中学生标准学术能力诊断性测试 2018 年 9 月测试

理科数学试卷

参考答案

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. C 2. B 3. A 4. D 5. C 6. B 7. B 8. A 9. D 10. C 11. D 12. A

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 2

14. n^2+n

15. 30

16. $(-\infty,1)$

三、解答题：共 70 分，解答应写出文字说明.证明过程或演算步骤，第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答，第 22,23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：60 分。

17. （12 分）

（1）$\because AB=3$，$AC=1$，$\angle A=60^\circ$，所以由余弦定理可知，

$BC^2=3^2+1^2-2\times3\times1\times\cos60^\circ$，$\therefore BC=\sqrt{7}$ ………3 分

根据正弦定理，$\dfrac{3}{\sin\angle ACB}=\dfrac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，$\therefore \sin\angle ACB=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$ ………6 分

（2）$\because AB^2>AC^2+BC^2$，$\therefore\angle ACB$ 为钝角，则

$\cos\angle ACB=-\sqrt{1-\left(\dfrac{3\sqrt{21}}{14}\right)^2}=-\dfrac{\sqrt{7}}{14}$ ……8 分

$\because AC=1, CD=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，在 ΔACD 中，根据余弦定理，

$AD^2=1^2+\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)^2-2\times1\times\dfrac{\sqrt{7}}{2}\times\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{14}\right)$ …..10 分

求得 $AD=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ ….12 分

18.（12 分）

（1）取 PC 中点 F，$\because$ E 是 PD 的中点，$\therefore$ $EF//CD$，又由题意知 Q 是 FC 的中点，

M 是 EC 的中点，$\therefore$ $EF//QM$，………2 分

$\therefore$ $QM//CD//AB$.又 $QM\not\subset$ 平面PAB，$AB\subset$ 平面PAB，

$\therefore$ $QM//$ 平面PAB　………4 分

方法一：（2）当 $\angle PBA=45^\circ$ 时，存在线段 PC 上的中点 F，使得 $EF//$平面 PAD，且 EF 与平面 PBC 所成角为 45°同时成立。………5 分

理由如下：

由（1）知，当 F 为 PC 中点时，$EF//AB$.$\because$ $PA\perp$ 平面$ABCD$,$\therefore$ $PA\perp AB$.又$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，$\therefore$ $AB\perp AD$，$\therefore$ $AB\perp$ 平面PAD，$\therefore$ $EF\perp$ 平面PAD………8 分

$\because$ $PA\perp BC$，$AB\perp BC$，$\therefore$ $BC\perp$ 平面PAB，$\therefore$ 平面$PBC\perp$ 平面PAB，$\therefore$ $\angle PBA$ 为 AB 与平面 PBC 所成角，$\therefore$ $\angle PBA=45^\circ$ ………12 分

方法二：（2）当 $\angle PBA=45^\circ$ 时，存在线段 PC 上的中点 F，使得 $EF//$平面 PAD，且 EF 与平面 PBC 所成角为 45°同时成立。………5 分

理由如下：

由（1）知，当 F 为 PC 中点时，$EF//CD$.

$\because$ $PA\perp$ 平面$ABCD$ 且 $CD\subset$ 平面 $ABCD$

$\therefore PA\perp CD$

$\because$ $ABCD$ 为矩形　$\therefore CD\perp AD$

且 $PA\cap AD=A$

$\therefore CD\perp$ 平面 PAD　$\therefore EF\perp$ 平面 PAD………8 分

另一方面：过点 A 作 $AG\perp PB$ 于 G

$$\text{由上理}\left.\begin{array}{l}PA\perp BC\\AB\perp BC\\PA\cap AD=A\end{array}\right\}\therefore BC\perp\text{平面 }PAB$$

$\because AG\subset$ 平面 PAB　$\therefore AG\perp BC$

$\because PB\cap BC=B$

$\therefore AG\perp$平面PBC

$\therefore AB$在平面PBC内的射影为PB

$\therefore \angle ABP$就是直线AB与平面PBC所成的角

$\because \angle PBA=45^\circ$ 且$EF//CD$，$CD//AB$

$\therefore EF//AB$ 且EF与平面PBC成角45°..........12 分

（其他方法酌情给分）

19.（12 分）

（1）由题意得$\xi=2,3,4,5,6$.

