吉林省顶级名校2022届高三上学期期中考试

数学试卷(文科)

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共6页。考试结束后，将答题卡交回。

注意事项：

1.答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。

2.选择题必须使用2B铅笔填涂；非选择题必须使用0.5毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。

3.请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。

4.作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。

5.保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

第Ⅰ卷

一、选择题：本题共12小题，每小题5分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知全集$U=\{1,2,3,4\}$，$A=\{1,3\}$，$B=\{1,4\}$，$A\cap(\complement_U B)=$（　　）

A．$\{1\}$　　B．$\{3\}$　　C．$\varnothing$　　D．$\{1,3\}$

2．已知向量$\vec{a}=(-1,2)$，$\vec{b}=(x,-4)$，若$\vec{a}\parallel\vec{b}$，则$x=$（　　）

A．2　　B．-2　　C．6　　D．-6

3．已知l、m是两条不同的直线，α是平面，$l\not\subset\alpha$，$m\subset\alpha$，则“$l\perp m$”是“$l\perp\alpha$”的（　　）

A．充要条件　B．充分不必要条件　C．必要不充分条件　D．既不充分也不必要条件

4．从2020年起，北京考生的高考成绩由语文、数学、外语3门统一高考成绩和考生选考的3门普通高中学业水平考试等级性考试科目成绩构成．等级性考试成绩位次由高到低分为A，B，C，D，E，各等级人数所占比例依次为：A等级15%，B等级40%，C等级30%，D等级14%，E等级1%.现采用分层抽样的方法，从参加历史等级性考试的学生中抽取1000人作为样本，则该样本中获得A或B等级的学生人数为（　　）

A．275　　B．400　　C．550　　D．450

5．已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_3+a_7=14$，则$S_9=$（　　）

A．21　　B．63　　C．42　　D．126

6．欧拉是一位杰出的数学家，为数学发展作出了巨大贡献，著名的欧拉公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，将三角函数的定义域扩大到复数集，建立了三角函数和指数函数

自主选拔在线 www.zizzs.com

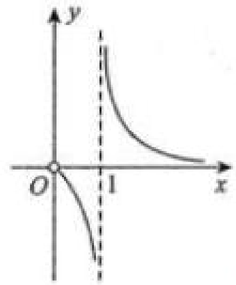
它在复变函数论里占有非常重要的地位，被誉为“数学中的天桥”.结合欧拉公式，复数 $z=\dfrac{1-2i}{1+i}+\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ 在复平面内对应的点位于（　　）

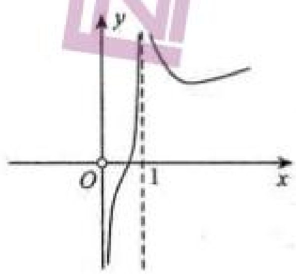
A．第一象限　　　B．第二条限　　　C．第三象限　　　D．第四象限

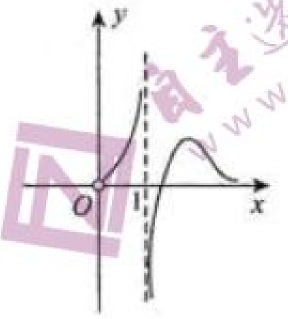
7．在 ΔABC 中，$\lg(\sin A+\sin C)=2\lg\sin B-\lg(\sin C-\sin A)$，则 ∇ABC 的形状为（　　）

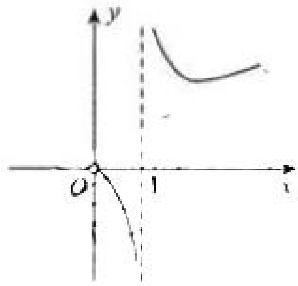
A．等腰三角形　　　B．直角三角形　　　C．等边三角形　　　D．等腰直角三角形

8．函数 $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ 的大致图象是（　　）

A．


B．


C．


D．


9．已知 $a=0.8^{-0.4}$，$b=\log_5 3$，$c=\log_8 5$，则（　　）

A．$a<b<c$　　　B．$b<c<a$　　　C．$c<b<a$　　　D．$a<c<b$

10．已知球 O，过其球面上 A，B，C 三点作截面，若点 O 到该截面的距离是球半径的一半，且 $AB=BC=2$，$\angle B=120°$，则球 O 的表面积为（　　）

