武汉市 2024 届九所重点中学第一次联考

数学参考答案与评分标准

选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	C	D	B	C	C	A	BCD	AC	ABD	AD

填空题：

13.（答案不唯一）$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{4y^2}{3}=1$　　**14.** 2

15. $\dfrac{3}{4}$ 或 $\dfrac{3}{2}$　　**16.** $\dfrac{44}{27}$；$\dfrac{4}{9}n+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

解答题：

17.（10 分）解：

（1）设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，于是 $a_n=a_2+(n-2)d=(n-2)d-1$，

因为 $S_9=5S_5$，所以 $9a_5=25a_3$，所以 $9(3d-1)=25(d-1)$，解得 $d=-8$，

则 $a_n=15-8n$；…………3 分

（2）$a_1=7$，$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，考虑 $\dfrac{S_n}{a_n}<\dfrac{n^2}{n+k}$，即 $\dfrac{n(a_1+a_n)}{2a_n}<\dfrac{n^2}{n+k}$，即 $\dfrac{a_1+a_n}{a_n}<\dfrac{2n}{n+k}$，

由于 $d<0$，则 $n>3$ 时，$a_n<a_2<0$，且 $a_n+a_1=22-8n<0$，

结合上述不等式得 $k<2n\cdot\dfrac{a_n}{a_1+a_n}-n$，整理得 $k<n\cdot\dfrac{4n-4}{4n-11}$，…………7 分

任取整数 $n>k$，则 $n\cdot\dfrac{4n-4}{4n-11}>n>k$，原不等式成立，

于是对于任意正数 k，均存在 $n\,(n\in\mathbb{N}_+,n>3)$ 使得 $\dfrac{S_n}{a_n}<\dfrac{n^2}{n+k}$ 成立．…………10 分

18.（12 分）解：

（1）$f(x)$ 的导函数 $f'(x)=3x^2-6x-6$，令 $f'(x)=0$ 得 $x_1=1-\sqrt{3}$，$x_2=1+\sqrt{3}$，

列表如下：

x	$(-\infty,1-\sqrt{3})$	$1-\sqrt{3}$	$(1-\sqrt{3},1+\sqrt{3})$	$1+\sqrt{3}$	$(1+\sqrt{3},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↑	极大值	↓	极小值	↑

所以 $f(x)$ 有一个极大值为 $f(x_1)=(1-\sqrt{3})^3-3(1-\sqrt{3})^2-6(1-\sqrt{3})+9=1+6\sqrt{3}$，

一个极小值为 $f(x_2)=(1+\sqrt{3})^3-3(1+\sqrt{3})^2-6(1+\sqrt{3})+9=1-6\sqrt{3}$．…………4 分

（2）切线 l 的方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，整理得 $y=(3x_0^2-6x_0-6)x-2x_0^3+3x_0^2+9$，

设 $g(x)=f(x)-y=x^3-3x^2-(3x_0^2-6x_0)x+2x_0^3-3x_0^2$，且易知 $g(x_0)=0$，

则 $g(x)=(x-x_0)(x^2+mx+n)$，从而 $g(x)=x^3+(m-x_0)x^2+(n-mx_0)x-nx_0$，

于是 $\begin{cases} m-x_0=-3 \\ -nx_0=2x_0^3-3x_0^2 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} m=x_0-3 \\ n=-2x_0^2+3x_0 \end{cases}$，

于是 $g(x)=(x-x_0)[x^2+(x_0-3)x-2x_0^2+3x_0]=(x-x_0)^2(x+2x_0-3)$，

由题意可知，方程 $g(x)=0$ 有另一解 $x_1(x_1\neq x_0)$，于是 $x_1=3-2x_0$，

所以 $|x_0-x_1|=|3x_0-3|=6$，解得 $x_0=3$ 或 $x_0=-1$，……………………10 分

$x_0=3$ 时，l 的斜率 $k=f'(x_0)=3$，$x_0=-1$ 时，l 的斜率 $k=f'(x_0)=3$；

综上，切线 l 的斜率为 3．……………………12 分

19．（12 分）解：

（1）在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得 $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}=2b$，则 $2b\sin C=c$，

