数　学

注意事项：

1. 本试题满分 150 分，考试时间为 120 分钟。
2. 答卷前，务必将姓名和准考证号填涂在答题纸上。
3. 使用答题纸时，必须使用 0.5 毫米的黑色签字笔书写，要字迹工整，笔迹清晰；超出答题区书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1. 若复数 z 满足 $z(1+\mathrm{i})=2\mathrm{i}$，则 $|z|=$

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. 3

2. 已知集合 $A=\{x\,|\,a<x<a+2\}$，$B=\{x\,|\,y=\ln(6+x-x^2)\}$，且 $A\subseteq B$，则

A. $-1\leqslant a\leqslant 2$　　B. $-1<a<2$　　C. $-2\leqslant a\leqslant 1$　　D. $-2<a<1$

3. 在 $\triangle ABC$ 中，“$A>\dfrac{\pi}{6}$”是“$\sin A>\dfrac{1}{2}$”的

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件　C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

4. 过抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 的焦点且倾斜角为 45° 的直线与抛物线交于 A,B 两点，若点 A,B 到 y 轴的距离之和为 $4\sqrt{2}$，则 p 的值为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 新能源汽车具有零排放、噪声小、能源利用率高等特点，近年来备受青睐. 某新能源汽车制造企业为调查其旗下 A 型号新能源汽车的耗电量（单位：$\mathrm{kW\cdot h/100km}$）情况，随机调查得到了1200个样本，据统计该型号新能源汽车的耗电量 $\xi\sim N(13,\sigma^2)$，若 $P(12<\xi<14)=0.7$，则样本中耗电量不小于 $14\ \mathrm{kW\cdot h/100km}$ 的汽车大约有

A. 180 辆　　B. 360 辆　　C. 600 辆　　D. 840 辆

6. 由点 $P(-3,0)$ 射出的两条光线与 $\odot O_1:(x+1)^2+y^2=1$ 分别相切于点 A,B，称两射线 PA,PB 上切点右侧部分的射线和优弧 AB 右侧所夹的平面区域为 $\odot O_1$ 的“背面”. 若 $\odot O_2:(x-1)^2+(y-t)^2=1$ 处于 $\odot O_1$ 的“背面”，则实数 t 的取值范围为

A. $-2\sqrt{3}\leqslant t\leqslant 2\sqrt{3}$　　B. $-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}+1\leqslant t\leqslant \dfrac{4\sqrt{3}}{3}-1$

C. $-1\leqslant t\leqslant 1$　　D. $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\leqslant t\leqslant \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

7. 已知等边$\triangle ABC$的边长为2，D为BC的中点，P为线段AD上一点，$PE \perp AC$，垂足为E，当$\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = -\frac{2}{3}$时，$\overrightarrow{PE} =$

A. $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$　B. $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$　C. $-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　D. $-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

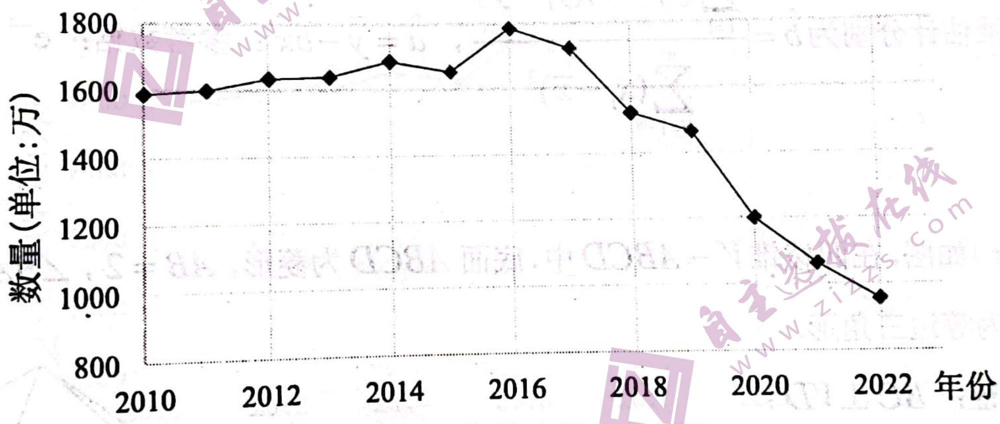
8. 高斯是德国著名的数学家，近代数学奠基者之一，享有"数学王子"的美誉.函数$f(x)=[x]$称为高斯函数，其中$x \in \mathbf{R}$，$[x]$表示不超过x的最大整数，例如：$[-1.1]=-2$，$[2.5]=2$，则方程$[2x+1]+[x]=4x$的所有解之和为

A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{3}{4}$　C. $\frac{3}{2}$　D. $\frac{7}{4}$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 近年来，我国人口老龄化持续加剧，为改善人口结构，保障国民经济可持续发展，国家出台了一系列政策，如2016年起实施全面两孩生育政策，2021年起实施三孩生育政策等. 根据下方的统计图，下列结论正确的是

