{7}{12}$.

所以 ω 的取值范围是 $(0,\frac{1}{12}]\cup[\frac{1}{6},\frac{7}{12}]$.

17.【命题意图】本题考查独立性检验,要求考生了解独立性检验的基本思想、方法及其简单应用.

【解题分析】(1)

	没获奖	获奖	合计
男	8	4	12
女	7	1	8
合计	15	5	20

………………………………………………………………………… 2 分

由 2×2 列联表中数据,计算得到 $K^2=\frac{20\times(8-28)^2}{15\times5\times12\times8}=\frac{10}{9}<2.706$,所以没有 90%的把握认为"获奖"与性别有关. ………………………………………… 5 分

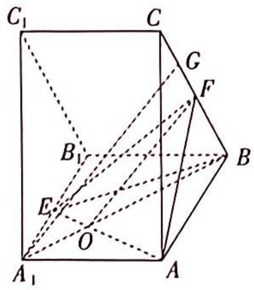
(2)当这 5 名老成员中都为女成员时,计算得 $K^2=\frac{25\times(20-0)^2}{15\times10\times12\times13}=\frac{50}{117}<2.706$,不合题意;

………………………………………………………………………… 7 分

当 5 名老成员都为男成员时,计算得 $K^2=\frac{25\times(20-75)^2}{15\times10\times17\times8}=\frac{3025}{816}>2.706$,符合题意.

故这 5 名老成员全是男成员. ………………………………………… 10 分

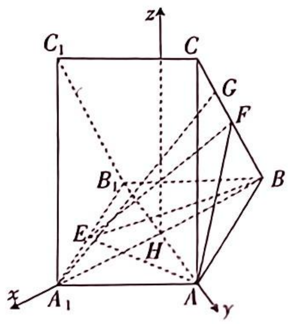
18.【命题意图】本题考查线面平行与二面角,要求考生了解空间中直线与平面的平行关系,能用向量方法解决夹角问题.



【解题分析】(1)连接 A_1B,交 AE 于点 O,连接 OF. 由题意,知四边形 ABB_1A_1 为平行四边形,$\therefore AB=A_1B_1$,$\because E$ 为 A_1B_1 的中点,$\therefore A_1E=\frac{1}{2}AB$,$\therefore\triangle A_1OE\backsim\triangle BOA$,且相似比为 $\frac{1}{2}$,$\therefore A_1O=\frac{1}{2}OB$, ……… 2 分

又 $\because F,G$ 分别为 BC,CF 的中点,$\therefore GF=\frac{1}{2}BF$,$\therefore OF/\!/A_1G$,又 $OF\subset$ 平面 AEF,$A_1G\not\subset$ 平面 AEF,$\therefore A_1G/\!/$平面 AEF. ………………………… 4 分

(2)$\because\angle A_1AB=120^\circ$,$AB=AA_1=2$,$\therefore AB_1\perp A_1B$,$AB_1=2$,$A_1B=2\sqrt{3}$,建立如图所示的空间直角坐标系,则 $A(0,1,0)$,$B(-\sqrt{3},0,0)$,$E(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0)$,$F(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2})$.



则 $\overrightarrow{AE}=(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},0)$,$\overrightarrow{BE}=(\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0)$,$\overrightarrow{EF}=(-\sqrt{3},1,\frac{3}{2})$, ……

………………………………………………………… 6 分

设平面 AEF 和平面 BEF 的法向量分别为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$.

则$\begin{cases}\overrightarrow{EF}\cdot \boldsymbol{m}=0\\ \overrightarrow{AE}\cdot \boldsymbol{m}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\sqrt{3}x_1+y_1+\frac{3}{2}z_1=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_1-\frac{3}{2}y_1=0\end{cases}$，令 $z_1=1$，得 $\boldsymbol{m}=(\frac{3\sqrt{3}}{4},\frac{3}{4},1)$.

$\begin{cases}\overrightarrow{EF}\cdot \boldsymbol{n}=0\\ \overrightarrow{BE}\cdot \boldsymbol{n}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\sqrt{3}x_2+y_2+\frac{t}{2}z_2=0\\ \frac{3\sqrt{3}}{2}x_2-\frac{1}{2}y_2=0\end{cases}$，令 $z_2=-1$，得 $\boldsymbol{n}=(\frac{3\sqrt{3}}{12},\frac{9}{4},-1)$. ………………… 8 分

故 $\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{13}}{13}$，

则 $\sin\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{2\sqrt{39}}{13}$，故二面角 $A-EF-B$ 的正弦值为$\frac{2\sqrt{39}}{13}$. ………………………… 12 分

19.【命题意图】本题考查解三角形，要求考生掌握余弦定理、正弦定理.