又 $2b\cos\angle ACD=c$，且 $bc\neq 0$，所以 $\sin C=\cos\angle ACD$，

考虑到 $\sin C>0$，则 $\angle ACD$ 是锐角，若 C 为钝角，则 $C-\angle ACD=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\angle DCB=\dfrac{\pi}{2}$，

此时有 $C>\dfrac{\pi}{2}$，又 $A>0$，则 $C=\pi-A-B<\dfrac{5\pi}{6}$，则 $C\in(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6})$；……………………4 分

若 C 为锐角，则 $C+\angle ACD=\dfrac{\pi}{2}$，由题意知 $\angle DCB>0$，则 $C>\angle ACD$，

所以 $C+\angle ACD=\dfrac{\pi}{2}<2C$，又 $\angle ACD>0$，所以 $C<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $C\in(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$，

综上所述，$C\in(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})\cup(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6})$．……………………6 分

（2）由题知 $BD<c$，若 C 为钝角，则 $\triangle DBC$ 中，$BD=2CD=2c$，不合题意，

故 C 为锐角，也即 $C+\angle ACD=\dfrac{\pi}{2}$，……………………7 分

$\triangle ACD$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle ACD=\dfrac{AC^2+CD^2-AD^2}{2AC\cdot CD}=\dfrac{c}{2b}$，

解得 $AD^2=b^2$，因为 $AD>0$，所以 $AD=b$，……………………9 分

结合正弦定理知 $\angle ACD=\angle ADC$，

于是 $A=\pi-2\angle ACD$，又 $C+\angle ACD=\dfrac{\pi}{2}$，则 $A=\pi-2(\dfrac{\pi}{2}-C)=2C$，

又 $A+B+C=\pi$，将上式代入，得 $\dfrac{3}{2}A+\dfrac{\pi}{6}=\pi$，解得 $A=\dfrac{5\pi}{9}$．……………………12 分

20．（12 分）解：

（1）设 z 关于 y 的回归方程为 $\hat{z}=\hat{a}+\hat{b}y$，$i=2,3,4,5,6$ 时，$\bar{y}=\dfrac{1}{5}\sum\limits_{i=2}^{6}y_i=4.7$，$\bar{z}=\dfrac{y_6-y_1}{5}=1.62$，

则 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=2}^{6}(z_i-\bar{z})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=2}^{6}(z_i-\bar{z})^2}=\dfrac{11.33}{33.7}\approx 0.34$，$\hat{a}=\bar{z}-\hat{b}\bar{y}=0.02$，

于是 z 关于 y 的回归方程为 $\hat{z}=0.02+0.34y$．……………………………………6 分

（2）选择②，理由如下：

由（1）问知 z 和 y 有线性关系，故用 $\hat{z}$ 估计 z，知 $y_t-y_{t-1}=0.02+0.34y_t$，

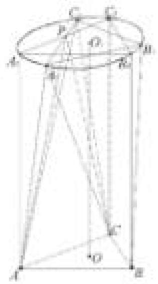
则 $0.66y_t=0.02+y_{t-1}$，于是 $0.66(y_t+0.06)=0.06+y_{t-1}$，

即 $\{y_t+0.06\}$ 是首项为 $y_1+0.06=1.06$，公比为 $q=\dfrac{1}{0.66}$ 的等比数列，

从而 $y_t=1.06\times(0.66)^{1-t}-0.06=0.7\times e^{(-\ln 0.66)t}-0.06$，满足②式的形式，

故②适宜作为 y 与 x 的回归方程类型．……………………………………12 分

21．（12 分）（1）证明：



记 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 的中心分别为点 O,O_1，当 $AA_1\parallel OO_1$ 时，记点 A_1,B_1,C_1 所在位置分别为点 A_0,B_0,C_0，易知 $ABC-A_0B_0C_0$ 为正三棱柱，且点 A_1,B_1,C_1,A_0,B_0,C_0 均在以 O_1 为圆心的圆上，$\odot O_1$ 的半径为 $A_0O_1=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$；