A．$\dfrac{64}{3}\pi$　　　B．$\dfrac{8}{3}\pi$　　　C．$\dfrac{32}{3}\pi$　　　D．$\dfrac{16}{9}\pi$

11．已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1,F_2，过 F_1 的直线与 C 交于 A,B 两点.若 $|AF_1|=2|F_1B|$，$|AB|=|BF_2|$，则 C 的离心率为（　　）

A．$\dfrac{1}{3}$　　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　　D．$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

12．已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 R，且函数 $y=f(x-1)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，对于任意的 x，总有 $f(x-2)=f(x+2)$ 成立，当 $x\in(0,2)$ 时，$f(x)=x^2-2x+1$，函数 $g(x)=mx^2+x$（$x\in R$），对任意 $x\in R$，存在 $t\in R$，使得 $f(x)>g(t)$ 成立，则满足条件的实数 m 构成的集

自主选拔在线 www.zizzs.com

合为（　　）

A. $\{m|m\le\frac{1}{4}\}$　　B. $\{m|m<\frac{1}{4}\}$　　C. $\{m|0<m\le\frac{1}{4}\}$　　D. $\{m|m>\frac{1}{4}\}$

第Ⅱ卷

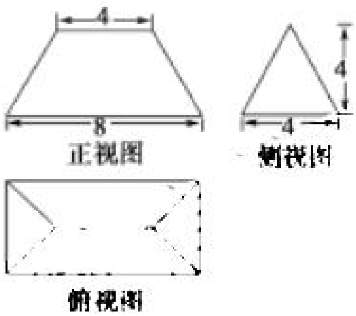
二、填空题：本题共4小题，每小题5分。

13．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_n=2^{n+1}-2$，$n\in N^*$，则$a_3=$___________；

14．已知实数x,y满足约束条件$\begin{cases}x+y-4\le0\\x-2y+2\ge0\\y\ge0\end{cases}$，则$z=x+2y$的最大值为_______；

15．已知函数$f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin x\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x$，若将其图象向右平移$\varphi\left(\varphi>0\right)$个单位长度后所得的图象关于原点对称，则$\varphi$的最小值为_____；

16．刍甍，中国古代算数中的一种几何形体，《九章算术》中记载："刍甍者，下有袤有广，而上有袤无广.刍，草也.甍，屋盖也."翻译为"底面有长有宽为矩形，顶部只有长没有宽为一条棱.刍甍字面意思为茅草屋顶."如图为一个刍甍的三视图，其中正视图为等腰梯形，侧视图为等腰三角形，则该茅草屋顶的面积为__________.



三、解答题：本题共6小题,共70分.解答应写出必要证明过程或演算步骤。

（一）必考题：第17-21题为必考题，每个试题考生都必须作答。

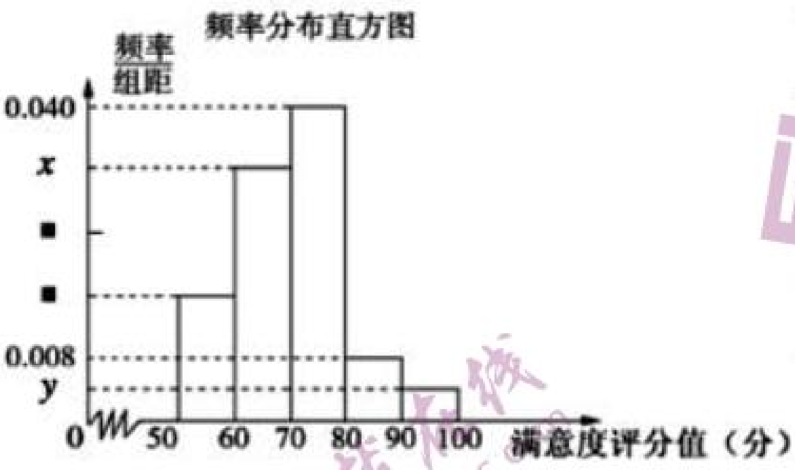
17.**（本题满分12分）**设等差数列$\{a_n\}$的公差为$d(d\neq0)$，$a_1=1$，a_2为a_1,a_4的等比中项.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=a_n+2^n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

