荆门市 2022—2023 学年度下学期期末
高二年级学业水平检测
数学参考答案

1-4　ADBC　　5-8　ABDD　　9．AC　　10．ACD　　11．ABC　　12．ABD

13．4　　14．$2x+y=0$ 或 $2x+y-10=0$（写出其中一条即可）

15．2020　　16．$\dfrac{\sqrt{15}}{7}$

12.【解析】由直线 $x=a$ 与两曲线 $y=e^x, y=\ln x$ 分别交于 A，B 两，点可知：$a>0$．

曲线 $y=e^x$ 上 A 点坐标 $\left(a,e^a\right)$，可求导数 $y'=e^x$，则切线 m 斜率 $k_m=e^a$，可知切线 $m: y-e^a=e^a(x-a)$．

曲线 $y=\ln x$ 上 B 点坐标 $(a,\ln a)$，可求导数 $y'=\dfrac{1}{x}$，则切线 n 斜率 $k_n=\dfrac{1}{a}$．

令 $k_m=k_n$，则 $e^a=\dfrac{1}{a}$，令 $g(x)=e^x-\dfrac{1}{x}(x>0), g\left(\dfrac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}-2<0, g(1)=e-1>0$

由零点存在定理，$\exists a\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 使 $g(x)=0$，即 $\exists a\in(0,+\infty)$，使 $k_m=k_n$，即 $m\parallel n$，故 A 正确．

$|AB|=e^a-\ln a$，令 $h(a)=e^a-\ln a(a>0)$，

$\therefore h'(a)=e^a-\dfrac{1}{a}$ 由 $g(x)$ 同理可知有 $a_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使 $e^{a_0}=\dfrac{1}{a_0}$，

令 $\begin{cases}h'(a)>0\Rightarrow a>a_0\\ h'(a)<0\Rightarrow 0<a<a_0\end{cases}$，$\therefore h(a)$ 在 $a=a_0$ 处取最小值，即当 $m\parallel n$ 时，$|AB|$ 取得最小值，故 B 正确．

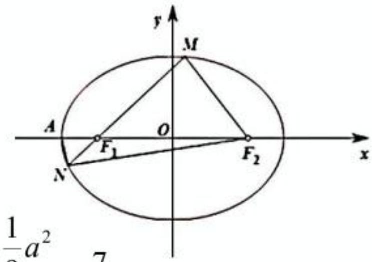
$|AB|_{\min}=e^{a_0}-\ln a_0$，又 $e^{a_0}=\dfrac{1}{a_0}$，$\therefore a_0=\ln\dfrac{1}{a_0}=-\ln a_0$，$\therefore |AB|_{\min}=\dfrac{1}{a_0}+a_0$ 为定值，故 C 错误．

$|AB|_{\min}=\dfrac{1}{a_0}+a_0$ 是对勾函数，在 $a_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 上是减函数，

$\therefore |AB|_{\min}\in\left(\dfrac{1}{1}+1,\dfrac{1}{\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}\right)\Rightarrow |AB|_{\min}\in\left(2,\dfrac{5}{2}\right)$，又 $a_0>\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \dfrac{1}{a_0}<2, \therefore e^{a_0}<2=e^{\ln 2}, \therefore a_0<\ln 2, \therefore \ln 2+\log_2 e=\dfrac{\ln 2}{\ln e}+\dfrac{\ln e}{\ln 2}=\ln 2+\dfrac{1}{\ln 2}<a_0+\dfrac{1}{a_0}$，故 D 正确．故选：ABD．

16.【解析】$\because AN\parallel MF_2$，则$\triangle AF_1N\backsim\triangle F_2F_1M$，$\dfrac{AF_1}{F_1F_2}=\dfrac{a-c}{2c}=\dfrac{a-\frac{1}{2}a}{a}=\dfrac{1}{2}$，