因为 $\angle A_0O_1B_0=\angle A_1O_1B_1$，所以 $\angle A_0O_1A_1=\angle B_0O_1B_1$，

同理可得 $\angle A_0O_1A_1=\angle B_0O_1B_1=\angle C_0O_1C_1$，

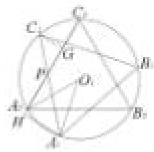
记 $\angle A_0O_1A_1=\alpha(0\le\alpha<\pi)$，则在 $\odot O_1$ 中，$A_0A_1=B_0B_1=C_0C_1$，

由上知 $OO_1\perp\beta$，于是 $AA_0=BB_0=CC_0=OO_1=4$，

且 $AA_0\perp A_0A_1$，$BB_0\perp B_0B_1$，$CC_0\perp C_0C_1$，则 $AA_1=BB_1=CC_1$，……………………3 分

下面只需证明 $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{CC_1}\cdot\overrightarrow{AA_1}$，

因为 $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BB_1}=(\overrightarrow{AA_0}+\overrightarrow{A_0A_1})(\overrightarrow{BB_0}+\overrightarrow{B_0B_1})=\overrightarrow{AA_0}\cdot\overrightarrow{BB_0}+\overrightarrow{A_0A_1}\cdot\overrightarrow{B_0B_1}=16+\overrightarrow{A_0A_1}\cdot\overrightarrow{B_0B_1}$，



同理有 $\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{CC_1}=16+\overrightarrow{B_0B_1}\cdot\overrightarrow{C_0C_1}$，$\overrightarrow{CC_1}\cdot\overrightarrow{AA_1}=16+\overrightarrow{C_0C_1}\cdot\overrightarrow{A_0A_1}$，

而 $\overrightarrow{A_0A_1}\cdot\overrightarrow{B_0B_1}-\overrightarrow{B_0B_1}\cdot\overrightarrow{C_0C_1}=\overrightarrow{B_0B_1}\cdot(\overrightarrow{A_0A_1}-\overrightarrow{C_0C_1})=\overrightarrow{B_0B_1}\cdot(\overrightarrow{A_0C_0}-\overrightarrow{A_1C_1})$

$=\overrightarrow{B_0B_1}\cdot(\overrightarrow{A_0B_0}+\overrightarrow{B_0C_0}+\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1C_1})$

在 $\odot O_1$ 中，由于 $B_0C_0=A_1B_1$，所以 A_1B_0 和 B_1C_0 所对弧长相等，即 $\angle A_1B_1B_0=\angle B_1B_0C_0$，

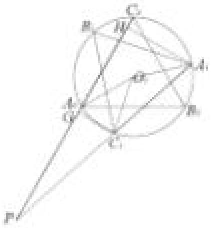
所以 $\angle A_0B_1B_0=\angle B_1B_0C_1$，则 $\overrightarrow{B_0B_1}\cdot\overrightarrow{B_0A_0}=\overrightarrow{B_1B_0}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}$，$\overrightarrow{B_0B_1}\cdot\overrightarrow{B_0C_0}=\overrightarrow{B_1B_0}\cdot\overrightarrow{B_1A_1}$，

也即 $\overrightarrow{A_0A_1}\cdot\overrightarrow{B_0B_1}-\overrightarrow{B_0B_1}\cdot\overrightarrow{C_0C_1}=0$，则 $\overrightarrow{A_0A_1}\cdot\overrightarrow{B_0B_1}=\overrightarrow{B_0B_1}\cdot\overrightarrow{C_0C_1}$，同理有 $\overrightarrow{B_0B_1}\cdot\overrightarrow{C_0C_1}=\overrightarrow{C_0C_1}\cdot\overrightarrow{A_0A_1}$，

所以 $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{CC_1}\cdot\overrightarrow{AA_1}$，所以 $\dfrac{\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BB_1}}{|\overrightarrow{AA_1}|\cdot|\overrightarrow{BB_1}|}=\dfrac{\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{CC_1}}{|\overrightarrow{BB_1}|\cdot|\overrightarrow{CC_1}|}=\dfrac{\overrightarrow{CC_1}\cdot\overrightarrow{AA_1}}{|\overrightarrow{CC_1}|\cdot|\overrightarrow{AA_1}|}$，