2010至2022年我国新生儿数量折线图



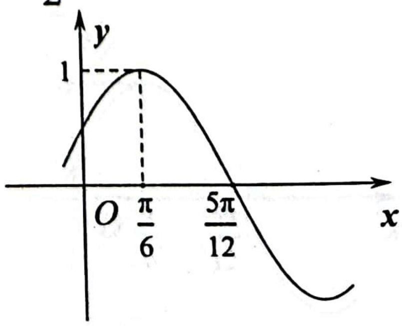
A. 2010至2022年每年新生儿数量的平均数高于1400万

B. 2010至2022年每年新生儿数量的第一四分位数低于1400万

C. 2015至2022年每年新生儿数量呈现先增加后下降的变化趋势

D. 2010至2016年每年新生儿数量的方差大于2016至2022年每年新生儿数量的方差

10. 已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2})$的部分图象如图所示，则



A. $f(x)$的最小正周期为π

B. 当$x \in [-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$时，$f(x)$的值域为$[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]$

C. 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度可得函数 $g(x)=\sin 2x$ 的图象

D. 将函数 $f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长为原来的 2 倍，纵坐标不变，得到的函数图象关于点 $(\frac{5\pi}{6},0)$ 对称

11. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，$O$ 为坐标原点，过 C 的右焦点 F 作 C 的一条渐近线的平行线交 C 于点 P，交 C 的另一条渐近线于点 Q，则

A. 向量 $\overrightarrow{QF}$ 在 $\overrightarrow{OF}$ 上的投影向量为 $\frac{1}{2}\overrightarrow{OF}$

B. 若 $\triangle OQF$ 为直角三角形，则 C 为等轴双曲线

C. 若 $\tan\angle OQF=-\frac{3}{4}$，则 C 的离心率为 $\sqrt{10}$

D. 若 $\overrightarrow{PQ}=4\overrightarrow{FP}$，则 C 的渐近线方程为 $x\pm 2y=0$

12. 已知 $f(x)=e^x$，$g(x)=e^{-x}$，若直线 $x=k(k>0)$ 与 $f(x)$、$g(x)$ 图象交点的纵坐标分别为 n,m，且 $n<2m$，则

A. $n+m<\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　B. $n-m<\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $n^n>(m+1)^{m+1}$　D. $n^{m+1}<(m+1)^n$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $(x-2y+1)^5$ 展开式中含 x^2y 项的系数为________.

14. 某企业的一批产品由一等品零件、二等品零件混装而成，每包产品均含有10个零件. 小张到该企业采购，利用如下方法进行抽检：从该企业产品中随机抽取1包产品，再从该包产品中随机抽取4个零件，若抽取的零件都是一等品，则决定采购该企业产品；否则，拒绝采购. 假设该企业这批产品中，每包产品均含1个或2个二等品零件，其中含2个二等品零件的包数占10%，则小张决定采购该企业产品的概率为________.

15. 过点 $(-1,1)$ 与曲线 $f(x)=\ln(x+1)-3e^x+2$ 相切的直线方程为________.

16. 在三棱锥 $V-ABC$ 中，AB,AC,AV 两两垂直，$AB=AV=4$，$AC=2$，P 为棱 AB 上一点，$AH\perp VP$ 于点 H，则 $\triangle VHC$ 面积的最大值为_______；此时，三棱锥 $A-VCP$ 的外接球表面积为_______.（本小题第一空 2 分，第二空 3 分）.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）已知等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，其前n项和为S_n，且$3a_1,a_3,5a_2$成等差数列，$S_4+5=5a_3$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

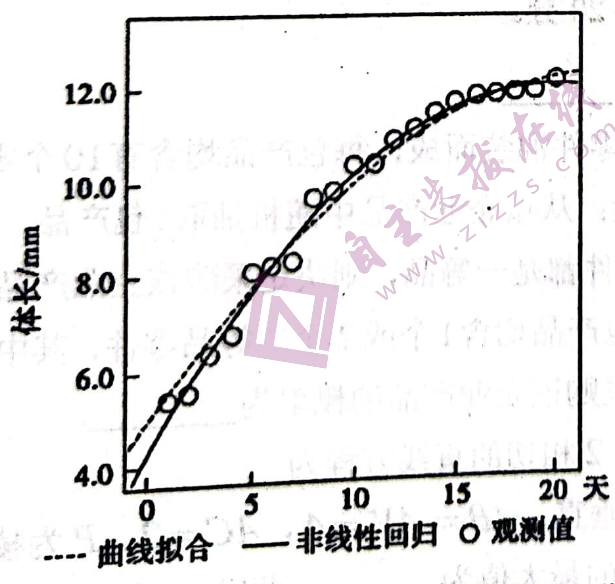
（2）设$b_n=a_n\cdot\log_3 a_{n+1}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

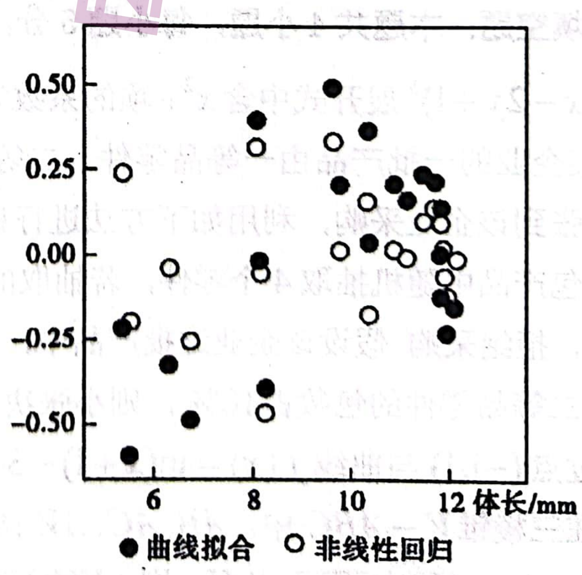
18.（12 分）在锐角ΔABC中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$c-2b\cos A=b$.