【解题分析】(1)由 $a\sin A+b\sin B-c\sin C=\frac{\sqrt{6}}{2}a\sin B$，

知 $a^2+b^2-c^2=\frac{\sqrt{6}}{2}ab$，………………………………………………………………… 3 分

则 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{6}}{4}$. ………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)知 $\sin C=\frac{\sqrt{10}}{4}$，………………………………………………………………… 6 分

$\frac{\sqrt{6}}{2}ab=a^2+b^2-c^2=a^2+b^2-10\geqslant 2ab-10$，即 $ab\leqslant 8+2\sqrt{6}$，………………………… 9 分

故△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C\leqslant\sqrt{10}+\frac{\sqrt{15}}{2}$，即△$ABC$ 面积的最大值为$\sqrt{10}+\frac{\sqrt{15}}{2}$，

当且仅当 $a=b$ 时取得最大值. ……………………………………………………………… 12 分

20.【命题意图】本题考查数列，要求考生理解等比数列的概念和通项公式的意义，能在具体的问题情境中，发现数列的关系，并解决相应的问题.

【解题分析】(1)当 $n\geqslant 2$ 时，$\because S_n+S_{n+1}=2a_{n+1}-3$，$\therefore S_{n-1}+S_n=2a_n-3$，

$\therefore S_{n+1}-S_{n-1}=2a_{n+1}-2a_n$，$\therefore a_{n+1}+a_n=2a_{n+1}-2a_n$，$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n}=3(n\geqslant 2)$. ………………… 2 分

当 $n=1$ 时，$S_1+S_2=2a_2-3$，$\therefore a_1+a_1+a_2=2a_2-3$，$\therefore a_2=9$，………………………… 3 分

$\therefore \frac{a_2}{a_1}=3$. $\therefore$ 数列$\{a_n\}$是以 3 为首项，3 为公比的等比数列，

$\therefore a_n=3\times 3^{n-1}=3^n$. ……………………………………………………………………… 5 分

(2)选①：由 $b_n=\frac{2\cdot 3^n}{(3^n-1)(3^{n+1}-1)}=\frac{1}{3^n-1}-\frac{1}{3^{n+1}-1}$，…………………………………… 9 分

知 $T_n=\frac{1}{3-1}-\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{3^2-1}-\frac{1}{3^3-1}+\cdots+\frac{1}{3^n-1}-\frac{1}{3^{n+1}-1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3^{n+1}-1}<\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$，

故 $T_n<\frac{2}{3}$. ………………………………………………………………………………… 12 分

选②：由 $b_n=\frac{4n+6}{n(n+1)3^{n+1}}=\frac{2}{n\cdot 3^n}-\frac{2}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}$，…………………………… 9分

知 $T_n=\frac{2}{1\times 3}-\frac{2}{2\times 3^2}+\frac{2}{2\times 3^2}-\frac{2}{3\times 3^3}+\cdots+\frac{2}{n\times 3^n}-\frac{2}{(n+1)\times 3^{n+1}}=\frac{2}{3}-\frac{2}{(n+1)\times 3^{n+1}}<\frac{2}{3}$.

…………………………………………………………………………………………………… 12分

21.【命题意图】本题考查直线与抛物线，要求考生掌握抛物线的定义、几何图形、标准方程及简单性质，理解数形结合的思想.

【解题分析】(1)设直线 AB 的倾斜角为 $\theta(0<\theta<\pi)$，$|AF|\geqslant|BF|$.

由抛物线的定义可得 $|AF|\cdot|\cos\theta|+p=|AF|$，$p-|BF|\cdot|\cos\theta|=|BF|$，…………… 2分

则 $|AF|=\frac{p}{1-|\cos\theta|}$，$|BF|=\frac{p}{1+|\cos\theta|}$，…………………………………………… 4分

故 $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{p}=2$，即 $p=1$，则抛物线 C 的方程为 $y^2=2x$. ……………………… 5分

(2)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 AB 的方程为 $x=my+\frac{1}{2}$.