故$P(\xi=2)=\dfrac{6\times6}{12\times12}=\dfrac{1}{4}$，$P(\xi=3)=\dfrac{2\times6\times4}{12\times12}=\dfrac{1}{3}$，$P(\xi=4)=\dfrac{2\times6\times2+4\times4}{12\times12}=\dfrac{5}{18}$，

$P(\xi=5)=\dfrac{2\times4\times2}{12\times12}=\dfrac{1}{9}$，$P(\xi=6)=\dfrac{2\times2}{12\times12}=\dfrac{1}{36}$.

所以ξ的分布列为

ξ	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$

........6 分

（2）由题意知η的分布列为

η	1	b	c
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$E\eta=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}b+\frac{1}{6}c=\frac{5}{3}$，$D(\eta)=(1-\frac{5}{3})^2\cdot\frac{1}{2}+(b-\frac{5}{3})^2\cdot\frac{1}{3}+(c-\frac{5}{3})^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{9}$......10 分

解得$b=2$，$c=3$........12 分

20. (12 分）

解：（1）由点 $P(0,1)$ 是椭圆的上顶点，可得 $b=1$，..........1 分

由 $\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ a^2=1+c^2\end{cases}$，可知 $a=2, c=\sqrt{3}$，椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.........3 分

（2）设直线 PA 的方程为 $y=kx+1$，与椭圆方程联立：$\begin{cases}y=kx+1\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，得：

$\left(4k^2+1\right)x^2+8kx=0$，$\because P(0,1)$，$\therefore A\left(-\dfrac{8k}{4k^2+1},\dfrac{-4k^2+1}{4k^2+1}\right)$，

$B\left(\dfrac{8k}{4k^2+1},\dfrac{4k^2-1}{4k^2+1}\right)$.......6 分

设 PB 的中点为 M，可得 $M\left(\dfrac{4k}{4k^2+1},\dfrac{4k^2}{4k^2+1}\right)$，$k_{PB}=\dfrac{\dfrac{4k^2-1}{4k^2+1}-1}{\dfrac{8k}{4k^2+1}}=-\dfrac{1}{4k}$

$\because$ 直线 ME 与 AB 垂直，$\therefore k_{ME}=4k$ .....8 分

直线 ME 的方程为：$y-\dfrac{4k^2}{4k^2+1}=4k\left(x-\dfrac{4k}{4k^2+1}\right)$，令 $x=0$，则 $E\left(0,\dfrac{-12k^2}{4k^2+1}\right)$.....10 分

$\because$ 点 E 在椭圆的外部，$\therefore -\dfrac{12k^2}{4k^2+1}<-1$，可得：$k\in\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4},+\infty\right)$...12 分

21.（12 分）

解：（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=x^2-3x+2+\ln x$，定义域为 $(0,+\infty)$

$f'(x)=2x-3+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-3x+1}{x}=\dfrac{(2x-1)(x-1)}{x}$

$\therefore x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 和 $(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{2})$ 及 $(1,+\infty)$ 上单调递增；

$x\in(\dfrac{1}{2},1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(\dfrac{1}{2},1)$ 上单调递减。.....4 分

（2）$f(1)=a-(2a+1)+a+1=0$

$\because f(x)=ax^2-(2a+1)x+a+1+\ln x$,

$\therefore f'(x)=2ax-(2a+1)+\dfrac{1}{x}=\dfrac{(2ax-1)(x-1)}{x}$.....5 分

①当 $a\le 0$ 时，$f'(x)\le 0$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上恒成立，即

