2023 年广州市普通高中毕业班综合测试(二)

数学试题参考答案及评分标准

评分说明:

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考,如果考生的解法与本解答不同,可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则.

2. 对计算题,当考生的解答在某一步出现错误时,如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度,可视影响的程度决定后继部分的给分,但不得超过该部分正确解答应得分数的一半;如果后继部分的解答有较严重的错误,就不再给分.

3. 解答右端所注分数,表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

4. 只给整数分数,选择题不给中间分.

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	D	D	A	A	D	B

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

9. BC　10. ACD　11. BD　12. BCD

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 8

14. 3 或者 $3k(k\in N^*)$

15. 10

16. $\frac{1}{2}$,$\frac{3}{2}\times(\sqrt[3]{2}-1)$

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.

17. (10 分)

(1) 解:由 $a_{n+1}+(-1)^nS_n=2^n$,得 $a_2-S_1=2$,即 $a_2-a_1=2$,1 分 $a_3+S_2=4$,即 $a_3+a_1+a_2=4$.

又 $a_3=0$,

所以 $a_1=1$,$a_2=3$.

(2) 解:当 $n=2k$ 时,$a_{2k+1}+S_{2k}=2^{2k}$, ①

当 $n=2k-1$ 时,$a_{2k}-S_{2k-1}=2^{2k-1}$, ②

① + ② 得 $a_{2k+1}+a_{2k}+S_{2k}-S_{2k-1}=2^{2k}+2^{2k-1}$,

得 $a_{2k+1}+2a_{2k}=3\times2^{2k-1}$.

1 因为 $b_n=a_{n+1}+2a_n$,

所以 $b_2+b_4+b_6+\cdots+b_{2n}=(a_3+2a_2)+(a_5+2a_4)+(a_7+2a_6)+\cdots+(a_{2n+1}+2a_{2n})$

$$=3\times2+3\times2^3+3\times2^5+\cdots+3\times2^{2n-1}$$

$$=3\times\frac{2\times(1-4^n)}{1-4}$$

$$=2^{2n+1}-2.$$

18. (12 分)

(1) 解:令 $u=\frac{1}{x}$,则 y 关于 u 的线性回归方程为 $y=\alpha+\beta u$.

依题意，得 $\beta = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{10} u_i y_i - 10\bar{u}y}{\sum\limits_{i=1}^{10} u_i^2 - 10\bar{u}} = \dfrac{350-210}{1.6-0.9} = 200$.

$\alpha = \bar{y} - \beta\bar{u} = 70 - 200 \times 0.3 = 10$

则 $y = 10 + 200u$.

所以 y 关于 x 的回归方程为 $y = 10 + \dfrac{200}{x}$.

(2) 解法 1：由 $y = 10 + \dfrac{200}{x}$，得 $x = \dfrac{200}{y-10}$.

年利润 $M = m - x - 10$

$$= -\frac{y^2}{500} + \frac{2y}{25} + \frac{200}{y-10} + 100 - \frac{200}{y-10} - 10$$

$$= -\frac{1}{500}(y-20)^2 + 90.8.$$

解法 2：由 $y = 10 + \dfrac{200}{x}$，

年利润 $M = m - x - 10$

$$= -\frac{y^2}{500} + \frac{2y}{25} + \frac{200}{y-10} + 100 - x - 10$$

$$= -\frac{1}{500}\left(10 + \frac{200}{x}\right)^2 + \frac{2}{25}\left(10 + \frac{200}{x}\right) + x + 100 - x - 10$$

$$= -80\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{20}\right)^2 + 90.8.$$

当 $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{20}$，即 $x = 20$ 时，年利润 M 取得最大值.

所以，当年技术创新投入为 20 千万元时，年利润的预报值最大.

19. (12 分)

(1) 解法 1：因为 $b\cos A - a\cos B = b - c$，

由余弦定理有 $b \cdot \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} - a \cdot \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = b - c$.

化简得 $b^2+c^2-a^2 = bc$.

由余弦定理得 $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{1}{2}$.

因为 $0 < A < \pi$.

所以 $A = \dfrac{\pi}{3}$.

解法 2：因为 $b\cos A - a\cos B = b - c$.

由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

得 $\sin B\cos A - \sin A\cos B = \sin B - \sin C$.

因为 $C = \pi - (A+B)$.

所以 $\sin B\cos A - \sin A\cos B + \sin(A+B) = \sin B$.

化简得 $\sin B\cos A + \sin B\cos A = \sin B$.

因为 $\sin B \neq 0$.

所以 $\cos A = \dfrac{1}{2}$.