18.**（本题满分12分）**共享单车是指由企业在校园、公交站点、商业区、公共服务区等场所提供的自行车单车共享服务，由于其依托"互联网+"，符合"低碳出行"的理念，已越来越多地引起了人们的关注.某部门为了对该城市共享单车加强监管，随机选取了50人就该城市共享单车的推行情况进行问卷调查，并将问卷中的这50人根据其满意度评分值（百分制）按

照$[50,60),[60,70),\cdots,[90,100]$分成5组，请根据下面尚未完成并有局部污损的频率分布表和频率分布直方图（如图所示）解决下列问题：



组别	分组	频数	频率
第1组	[50,60)	8	0.16
第2组	[60,70)	a	■
第3组	[70,80)	20	0.40
第4组	[80,90)	■	0.08
第5组	[90,100]	2	b
	合计	■	■

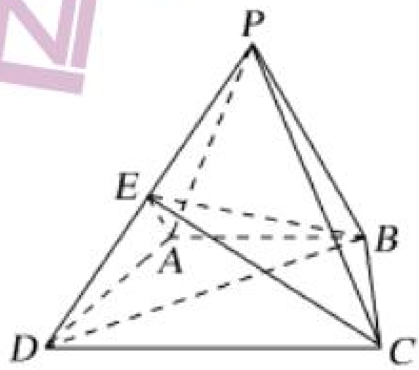
（1）求a，b，x，y的值；

（2）若在满意度评分值为$[80,100]$的人中随机抽取2人进行座谈，求所抽取的2人中至少一人来自第5组的概率.

19.**（本题满分12分）**如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为等腰梯形，$AB/\!/CD$，$CD=2AB=4$，$AD=\sqrt{2}$，$\triangle PAB$为等腰直角三角形，$PA=PB$，平面$PAB\perp$底面$ABCD$，E为PD的中点.

（1）求证：$AE/\!/$平面PBC；

（2）求三棱锥$P-EBC$的体积.



20.**（本题满分12分）**已知函数$f(x)=\dfrac{e^x}{x-a}$（$a\neq 0$）.

（1）若$a=1$，求曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程；

（2）求函数$y=f(x)$的单调区间；

自主选拔在线 www.zizzs.com

（3）函数 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上满足 $f(x)..1$，求 a 的取值范围.

21.**（本题满分 12 分）**已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率与等轴双曲线的离心率互为倒数关系，直线 l：$x-y+\sqrt{2}=0$ 与以原点为圆心， 以椭圆 C 的短半轴长为半径的圆相切.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)设 M 是椭圆的上顶点，过点 M 分别作直线 MA，MB 交椭圆于 A，B 两点，设两直线的斜率分别为 k_1，k_2，且 $k_1+k_2=4$，证明：直线 AB 过定点,，并求出该定点.

（二）选考题：请考生在 22、23 两题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分。

22.（本题满分 10 分） 选修 4－4：坐标系与参数方程

已知直线l的极坐标方程为$\sqrt{2}\rho\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$，以极点为原点，极轴为$x$轴正半轴建立平面直角坐标系，曲线$C$的参数方程为$\begin{cases}x=t\\y=t^2\end{cases}$（$t$为参数），直线$l$与曲线$C$交于$A$，$B$两点.

（1）求直线l的直角坐标方程，及曲线C的普通方程；

（2）若点$M\left(-1,0\right)$，求$\left|MA\right|\cdot\left|MB\right|$的值.

23.（本题满分 10 分） 选修 4－5：不等式选讲

已知函数$f\left(x\right)=\left|2x+1\right|-\left|x\right|$.

（1）解不等式$f\left(x\right)\geq 0$；

（2）若存在实数x，使得$f\left(x\right)\leq\left|x\right|+a$，求实数$a$的取值范围.