即 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)\le f(1)=0$，这与 $f(x)\ge 0$ 矛盾，$\therefore$

$a\le 0$ 舍去....8 分

②当 $a\ge\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)\ge 0$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上恒成立，即

即 $f(x)$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上单调递增，则 $f(x)\ge f(1)=0$，$\therefore a\ge\dfrac{1}{2}$ 成立....10 分

③当 $0<a<\dfrac{1}{2}$，$x\in\left[1,\dfrac{1}{2a}\right]$ 时，$f'(x)\le 0$，即 $f(x)$ 在 $x\in\left[1,\dfrac{1}{2a}\right]$ 上单调递减，

$f(x)\le f(1)=0$，$\therefore 0<a<\dfrac{1}{2}$ 舍去

综上可知，$a\ge\dfrac{1}{2}$....12 分

（其它方法酌情给分）

（二）选考题：共 10 分，请考生在第 22，23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分．作答时请写清题号．

22．【选修 4−4：坐标系与参数方程】（10 分）

（1）曲线 $C: y^2=2x$ ………4 分

（2）曲线 $C: y^2=2ax$，直线 l 的参数方程代入曲线 C 的直角坐标方程得，

$t^2-(8\sqrt{2}+2\sqrt{2}a)t+8a+32=0$，

设交点 A，B 所对参数分别为 t_1，t_2，

则 $t_1+t_2=8\sqrt{2}+2\sqrt{2}a$，$t_1\cdot t_2=8a+32$，………6 分

$\therefore |AB|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{8a^2+32a}$，…..8 分

$\because |AB|^2=|MA|\cdot|MB|$ $\quad\therefore 8a^2+32a=8a+32$

得 $a=1$………10 分

23．【选修 4−5：不等式选讲】（10 分）

（1）$f(x)=|x+2|-|2x-3|=\begin{cases}5-x & x\ge\frac{3}{2}\\ 3x-1 & -2<x<\frac{3}{2}\\ x-5 & x\le -2\end{cases}$……………2 分

当 $x\ge\frac{3}{2}$ 时，$5-x>2, \therefore x\in\left[\frac{3}{2},3\right)$

当 $-2<x<\frac{3}{2}$ 时，$3x-1>2, \therefore x\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$

当 $x\le -2$ 时，$x-5>2, \therefore x\in\phi$

综上可知，所求不等式的解集为 $(1,3)$………5 分

（2）要证：$f(x)>x-1$，即证：$|x+2|-|ax-3|>x-1$

$\because x\in(0,2)$，$\therefore$ 即证：$x+2-|ax-3|>x-1$，即证：$|ax-3|<3$……7 分

$\because 0<a\le 3$ 且 $x\in(0,2)$，$\therefore 0<ax<6$… 8 分

23.【选修 4-5：不等式选讲】（10 分）

（1）$f(x)=|x+2|-|2x-3|=\begin{cases}5-x & x\geq\frac{3}{2}\\ 3x-1 & -2<x<\frac{3}{2}\\ x-5 & x\leq -2\end{cases}$……………2 分

当 $x\geq\frac{3}{2}$ 时，$5-x>2,\therefore x\in\left[\frac{3}{2},3\right)$

当 $-2<x<\frac{3}{2}$ 时，$3x-1>2,\therefore x\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$

当 $x\leq -2$ 时，$x-5>2,\therefore x\in\phi$

综上可知，所求不等式的解集为 $(1,3)$………5 分

（2）要证：$f(x)>x-1$，即证：$|x+2|-|ax-3|>x-1$

$\because x\in(0,2)$，$\therefore$ 即证：$x+2-|ax-3|>x-1$，即证：$|ax-3|<3$……7 分

$\because 0<a\leq 3$ 且 $x\in(0,2)$，$\therefore 0<ax<6$…　8 分

则 $-3<ax-3<3$，即 $|ax-3|<3$，则 $f(x)>x-1$ 成立 ……10 分