因为 $0 < A < \pi$.

所以 $A = \dfrac{\pi}{3}$.

(2) 解：由 $\cos B = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，得 $\sin B = \sqrt{1-\cos^2 B} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

因为 $A + B + C = \pi$，得 $C = \dfrac{2\pi}{3} - B$.

$$\sin C=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)=\sin\frac{2\pi}{3}\cos B-\cos\frac{2\pi}{3}\sin B$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

设 $\angle BAD=\theta$，则 $\angle CAD=\frac{\pi}{3}-\theta$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中，由正弦定理得

$$\frac{BD}{\sin\theta}=\frac{AD}{\sin B}=\frac{3AD}{\sqrt{6}},$$
$$\frac{CD}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}=\frac{AD}{\sin C}=\frac{6AD}{3+\sqrt{6}}.$$

因为 $CD=2BD$，上面两式相除得 $\sqrt{6}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=(3+\sqrt{6})\sin\theta$,

得 $\sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)=(3+\sqrt{6})\sin\theta$,

即 $\sqrt{2}\cos\theta=(2+\sqrt{6})\sin\theta$,

得 $\tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

所以 $\tan\angle BAD=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

20.（12 分）

解法一：

(1) 证明：取 BC_1 的中点 F，连接 DF,EF.

因为点 D 是 BC 的中点，

所以 $DF\,/\!/\,CC_1\,/\!/\,AA_1$，$DF=\frac{1}{2}CC_1=\frac{1}{2}AA_1=AE$.

则 A,E,F,D 四点共面.

因为 $AD\,/\!/$ 平面 BC_1E，平面 $AEFD\cap$ 平面 $BC_1E=EF$，

所以 $AD\,/\!/\,EF$.

因为 $AB=AC$，

所以 $AD\perp BC$.

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$CC_1\perp$ 平面 ABC，则 $AD\perp CC_1$.

又 $BC\cap CC_1=C$，$BC\subset$ 平面 BB_1C_1C，$CC_1\subset$ 平面 BB_1C_1C，所以 $AD\perp$ 平面 BB_1C_1C.

所以 $EF\perp$ 平面 BB_1C_1C. 又 $EF\subset$ 平面 BC_1E,

所以平面 $BC_1E\perp$ 平面 BB_1C_1C.

(2) 解：由 (1) 可知四边形 $AEFD$ 是平行四边形.

所以 $AD=EF$.

设 $BC=2a(0<a<3)$. 在 $Rt\triangle ADB$ 中，$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{9-a^2}$.

所以 $EF=\sqrt{9-a^2}$.

三棱锥 B_1-BC_1E 的体积

$$V_{B_1-BC_1E}=V_{E-BB_1C_1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot BB_1\cdot B_1C_1\cdot EF=a\sqrt{9-a^2}\leqslant\frac{a^2+\left(\sqrt{9-a^2}\right)^2}{2}=\frac{9}{2}.$$

当且仅当 $a=\sqrt{9-a^2}$，即 $a=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立.

故当三棱锥 B_1-BC_1E 的体积最大时，$BC=2a=3\sqrt{2}$.

在 $Rt\triangle ADC$ 中，$AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

以 D 为原点，DB 所在直线为 x 轴，AD 所在直线为 y 轴，DF 所在直线为 z 轴.

建立空间直角坐标系 $D-xyz$，则 $B\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},0,0\right),E\left(0,-\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3}{2}\right)$，

$$C_1\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},0,3\right),A\left(0,-\frac{3\sqrt{2}}{2},0\right),C\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},0,0\right).$$

$$\overrightarrow{BE}=\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3}{2}\right),\overrightarrow{BC_1}=(-3\sqrt{2},0,3),$$

$$\overrightarrow{AC}=\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2},0\right).$$

设平面 BC_1E 的法向量为 $n=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{BE}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{BC_1}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-\frac{3\sqrt{2}}{2}x-\frac{3\sqrt{2}}{2}y+\frac{3}{2}z=0,\\ -3\sqrt{2}x+3z=0,\end{cases}$

令 $x=1$，则 $z=\sqrt{2},y=0$，

所以平面 BC_1E 的一个法向量为 $n=(1,0,\sqrt{2})$，

则 $\cos\langle n,\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{n\cdot\overrightarrow{AC}}{|n||\overrightarrow{AC}|}=\frac{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3}\times 3}=-\frac{\sqrt{6}}{6}$，

设直线 AC 与平面 BC_1E 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle n,\overrightarrow{AC}\rangle|=\frac{\sqrt{6}}{6}$，