数学试卷(文科)参考答案

一、选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	**A**	**C**	**C**	**B**	**D**	**B**	**D**	**B**	**A**	**C**	**A**

二、填空题

13. 8　　14. 6　　15. $\frac{\pi}{12}$.　　16. $32\sqrt{5}$

三、解答题

17. （1）$a_n=n$ （2）$T_n=\frac{n(n+1)}{2}+2\left(2^n-1\right)$

【详解】

解：（1）Q $a_1=1$，a_2为a_1与a_4的等比中项，

$\therefore a_2^2=a_1\cdot a_4$，即$(1+d)^2=1\times(1+3d)$，

由$d\neq 0$，所以$d=1$，

$\therefore$数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=1+(n-1)\times 1=n$.

（2）由（1）得$a_n=n$，$\therefore b_n=n+2^n$，

$\therefore T_n=(1+2+\text{L}\ +n)+\frac{2\left(1-2^n\right)}{1-2}=\frac{n(n+1)}{2}+2\left(2^n-1\right)$.

18. （1）$a=16$，$b=0.04$，$x=0.032$，$y=0.004$；（2）$\frac{3}{5}$.

【详解】

（1）由频率分布表可得$b=\frac{2}{50}=0.04$

$[80,90)$内的频数为$50\times 0.08=4$，

$\therefore a=50-8-20-4-2=16$

$\therefore[60,70)$内的频率为$\frac{16}{50}=0.32$

$\therefore x=\frac{0.32}{10}=0.032$ Q $[90,100]$内的频率为 0.04 $\therefore y=\frac{0.04}{10}=0.004$

（2）由题意可知，第 4 组共有 4 人，第 5 组共有 2 人，

设第 4 组的 4 人分别为a_1、a_2、a_3、a_4；第 5 组的 2 人分别为b_1、b_2

从中任取 2 人的所有基本事件为：

(a_1,a_2)，(a_1,a_3)，(a_1,a_4)，(a_1,b_1)，(a_1,b_2)，(a_2,a_3)，(a_2,a_4)，(a_2,b_1)，(a_2,b_2)，(a_3,a_4)，

(a_3,b_1)，(a_3,b_2)，(a_4,b_1)，(a_4,b_2)，(b_1,b_2)共 15 个.

至少一人来自第 5 组的基本事件有：

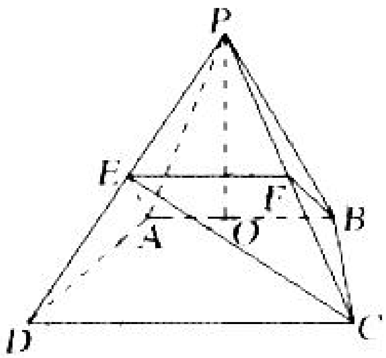
(a_1,b_1)，(a_1,b_2)，(a_2,b_1)，(a_2,b_2)，(a_3,b_1)，(a_3,b_2)，(a_4,b_1)，(a_4,b_2)，(b_1,b_2)共 9 个.

所以$P=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$.∴所抽取 2 人中至少一人来自第 5 组的概率为$\dfrac{3}{5}$.

19. （1）证明见解析；（2）$\dfrac{1}{3}$.

【详解】

(1)如图，取 PC 的中点 F，连接 EF，BF，



∵$PE=DE$，$PF=CF$，

∴$EF\,/\!/\,CD$，$CD=2EF$，

∵$AB\,/\!/\,CD$，$CD=2AB$，

∴$AB\,/\!/\,EF$，且 $EF=AB$.

∴四边形 $ABFE$ 为平行四边形，∴$AE\,/\!/\,BF$.

∵$BF\subset$平面 PBC，$AE\not\subset$平面 PBC.

故 $AE\,/\!/$平面 PBC.

(2)由(1)知 $AE\,/\!/$平面 PBC，

∴点 E 到平面 PBC 的距离与点 A 到平面 PBC 的距离相等，

∴$V_{P-EBC}=V_{E-PBC}=V_{A-PBC}=V_{P-ABC}$.