$\therefore AN+NF_1=\dfrac{1}{2}\left(MF_1+MF_2\right)=a$，①

又 $AN+NF_2+a+c=\dfrac{19}{6}a$，$\therefore AN+NF_2=\dfrac{5}{3}a$，②

又$\because NF_1+NF_2=2a$，③

由①②③知 $AN=\dfrac{a}{3}$，$NF_1=\dfrac{2a}{3}$，$\cos\angle AF_1N=\dfrac{\frac{1}{4}a^2+\frac{4}{9}a^2-\frac{1}{9}a^2}{2\times\frac{1}{2}a\times\frac{2}{3}a}=\dfrac{7}{8}$，

$\sin\angle AF_1N=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$，$\tan\angle AF_1N=\dfrac{\sqrt{15}}{7}$，$\therefore MN$ 的斜率为 $\dfrac{\sqrt{15}}{7}$.

17. 解：（1）由已知 $A_n^4=40C_n^5$ 得：$\dfrac{n!}{(n-4)!}=40\dfrac{n!}{(n-5)!5!}$. ……………………3 分

解得：$n=7$. ……………………………………………………5 分

（2）当 $n=7$，$f(x)=(x-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}})^7$ 展开式的通项为

$T_{r+1}=C_7^r\left(x\right)^{7-r}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^r=C_7^r(-1)^r x^{7-\frac{4}{3}r}$，……………………………………7 分

要使之为有理项则 $7-\dfrac{4}{3}r$ $(r=0,1,2,3,4,5,6,7)$ 为整数，

此时 r 可以取到 0,3,6,……………………………………………………8 分

所以有理项分别是第 1 项，第 4 项，第 7 项，

$T_1=x^7$，$T_4=-35x^3$，$T_7=7x^{-1}$. ……………………………………10 分

18. 解：（1）在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\parallel BB_1$，$BB_1\subset$平面 BB_1C_1C，$AA_1\not\subset$平面 BB_1C_1C，

则 $AA_1\parallel$ 平面 BB_1C_1C，……………………………………………………2 分

又平面 $AA_1EF\cap$平面 $BB_1C_1C=EF$，$AA_1\subset$平面 AA_1EF，

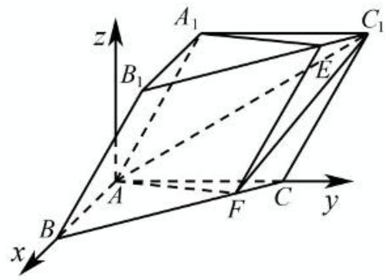
于是得 $AA_1\parallel EF$，……………………………………………………………3 分

而平面 $ABC\parallel$ 平面 $A_1B_1C_1$，平面 $AA_1EF\cap$平面 $ABC=AF$，平面 $AA_1EF\cap$平面 $A_1B_1C_1=A_1E$，则 $A_1E\parallel AF$，

所以四边形 AA_1EF 为平行四边形. ……………………………………………5 分

（2）在平面 AA_1C_1C 内过点 A 作 $Az\perp AC$，因为平面 $ABC\perp$平面 AA_1C_1C，平面 $ABC\cap$平面 $AA_1C_1C=AC$，

于是得 $Az\perp$ 平面 ABC，又 $AB\perp AC$，以点 A 为原点，建立如图所以的空间直角坐标系，



因 $AA_1=AB=AC=2$，$\angle A_1AC=60^\circ$，则

$B(2,0,0),C(0,2,0),A_1(0,1,\sqrt{3}),C_1(0,3,\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{AB}=(2,0,0),\overrightarrow{AC_1}=(0,3,\sqrt{3}),\overrightarrow{CB}=(2,-2,0),\overrightarrow{AC}=(0,2,0)$，……………………7 分

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}=(0,2,0)+\frac{1}{4}(2,-2,0)=(\frac{1}{2},\frac{3}{2},0)$，……………………8 分

设平面 AFC_1 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC_1}=3y+\sqrt{3}z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y=0\end{cases}$，