（1）求证：$A=2B$；

（2）若A的角平分线交BC于D，且$c=2$，求ΔABD面积的取值范围.

19.（12 分）黄河鲤是我国华北地区的主要淡水养殖品种之一，其鳞片金黄、体形梭长，尤以色泽鲜丽、肉质细嫩、气味清香而著称. 为研究黄河鲤早期生长发育的规律，丰富黄河鲤早期养殖经验，某院校研究小组以当地某水产养殖基地的黄河鲤仔鱼为研究对象，从出卵开始持续观察 20 天，试验期间，每天固定时段从试验水体中随机取出同批次 9 尾黄河鲤仔鱼测量体长，取其均值作为第t_i天的观测值y_i（单位：mm），其中$t_i=i$，$i=1,2,3,\cdots,20$. 根据以往的统计资料，该组数据(t_i,y_i)可以用 Logistic 曲线拟合模型$y=\dfrac{1}{\dfrac{1}{u}+ab^t}$或 Logistic 非线性回归模型$y=\dfrac{u}{1+e^{a-bt}}$进行统计分析，其中$a,b,u$为参数. 基于这两个模型，绘制得到如下的散点图和残差图：





（1）你认为哪个模型的拟合效果更好？分别结合散点图和残差图进行说明；

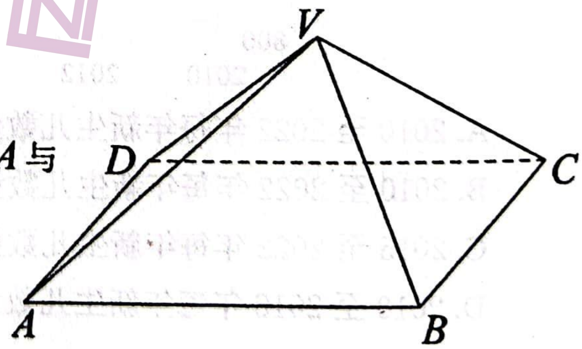
（2）假定$u=12.5$，且黄河鲤仔鱼的体长y与天数t具有很强的相关关系. 现对数据进行初步处理，得到如下统计量的值：$\bar{t}=\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}t_i=10.5$，$\bar{z}=\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}z_i=-3.83$，$\bar{w}=\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}w_i=-1.608$，$\sum_{i=1}^{20}(t_i-\bar{t})^2=665$，$\sum_{i=1}^{20}(z_i-\bar{z})(t_i-\bar{t})=-109.06$，$\sum_{i=1}^{20}(w_i-\bar{w})(t_i-\bar{t})=-138.32$，其中$z_i=\ln(\frac{1}{y_i}-\frac{1}{u})$，$w_i=\ln(\frac{u}{y_i}-1)$，根据（1）的判断结果及给定数据，求$y$关于$t$的经验回归方程，并预测第22天时仔鱼的体长(结果精确到小数点后2位).

附：对于一组数据$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，其回归直线$\hat{y}=a+bx$的斜率和截距的最小二乘估计分别为$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$；参考数据：$e^{-4}\approx0.0183$.

20.（12分）如图，在四棱锥$V-ABCD$中，底面$ABCD$为菱形，$AB=2$，$\angle BAD=60^\circ$，$\triangle VBC$为等边三角形.

（1）求证：$BC\perp VD$；

（2）若二面角$A-BC-V$的大小为60°，求直线VA与平面VBC所成角的正弦值.



21.（12 分）在平面直角坐标系中，已知点 P 到点 $F(\sqrt{2},0)$ 的距离与到直线 $x=2\sqrt{2}$ 的距离之比为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（1）求点 P 的轨迹 C 的方程；

（2）过点 $(0,1)$ 且斜率为 $k(\dfrac{1}{2}\leqslant k\leqslant 2)$ 的直线 l 与 C 交于 A,B 两点，与 x 轴交于点 M，线段 AB 的垂直平分线与 x 轴交于点 N，求 $\dfrac{|AB|}{|MN|}$ 的取值范围.

22.（12 分）已知 $f(x)=a\sin x-x+\dfrac{1}{x+1}$（$x>-1$），且 0 为 $f(x)$ 的一个极值点.

（1）求实数 a 的值；

（2）证明：①函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上存在唯一零点；

②$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}<\sum\limits_{k=2}^{n}\sin\dfrac{1}{k^2}<1$，其中 $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant 2$.