如图，取 AB 的中点 O，连接 PO，

∵$PA=PB$，∴$OP\perp AB$.

∵平面 $PAB\perp$平面 $ABCD$，平面 $PAB\cap$平面 $ABCD=AB$，$OP\subset$平面 PAB，

∴$OP\perp$平面 $ABCD$.

∵$\triangle PAB$ 为等腰直角三角形，$PA=PB$，$AB=2$，

∴$OP=1$.

∵四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，且 $AB\,/\!/\,CD$，$CD=2AB=4$，$AD=\sqrt{2}$，

∴梯形 $ABCD$ 的高为 1，

∴$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times2\times1=1$.

故 $V_{P-EBC}=V_{P-ABC}=\frac{1}{3}\times1\times1=\frac{1}{3}$.

20. （1）$y=-2x-1$；（2）递减区间为$(-\infty,a)$，$(a,a+1)$；递增区间为$(a+1,+\infty)$；（3）$[-1,0)$.

【详解】

解：（1）若$a=1$，则$f(x)=\frac{e^x}{x-1}$，$f'(x)=\frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$，

所以$f'(0)=-2$，即切线的斜率等于—2；

又$f(0)=-1$，切点为$(0,-1)$；

所以曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为$y-(-1)=-2x$，即$y=-2x-1$；

（2）$f(x)$的定义域为$(-\infty,a)\cup(a,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{(x-a-1)e^x}{(x-a)^2}$（$x\neq a$），

当$x<a$或$a<x<a+1$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(-\infty,a)$和$(a,a+1)$上单调递减；

当$x>a+1$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(a+1,+\infty)$单调递增；

所以$f(x)$的递减区间为$(-\infty,a)$，$(a,a+1)$；递增区间为$(a+1,+\infty)$；

（3）①当$a\le-1$，即$a+1\le0$时，$f(x)$在$[0,1]$上单调递增，$f(x)_{\min}=f(0)=-\frac{1}{a}\ge1$，

解得$0>a\ge-1$，因此$a=-1$；

②当$-1<a<0$，即$0<a+1<1$时，$f(x)$在$[0,a+1)$上单调递减，$[a+1,1]$上单调递增，

$f(x)_{\min}=f(a+1)=e^{a+1}\ge1=e^0$，解得$a\ge-1$，因此$-1<a<0$；

③当$0<a\le1$时，定义域是$\{x\mid x\neq a\}$，但$f(x)$在$[0,1]$要有定义，故排除$0<a\le1$；

④当$a>1$，$f(x)$在$[0,1]$上单调递减，

$f(x)_{\min}=f(1)=\frac{e}{1-a}<0$，与$f(x)..1$矛盾，因此无解；

综上所述，a的取值范围为$[-1,0)$.

21. （1）$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.（2）见解析

【解析】

(1)∵等轴双曲线离心率为$\sqrt{2}$，∴椭圆C的离心率$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

∴$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$，∴$a^2=2b^2$.

∵由$x-y+\sqrt{2}=0$与圆$x^2+y^2=b^2$相切，得

$b=1$，∴$a^2=2$.∴椭圆C的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)证明 ①若直线AB的斜率不存在，设方程为$x=x_0$，则点$A(x_0,y_0)$，$B(x_0,-y_0)$.

由已知$\frac{y_0-1}{x_0}+\frac{-y_0-1}{x_0}=4$，得$x_0=-\frac{1}{2}$.

此时AB方程为$x=-\frac{1}{2}$.

②若直线AB的斜率存在，设AB方程为$y=kx+m$，依题意$m\neq\pm1$.

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由$\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$

得$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0$.

则$x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-2}{1+2k^2}$.

由已知$k_1+k_2=4$，可得$\frac{y_1-1}{x_1}+\frac{y_2-1}{x_2}=4$,

$\therefore \frac{kx_1+m-1}{x_1}+\frac{kx_2+m-1}{x_2}=4$，即$2k+(m-1)\ \frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=4$，将$x_1+x_2$，$x_1x_2$代入得$k-\frac{km}{m+1}=2$，$\therefore k=2(m+1)$，

$\therefore m=\frac{k}{2}-1$.故直线$AB$的方程为$y=kx+\frac{k}{2}-1$，即$y=k(x+\frac{1}{2})-1$.