所以直线 AC 与平面 BC_1E 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$。

解法二：

(1) 证明：延长 C_1E 交 CA 的延长线于点 F，连接 BF，

因为 $AD\parallel$ 平面 BC_1E，平面 $ABC\cap$ 平面 $BC_1E=BF$，$AD\subset$ 平面 ABC，

所以 $AD\parallel BF$，

因为 $AB=AC$，

所以 $AD\perp BC$，

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$CC_1\perp$ 平面 ABC，则 $AD\perp CC_1$，

又 $BC\cap CC_1=C$，$BC\subset$ 平面 BB_1C_1C，$CC_1\subset$ 平面 BB_1C_1C，

所以 $AD\perp$ 平面 BB_1C_1C，

所以 $BF\perp$ 平面 BB_1C_1C，

又 $BF\subset$ 平面 BC_1E，

所以平面 $BC_1E\perp$ 平面 BB_1C_1C。

(2) 解：由于 D 是 BC 的中点，则 A 是 CF 的中点，E 是 AA_1 的中点，$BF=2AD$，

设 $BC=2a(0<a<3)$，在 $Rt\triangle ABD$ 中，$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{9-a^2}$，

所以 $BF=2\sqrt{9-a^2}$，

三棱锥 B_1-BC_1E 的体积

$$V_{B_1-BC_1E}=V_{E-BB_1C_1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot BB_1\cdot B_1C_1\cdot\left(\frac{1}{2}BF\right)=a\sqrt{9-a^2}\leqslant\frac{a^2+\left(\sqrt{9-a^2}\right)^2}{2}=\frac{9}{2}.$$

当且仅当 $a=\sqrt{9-a^2}$，即 $a=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立。

故当三棱锥 B_1-BC_1E 的体积最大时，$BC=2a=3\sqrt{2}$，

作 $CG\perp BC_1$ 于 G，连接 FG，

因为平面 $BC_1E\perp$ 平面 BB_1C_1C，平面 $BC_1E\cap$ 平面 $BB_1C_1C=BC_1$，

所以 $CG\perp$ 平面 BC_1E.

所以 $\angle CFG$ 为直线 AC 与平面 BC_1E 所成的角.

在 $Rt\triangle BCC_1$ 中, $BC_1=\sqrt{BC^2+CC_1^2}=3\sqrt{3}$, $CG=\frac{BC\cdot CC_1}{BC_1}=\sqrt{6}$,

在 $R\triangle CF$ 中, $\sin\angle CFG=\frac{CG}{CF}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

所以直线 AC 与平面 BC_1E 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

另法: 由于 D 是 BC 的中点, 则 A 是 CF 的中点, E 是 AA_1 的中点, $BF=2AD$.

设 $BC=2a(0<a<3)$, 在 $Rt\triangle ADB$ 中, $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{9-a^2}$, 所以 $BF=2\sqrt{9-a^2}$.

三棱锥 B_1-BC_1E 的体积

$$V_{B_1-BC_1E}=V_{E-BB_1C_1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot BB_1\cdot B_1C_1\cdot\left(\frac{1}{2}BF\right)=a\sqrt{9-a^2}\leqslant\frac{a^2+\left(\sqrt{9-a^2}\right)^2}{2}=\frac{9}{2}.$$

当且仅当 $a=\sqrt{9-a^2}$, 即 $a=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 时, 等号成立.

故当三棱锥 B_1-BC_1E 的体积最大时 $BC=2a=3\sqrt{2}$.

由于 $BC^2=AB^2+AC^2$, 则 $AB\perp AC$.

又平面 $ABC\perp$ 平面 ACC_1A_1, 平面 $ABC\cap$ 平面 $ACC_1A_1=AC$,

则 $AB\perp$ 平面 ACC_1A_1.

设 A_1 到平面 BC_1E 的距离为 h.

由 $V_{A_1-BC_1E}=V_{B-A_1C_1E}$,

得 $\frac{1}{3}h\cdot S_{\triangle BC_1E}=\frac{1}{3}\cdot AB\cdot S_{\triangle A_1C_1E}=\frac{1}{3}\times3\times\frac{1}{2}\times3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$,

而 $S_{\triangle BC_1E}=\frac{1}{2}\cdot BC_1\cdot AD=\frac{9\sqrt{6}}{4}$,

所以 $h=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

因为 $AC\parallel A_1C_1$,

所以直线 AC 与平面 BC_1E 所成角的正弦值为 $\sin\theta=\frac{h}{A_1C_1}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

21.(1) 解法 1: 设点 $P(x,y)$, 以 PF 为直径的圆的圆心为 $M(x',y')$.