由 $\begin{cases}y^2=2x\\x=my+\frac{1}{2}\end{cases}$，得 $y^2-2my-1=0$，则 $y_1y_2=-1$. ………………………………… 6分

又直线 OA：$y=\frac{y_1}{x_1}x=\frac{2}{y_1}x$，则 $D(\frac{y_1y_2}{2},y_2)$，即 $D(-\frac{1}{2},y_2)$，………………………… 7分

则 $k_{DF}=-y_2$，$k_{AE}=\frac{1}{y_2}$，即直线 AE：$y-y_1=\frac{1}{y_2}(x-x_1)$.

则有 $\begin{cases}y-y_1=\frac{1}{y_2}(x-x_1)\\y^2=2x\end{cases}$，得 $y^2-2y_2y-2x_1-2=0$，则 $y_1+y_E=2y_2$，

故 $y_E=2y_2-y_1$，则 $x_E=x_1+4x_2+2$，由 AE 的中点为 G，

可得 $G(x_1+2x_2+1,y_2)$，故 G,B,D 三点共线，…………………………………………………… 9分

则 $\frac{|GB|}{|GD|}=\frac{x_1+2x_2+1-x_2}{x_1+2x_2+1+\frac{1}{2}}=\frac{x_1+x_2+1}{x_1+2x_2+\frac{3}{2}}$. ……………………………………………… 10分

又由 $y_1y_2=-1$，知 $x_1x_2=\frac{1}{4}$，故 $\frac{|GB|}{|GD|}=\frac{x_1^2+\frac{1}{4}+x_1}{x_1^2+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}x_1}=1-\frac{1+2x_1}{4x_1^2+6x_1+2}$，

令 $t=1+2x_1\in(1,+\infty)$，

则 $\frac{|GB|}{|GD|}=1-\frac{t}{t^2+t}=1-\frac{1}{t+1}\in(\frac{1}{2},1)$，故 $\frac{|GB|}{|DG|}$ 的取值范围为 $(\frac{1}{2},1)$. ……………… 12分

22.【命题意图】本题考查导数的综合运用，要求考生能利用导数研究函数的单调性，能运用导数求某些函数的最值.

【解题分析】(1) $f'(x)=(mx+n+m)e^x+2mx+2m+n$，由题意知 $f'(-1)=0$，则 $ne^{-1}+n=0$，即 $n=0$. ……………………………………………………………………………………………… 2分

由 $f(-1)=-\frac{1}{e}-1$，知 $-\frac{m}{e}-m=-\frac{1}{e}-1$，即 $m=1$. ………………………………………… 4分

(2)由(1)得 $f(x)=xe^x+x^2+2x$,设 $g(x)=xe^x+x^2+x-\ln x-\frac{16}{9}$,

则 $g'(x)=(x+1)e^x+2x+1-\frac{1}{x}=(x+1)e^x+\frac{(2x-1)(x+1)}{x}=(x+1)(e^x+2-\frac{1}{x})$. ……………… 5 分

设 $h(x)=e^x+2-\frac{1}{x}(x>0)$,则 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, ……………… 6 分

且 $h(\frac{1}{4})=e^{\frac{1}{4}}-2<0$,$h(\frac{1}{3})=e^{\frac{1}{3}}-1>0$,所以存在唯一 $x_0\in(\frac{1}{4},\frac{1}{3})$,使得 $h(x_0)=e^{x_0}+2-\frac{1}{x_0}=0$,即 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}-2$. ……………… 8 分

当 $0<x<x_0$ 时,$h(x)<0$,$g'(x)<0$,$g(x)$ 单调递减;当 $x>x_0$ 时,$h(x)>0$,$g'(x)>0$,$g(x)$ 单调递增.

$g(x)_{\min}=x_0e^{x_0}+x_0^2+x_0-\ln x_0-\frac{16}{9}=1-2x_0+x_0^2+x_0-\ln x_0-\frac{16}{9}=x_0^2-x_0-\ln x_0-\frac{7}{9}$. ……………… 10 分

设 $G(x)=x^2-x-\ln x-\frac{7}{9}$,$x\in(\frac{1}{4},\frac{1}{3})$,则 $G'(x)=2x-1-\frac{1}{x}=\frac{(x-1)(2x+1)}{x}$,

当 $x\in(\frac{1}{4},\frac{1}{3})$ 时,$G'(x)<0$,$G(x)$ 单调递减,所以 $G(x)>G(\frac{1}{3})=\ln 3-1>0$,所以 $g(x)>0$,

故当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$f(x)>\ln x+x+\frac{16}{9}$. ……………… 12 分