$\therefore$直线AB过定点$(-\frac{1}{2},-1)$.

综上，直线AB过定点$(-\frac{1}{2},-1)$.

22. （1）$x-y+1=0$；$y=x^2$；（2）2.

【详解】

（1）由$\sqrt{2}\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-1$，得$\rho\cos\theta-\rho\sin\theta+1=0$，

将$x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$代入，

所以直线l的直角坐标方程为$x-y+1=0$，

由$\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases}$，消去参数$t$得$y=x^2$，所以曲线$C$的普通方程为$y=x^2$.

（2）显然点$M\left(-1,0\right)$在直线l：$x-y+1=0$上，直线l的参数方程为$\begin{cases} x=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}m \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}m \end{cases}$（$m$为参数），代入曲线$C$可得$\frac{\sqrt{2}}{2}m=\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{2}m\right)^2$，即$m^2-3\sqrt{2}m+2=0$，

设A，B对应的参数分别为m_1，m_2，则$m_1+m_2=3\sqrt{2}$，$m_1m_2=2$，

∴$|MA|\cdot|MB|=|m_1m_2|=2$.

23. （1）$(-\infty,-1]\cup\left[-\frac{1}{3},+\infty\right)$；（2）$a\geq-1$.

【详解】

解：(1)①当$x\leq-\frac{1}{2}$时，$-1-2x+x\geq0\Rightarrow x\leq-1$，

所以$x\leq-1$

②当$-\frac{1}{2}<x<0$时，$2x+1+x\geq0\Rightarrow x\geq-\frac{1}{3}$，

所以$-\frac{1}{3}\leq x<0$

③当$x\geq0$时，$x+1\geq0\Rightarrow x\geq-1$，

所以$x\geq0$

综上，不等式的解集为$(-\infty,-1]\cup\left[-\frac{1}{3},+\infty\right)$

(2)原式即$|2x+1|-2|x|\leq a$

$\therefore\left|x+\frac{1}{2}\right|-|x|\leq\frac{a}{2}$

由绝对值三角不等式，$\left|\left|x-\frac{1}{2}\right|-|x|\right|\leq\frac{1}{2}$，

即$-\frac{1}{2}\leq\left|x+\frac{1}{2}\right|-|x|\leq\frac{1}{2}$

$\therefore\frac{a}{2}\geq-\frac{1}{2}$，即$a\geq-1$

设 A，B 对应的参数分别为 m_1，m_2，则 $m_1+m_2=3\sqrt{2}$，$m_1m_2=2$，

$\therefore |MA|\cdot|MB|=|m_1m_2|=2$.

23. （1）$(-\infty,-1]\cup\left[-\frac{1}{3},+\infty\right)$；（2）$a\geq -1$.

【详解】

解：(1)①当 $x\leq -\frac{1}{2}$ 时，$-1-2x+x\geq 0\Rightarrow x\leq -1$，

所以 $x\leq -1$

②当 $-\frac{1}{2}<x<0$ 时，$2x+1+x\geq 0\Rightarrow x\geq -\frac{1}{3}$，

所以 $-\frac{1}{3}\leq x<0$

③当 $x\geq 0$ 时，$x+1\geq 0\Rightarrow x\geq -1$，

所以 $x\geq 0$

综上，不等式的解集为 $(-\infty,-1]\cup\left[-\frac{1}{3},+\infty\right)$

(2)原式即 $|2x+1|-2|x|\leq a$

$\therefore \left|x+\frac{1}{2}\right|-|x|\leq \frac{a}{2}$

由绝对值三角不等式，$\left|\left|x-\frac{1}{2}\right|-|x|\right|\leq \frac{1}{2}$，

即 $-\frac{1}{2}\leq \left|x+\frac{1}{2}\right|-|x|\leq \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{a}{2}\geq -\frac{1}{2}$，即 $a\geq -1$