由于 M 为 PF 的中点, 则 $x'=\frac{x+1}{2}$, $y'=\frac{y}{2}$.

依题意得 $|MF|=|x'|$,

即 $\sqrt{\left(\frac{x+1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2}=\left|\frac{x+1}{2}\right|$,

化简得 $y^2=4x$,

所以 C 的方程为 $y^2=4x$.

解法 2: 设点 $P(x,y)$, 以 PF 为直径的圆的圆心为 M, $\odot M$ 的半径为 r,

则 $|PF|=2r$,

设 $\odot M$ 与 y 轴的交点为 N, 过点 P 作 $PQ\perp y$ 轴于点 Q,

在梯形 $OFPQ$ 中, $r=|MN|=\frac{|OF|+|PQ|}{2}=\frac{1+x}{2}$,

则 $|PF|=2r=x+1$,

所以点 P 到点 F 的距离等于点 P 到直线 $x=-1$ 的距离,

所以点 P 的轨迹是以点 F 为焦点, $x=-1$ 为准线的抛物线,

所以 C 的方程为 $y^2=4x$.

(2) 解法 1: 根据题意, 直线 l 的斜率存在, 设直线 l: $y=k(x-1)$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$

由 $\begin{cases} y^2=4x, \\ y=k(x-1), \end{cases}$ 消去 y，整理得 $k^2x^2-2(k^2+2)x+k^2=0$.

由韦达定理得：$x_1+x_2=\dfrac{2(k^2+2)}{k^2}$，$x_1x_2=1$ ．

设直线 l 的倾斜角为 θ，则 $|AM|=|AF||\tan\theta|$，$|BN|=|BF||\tan\theta|$.

所以 $|AM|+|BN|=(|AF|+|BF|)|\tan\theta|=|AB||\tan\theta|=|k||AB|$.

所以 $|AB|=|AF|+|BF|=x_1+1+x_2+1=\dfrac{4k^2+4}{k^2}$.

由题意知四边形 $MANB$ 为梯形.

所以四边形 $MANB$ 的面积 $S=\dfrac{(|AM|+|BN|)|AB|}{2}=\dfrac{|AB|^2|k|}{2}=\dfrac{8(k^2+1)^2}{|k|^3}$

$$=\frac{8(k^4+2k^2+1)}{|k|^3}$$

设 $t=|k|\in(0,+\infty)$ ，则 $S(t)=\dfrac{8(t^4+2t^2+1)}{t^3}=8\left(t+\dfrac{2}{t}+\dfrac{1}{t^3}\right)$ ．

$$S'(t)=8\left(1-\frac{2}{t^2}-\frac{3}{t^4}\right)=\frac{8(t^4-2t^2-3)}{t^4}=\frac{8(t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})(t^2+1)}{t^4}.$$

当 $0<t<\sqrt{3}$ 时，$S'(t)<0$；当 $t>\sqrt{3}$ 时，$S'(t)>0$.

所以 $S(t)$ 在 $(0,\sqrt{3})$ 上单调递减，在 $(\sqrt{3},+\infty)$ 上单调递增.

所以当 $t=|k|=\sqrt{3}$，即 $k=\sqrt{3}$ 或 $k=-\sqrt{3}$ 时，四边形 $MANB$ 的面积取得最小值.

此时直线 l 的方程为 $y=\sqrt{3}(x-1)$ 或 $y=-\sqrt{3}(x-1)$.

即 $\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$ 或 $\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}=0$.

解法 2：设直线 l：$x=my+1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases} y^2=4x, \\ x=my+1, \end{cases}$ 消去 x，整理得 $y^2-4my-4=0$.

由韦达定理得 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$.

所以 $|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{16m^2-4\times(-4)}=4\sqrt{m^2+1}$.

直线 AM 的方程为 $y-y_1=-m(x-x_1)$，令 $y=0$，得 $x=\dfrac{y_1}{m}+x_1$，即 $M\left(\dfrac{y_1}{m}+x_1,0\right)$.

同理可得 $N\left(\dfrac{y_2}{m}+x_2,0\right)$.