即 AA_1,BB_1,CC_1 两两夹角相等．……………………………………6 分

（2）解：记直线 C_1A_1 和 C_0A_0 的交点为 P，连接 PA，PC，设 A_1 和 C_1 到平面 ACC_0A_0 的距离分别为 d_1，d_2，作 $C_1G\perp A_0C_0$ 于 G，$A_1H\perp A_0C_0$ 于 H，



由（1）问知 $AA_0\perp\beta$，$CC_0\perp\beta$，则 $CC_0\perp C_1G$，$AA_0\perp A_1H$，

于是 $A_1H\perp$ 平面 ACC_0A_0，$C_1G\perp$ 平面 ACC_0A_0，

从而 $A_1H=d_1$，$C_1G=d_2$，又 $\triangle APC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}AC\cdot AA_0=4$，

若 P 在线段 A_0C_0 上（如上图），则 $0\le\alpha<\frac{2\pi}{3}$，因为 $\angle C_0A_0O_1=\angle C_1A_1O_1=\frac{\pi}{6}$，

所以 $\angle A_0PA_1=\angle A_0O_1A_1=\alpha$，于是 $d_1=C_1P\sin\alpha$，$d_2=A_1P\sin\alpha$，

则 $V_{ACC_1A_1}=V_{ACPA_1}+V_{ACC_1P}=\frac{1}{3}S\cdot d_1+\frac{1}{3}S\cdot d_2=\frac{4}{3}\sin\alpha(C_1P+PA_1)=\frac{8}{3}\sin\alpha$，

若 P 在线段 A_0C_0 的延长线上（如下图），则 $\frac{2\pi}{3}\le\alpha<\pi$，因为 $\angle C_0A_0O_1=\angle C_1A_1O_1=\frac{\pi}{6}$，

所以 $\angle P+\angle A_1O_1A_0=\pi$，所以 $\angle P=\pi-\alpha$，于是 $d_1=C_1P\sin(\pi-\alpha)=C_1P\sin\alpha$，$d_2=A_1P\sin\alpha$，

则 $V_{ACC_1A_1}=V_{ACPA_1}-V_{ACC_1P}=\frac{1}{3}S\cdot d_1-\frac{1}{3}S\cdot d_2=\frac{4}{3}\sin\alpha(PA_1-C_1P)=\frac{8}{3}\sin\alpha$，

综上，当 $\sin\alpha=1$ 时，四面体 ACC_1A_1 的体积取最大值，此时 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，……………………9 分

则 $A_0O_1\perp A_1O_1$，则 $A_0A_1=\sqrt{2}A_0O_1=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，$AA_1=BB_1=CC_1=\sqrt{AA_0^2+A_0A_1^2}=\frac{2\sqrt{42}}{3}$，

由（1）问知，$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BB_1}=16+\overrightarrow{A_0A_1}\cdot\overrightarrow{B_0B_1}=16+(\overrightarrow{A_0O_1}+\overrightarrow{O_1A_1})\cdot(\overrightarrow{B_0O_1}+\overrightarrow{O_1B_1})$

$$=16+(\frac{2\sqrt{3}}{3})^2[2\cos\frac{2\pi}{3}+\cos(\frac{2\pi}{3}-\alpha)+\cos(\frac{2\pi}{3}+\alpha)]=16-\frac{4}{3}=\frac{44}{3}，$$

设 AA_1 和 BB_1 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BB_1}}{|\overrightarrow{AA_1}|\cdot|\overrightarrow{BB_1}|}=\frac{\frac{44}{3}}{\frac{56}{3}}=\frac{11}{14}$．……………………12 分

22.（12 分）解：

（1）将 $P(\frac{5\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2})$ 代入双曲线 C 得：$\frac{25}{2a^2}-\frac{9}{2b^2}=1$，