令 $y=1$，得 $\vec{n}=(-3,1,-\sqrt{3})$，……………………………………………………10 分

而 $\overrightarrow{A_1C_1}=(0,2,0)$，设直线 A_1C_1 与平面 AFC_1 所成角为 θ，

于是得 $\sin\theta=|\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{A_1C_1}\rangle|=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}|}{|\vec{n}||\overrightarrow{A_1C_1}|}=\frac{2}{\sqrt{13}\times 2}=\frac{\sqrt{13}}{13}$，

所以直线 A_1C_1 与平面 AFC_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{13}}{13}$． ……………………………12 分

19．解：（1）$\bar{x}=\frac{56\times10+67\times20+70\times48+78\times19+86\times3}{100}=70$． ………………3 分

由 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$\mu=70,\sigma^2=36$ 得：

$P(64<X<82)=P(70-6<X<70+2\times6)$

$=\frac{P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)}{2}+\frac{P(\mu-2\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma)}{2}=0.8186$． ……………………6 分

（2）设 $A=$“随机抽取一件该企业生产的该零件为废品”，

$B_1=$“随机抽取一件零件为第 1 条生产线生产”，

$B_2=$“随机抽取一件零件为第 2 条生产线生产”，

则 $P(B_1)=\frac{2}{3}$，$P(B_2)=\frac{1}{3}$，…………………………………………………………8 分

又 $P(A|B_1)=0.015$，$P(A|B_2)=0.018$，

于是 $P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=\frac{2}{3}\times0.015+\frac{1}{3}\times0.018=0.016$． …12 分

20．解：（1）当 $n=1$ 时，$a_2=2$，当 $n\geq2$ 时，递推得 $a_n^2-2S_{n-1}=n$，……………………2 分

$\therefore a_{n+1}^2-a_n^2=2a_n+1$，$a_{n+1}^2=a_n^2+2a_n+1=(a_n+1)^2$，………………………………3 分

因为数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数，所以 $a_{n+1}-a_n=1$，又$\because a_2-a_1=1$，…………………5 分

∴数列$\{a_n\}$为等差数列，故$a_n=a_1+n-1=n$. ....6 分

（2）设a_k和插入的k个数$(-1)^{k+1}\cdot k$构成一组数，则前k组共有$k+\dfrac{k(k+1)}{2}=\dfrac{k^2+3k}{2}$个数，

令$\dfrac{k^2+3k}{2}\le 100$，又$k\in N^*$，解得：$k\le 12$；..8 分

当$k=12$时，$\dfrac{k^2+3k}{2}=90<100$，

$\therefore\{b_n\}$的前100项中包含前12组数和第13组数的前10个， ....9 分

$$\therefore S_{100}=(a_1+1)+(a_2-2^2)+(a_3+3^2)+\cdots+(a_{11}+11^2)+(a_{12}-12^2)+(a_{13}+13\times 9)$$

$$=(a_1+a_2+\cdots+a_{13})+(1-2^2+3^2-4^2+\cdots+11^2-12^2)+117$$

$$=\frac{13\times(1+13)}{2}-(3+7+11+\cdots+23)+117=91-\frac{6\times(3+23)}{2}+117$$

$$=91-78+117=130.$$ ....12 分

21．解：（1）由题知$2a=2$，得$a=1$，...1 分

$\dfrac{b}{a}=\tan\dfrac{\pi}{6}$或$\dfrac{b}{a}=\tan\dfrac{\pi}{3}$，得$b=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$或$\sqrt{3}$，..3 分

所以双曲线C的方程为$C:x^2-3y^2=1$或$C:x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$. ....5 分

（2）证明由（1）知，当$a<b$时，$C:x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$，设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

联立直线l与双曲线C得：$\begin{cases}x=my+2\\3x^2-y^2=3\end{cases}\Rightarrow(3m^2-1)y^2+12my+9=0$，