所以四边形 $MANB$ 的面积

$$S=S_{\triangle AMN}+S_{\triangle BMN}=\frac{1}{2}|MN||y_1|+\frac{1}{2}|MN||y_2|=\frac{1}{2}|MN||y_1-y_2|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{y_1}{m}+x_1-\frac{y_2}{m}-x_2\right||y_1-y_2|=\frac{1}{2}\left|\frac{y_1}{m}+(my_1+1)-\frac{y_2}{m}-(my_2+1)\right||y_1-y_2|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{m}+m\right||y_1-y_2|^2=8\left|\frac{1}{m}+m\right|(m^2+1)=8\frac{(m^2+1)^2}{|m|}.$$

设 $t=|m|\in(0,+\infty)$，则 $S(t)=\dfrac{8(t^4+2t^2+1)}{t}$，$S'(t)=\dfrac{8(t^2+1)(3t^2-1)}{t^2}$.

当 $0<t<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$S'(t)<0$；当 $t>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$S'(t)>0$.

所以 $S(t)$ 在 $\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ 上单调递增.

所以当 $t=|m|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，即 $m=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $m=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时，四边形 $MANB$ 的面积取得最小值.

此时直线 l 的方程为 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}y+1$ 或 $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}y+1$.

即 $\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$ 或 $\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}=0$.

22. (12 分)

(1) 解法 1: 由 $f(x)\leqslant g(x)$, 得 $\ln(1+x)\leqslant ax^2+x$.

若 $x=0$, 得 $0\leqslant 0, a\in R$.

若 $x\neq 0$, 得 $\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}\leqslant a$.

记 $h(x)=\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$, 则 $h'(x)=\dfrac{\dfrac{x^2+2x}{1+x}-2\ln(1+x)}{x^3}$.

记 $p(x)=\dfrac{x^2+2x}{1+x}-2\ln(1+x)$, 则 $p'(x)=\dfrac{x^2}{(1+x)^2}>0$, $p(x)$ 单调递增.

因为 $p(0)=0$, 当 $x>0, p(x)>0, h'(x)>0$; 当 $-1<x<0, p(x)<0, h'(x)>0$

即 $h'(x)>0$ 恒成立, 所以 $h(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $x\to+\infty$ 时, $\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}\to 0$,

所以 $a\geqslant 0$.

解法 2: 令 $h(x)=\ln(1+x)-x(x>-1)$, 则 $h'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1=-\dfrac{x}{1+x}$.

当 $-1<x<0$ 时, $h'(x)>0$, $h(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增;

当 $x>0$ 时, $h'(x)<0$, $h(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减;

则 $x=0$ 时, $h(x)$ 取得最大值, 其值为 $h(0)=0$.

所以, 当 $x>-1$ 时, $h(x)\leqslant h(0)=0$, 即 $\ln(1+x)\leqslant x$.

所以, 当 $a\geqslant 0$ 时, $\ln(1+x)\leqslant x\leqslant ax^2+x$, 即 $f(x)\leqslant g(x)$;

当 $a<0$ 时, 取 $x_0=-\dfrac{1}{a}>0$,

由于 $\ln(1+x_0)>\ln 1=0$, 而 $ax_0^2+x_0=a\cdot\left(-\dfrac{1}{a}\right)^2-\dfrac{1}{a}=0$, 得 $\ln(1+x_0)>ax_0^2+x_0$.

故 $f(x_0)>g(x_0)$, 不符合题意.

综上所述, $a\geqslant 0$.

(2) 证明: 当 $a=0$ 时, 由 (1) 得 $\ln(1+x)\leqslant x$. ①

由①得 $\ln(x)\leqslant x-1$, 得 $\ln x\geqslant 1-\dfrac{1}{x}(x>1)$.②

令 $\dfrac{1}{t}=1-\dfrac{1}{x}$, 得 $x=\dfrac{t}{t-1}$,

所以 $\ln\left(\dfrac{t}{t-1}\right)\geqslant\dfrac{1}{t}$, 即 $\ln t-\ln(t-1)\geqslant\dfrac{1}{t}(t>1)$.

所以 $\dfrac{1}{n+k}\leqslant\ln(n+k)-\ln(n+k-1), k=1,2,\cdots,n$.

令 $g(x)=x-\sin x(x>0)$, 则 $g'(x)=1-\cos x\geqslant 0$,

故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $g(x)>g(0)=0$.

所以 $\sin x<x(x>0)$.

所以 $\sin\dfrac{1}{n+k}<\dfrac{1}{n+k}\leqslant\ln(n+k)-\ln(n+k-1), k=1,2,\cdots,n$.

所以 $\sin\dfrac{1}{n+1}+\sin\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\sin\dfrac{1}{2n}$

$<[\ln(n+1)-\ln n]+[\ln(n+2)-\ln(n+1)]+\cdots+[\ln 2n-\ln(2n-1)]$

$=\ln 2n-\ln n$

$=\ln 2$.