双曲线的渐近线为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，即 $bx\pm ay=0$；取 $l_3:bx+ay=0$，$l_4:bx-ay=0$，

则点 P 到 l_3 的距离 $d_1=\frac{|5b+3a|}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}$，点 P 到 l_4 的距离 $d_2=\frac{|5b-3a|}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}$，

因为 $a>0$ 且 $b>0$，所以 $|5b+3a|>|5b-3a|$，所以 $d_1>d_2$，

于是 $d_1=4d_2$，即 $|5b+3a|=4|5b-3a|$，

又 $\frac{25}{2a^2}-\frac{9}{2b^2}=1>0$，所以 $5b>3a$，所以 $5b+3a=4(5b-3a)$，解得 $b=a$，

所以 $\frac{25}{2a^2}-\frac{9}{2b^2}=\frac{25}{2a^2}-\frac{9}{2a^2}=\frac{8}{a^2}=1$，则 $a^2=8$，则 $C:\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$．……………………4 分

（2）i. 设 $l_1: y=k_1x+m$，$l_2: y=k_1x+n(m\neq n)$，$Q(x_1,y_1)$，

将点 P 代入直线 l_1 得：$\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{5\sqrt{2}k_1}{2}+m$，即 $\sqrt{2}m=3-5k_1$，

联立直线 l_1 和双曲线的方程，消去 y 得：$(k_1^2-1)x^2+2k_1mx+m^2+8=0$，

则 $x_P+x_Q=-\frac{2k_1m}{k_1^2-1}$，（式①）……5 分

因为点 A 在第一象限，故联立直线 $y=x$ 与 l_2 解得 $x=-\frac{n}{k_1-1}$，则 $A(-\frac{n}{k_1-1},-\frac{n}{k_1-1})$，

联立直线 $y=-x$ 与 l_2 解得 $x=-\frac{n}{k_1+1}$，则 $B(-\frac{n}{k_1+1},\frac{n}{k_1+1})$，

所以 $\overrightarrow{AB}=(\frac{2n}{k_1^2-1},\frac{2nk_1}{k_1^2-1})$，又 $l_1\parallel l_2$，$|AB|=|PQ|$，所以 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AB}$，

于是 $x_Q-x_P=\frac{2n}{k_1^2-1}$，（式②）……7 分

②－①得：$\frac{2k_1m}{k_1^2-1}-\frac{2n}{k_1^2-1}=2x_P=5\sqrt{2}$，

则 $\sqrt{2}n=-\sqrt{2}k_1m-5(k_1^2-1)=-k_1(3-5k_1)-5(k_1^2-1)=5-3k_1$，

则 $k_2=\frac{y_A-y_P}{x_A-x_P}=\frac{\sqrt{2}n+3k_1-3}{\sqrt{2}n+5k_1-5}=\frac{2}{2k_1}=\frac{1}{k_1}$，即 $k_1\cdot k_2=1$，故 $k_1\cdot k_2$ 为定值 1．……9 分

（2）ii. 直线 l_1 与 l_2 之间的距离 $d=\frac{|n-m|}{\sqrt{k_1^2+1}}=\frac{|(5-3k_1)-(3-5k_1)|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{k_1^2+1}}=\frac{\sqrt{2}|k_1+1|}{\sqrt{k_1^2+1}}$，

由 i 问的证明知四边形 $ABQP$ 是平行四边形，而 $|AB|=\sqrt{1+k_1^2}\cdot|\frac{2n}{k_1^2-1}|=\sqrt{2(1+k_1^2)}\cdot|\frac{5-3k_1}{k_1^2-1}|$，

故四边形 $ABQP$ 的面积 $S=|AB|\cdot d=2|\frac{5-3k_1}{k_1^2-1}|\cdot|k_1+1|=2|\frac{5-3k_1}{k_1-1}|=5$，

解得 $k_1=5$ 或 $k_1=\frac{15}{11}$，于是 $k_1-k_2=k_1-\frac{1}{k_1}=\frac{24}{5}$ 或 $\frac{104}{165}$．……12 分

关于我们