$\Delta=36m^2n^2-4(3m^2-1)(3n^2-3)=36(m^2+1)>0$，

方程的两根为y_1，y_2，则$y_1+y_2=\dfrac{-12m}{3m^2-1}$，$y_1y_2=\dfrac{9}{3m^2-1}$. ....7 分

$A_1(-1,0)$，$A_2(1,0)$，则$A_1M:y=\dfrac{y_1}{x_1+1}(x+1)$，$A_2N:y=\dfrac{y_2}{x_2-1}(x-1)$，

因为直线A_1M，A_2N相交于点$T(x_0,y_0)$，

故$y_0=\dfrac{y_1}{x_1+1}(x_0+1)$，$y_0=\dfrac{y_2}{x_2-1}(x_0-1)$，...8 分

消去y_0，整理得：$\dfrac{x_0+1}{x_0-1}=\dfrac{y_2(x_1+1)}{y_1(x_2-1)}=\dfrac{y_2(my_1+3)}{y_1(my_2+1)}$， ....9 分

法一：$\dfrac{x_0+1}{x_0-1}=\dfrac{y_2(my_1+3)}{y_1(my_2+1)}=\dfrac{my_1y_2+3(y_1+y_2)-3y_1}{my_1y_2+y_1}$

$$=\frac{\frac{9m}{3m^2-1}+\frac{-36m}{3m^2-1}-3y_1}{\frac{9m}{3m^2-1}+y_1}=\frac{-3\left(\frac{9m}{3m^2-1}+y_1\right)}{\frac{9m}{3m^2-1}+y_1}=-3，\text{ …………………11 分}$$

法二：由 $\frac{y_1+y_2}{y_1\cdot y_2}=\frac{-4m}{3}$，则 $my_1\cdot y_2=\frac{-3\left(y_1+y_2\right)}{4}$，

则 $\frac{x_0+1}{x_0-1}=\frac{my_1y_2+3y_2}{my_1y_2+y_1}=\frac{-\frac{3}{4}\left(y_1+y_2\right)+3y_2}{-\frac{3}{4}\left(y_1+y_2\right)+y_1}=\frac{-\frac{3}{4}y_1+\frac{9}{4}y_2}{\frac{1}{4}y_1-\frac{3}{4}y_2}=-3$，……………11 分

因此 $x_0+1=-3\left(x_0-1\right)\Rightarrow x_0=\frac{1}{2}$，

故点 T 在定直线 $x=\frac{1}{2}$ 上．………………………………………………………12 分

22．解：（1）当 $a=2$ 时，$f'(x)=\ln(x-2)+\frac{x-3}{x-2}=\ln(x-2)-\frac{1}{x-2}+1$，…………………2 分

则 $f'(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，因为 $f'(3)=0$，

所以 $f(x)$ 在 $(2,3)$ 上单调递减，在 $(3,+\infty)$ 上单调递增，……………………………4 分

$f(x)$ 的极小值为 $f(3)=0$，无极大值．………………………………………………5 分

（2）令 $t=x-a\geqslant 1$，则 $f(x)\geqslant x-1$ 即 $(t+1-a)\ln t\geqslant t+a-1$，因为 $1+\ln t>0$

即 $a\leqslant\frac{1-t+(t+1)\ln t}{1+\ln t}=1+\frac{t(\ln t-1)}{1+\ln t}$ 在 $t\geqslant 1$ 时恒成立，……………………………8 分

令 $g(t)=1+\frac{t(\ln t-1)}{1+\ln t}$，

$g'(t)=\frac{(1+\ln t)\ln t-(\ln t-1)}{(1+\ln t)^2}=\frac{(\ln t)^2+1}{(1+\ln t)^2}>0$，故 $g(t)$ 单调递增，……………………10 分

所以 $g(t)\geqslant g(1)=0$，故 $a\in(-\infty,0]$．…………………………………………12 分