2022学年第二学期天域全国名校协作体4月阶段性联考
高三年级数学学科参考答案

命题：雅礼中学　　莫跃武

命题：青岛二中　　董天龙

审题：石家庄二中　　宛昭勋

审题：杭州学军中学　　吴力田

选择题部分（共60分）

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．复数$\dfrac{i^{2022}+i^{2023}+i^{2024}}{1-i}=$（　）

A．$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$　　B．$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$　　C．$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$　　D．$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

【答案】C

【详解】因为$i^2=-1$，$i^3=-i$，$i^4=1$，所以由周期性可知原式等于$=\dfrac{i^2+i^3+i^4}{1-i}=\dfrac{-i}{1-i}=\dfrac{-i(1+i)}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$.

故选：C

2．已知集合$M=\left\{x\middle|2^{|x-2|}\geq 4\right\}$，$N=\{x|x>4$或$x\leq -2\}$，则$M\cap N=$（　）.

A．$\{x|x\geq 4$或$x\leq 0\}$　　B．$\{x|x>4$或$x\leq -2\}$

C．$\{x|x>4$或$x<-2\}$　　D．$\{x|x\geq -2\}$

【答案】B

【详解】解法一：由题可得$M=\{x||x-2|\geq 2\}=\{x|x\geq 4$或$x\leq 0\}$，$N=\{x|x>4$或$x\leq -2\}$，

所以$M\cap N=\{x|x>4$或$x\leq -2\}$.

解法二：由题可得$4\notin N$，所以$4\notin M\cap N$，故排除A，D；

又$-2\in M$且$-2\in N$，所以$-2\in M\cap N$，故排除C.

故选：B.

3．某购物网站在2022年11月开展"全部6折"促销活动，在11日当天购物还可以再享受"每张订单金额(6折后)满300元时可减免60元"．某人在11日当天欲购入原价48元(单价)的商品共45件，为使花钱总数最少，他最少需要下的订单张数为(　　)

A．7　　B．6

C．5　　　　D．4

【答案】D

【详解】为使花钱总数最少，需使每张订单满足“每张订单金额(6 折后)满 300 元时可减免 60 元”，即每张订单打折前原金额不少于 500 元．由于每件原价 48 元，因此每张订单至少 11 件，所以最多需要下的订单张数为 4 张．

4. 大学生志愿服务西部计划（简称西部计划）是经国务院常务会议决定，由共青团中央、教育部、财政部、人力资源社会保障部共同组织实施的一项重大人才工程。现招募选派一定数量的西部计划全国项目志愿者到西部地区基层工作，某大学计划将 6 名志愿者平均分成 3 组，到 3 个不同地点服务，若每组去一个地点，每个地点都有人服务，且甲、乙两名志愿者在同一个地点服务的分配方案有（　　）

A．18 种　　B．36 种　　C．72 种　　D．144 种

【答案】A

法一：先分组再排序 $\dfrac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}A_3^3=18$

法二：特殊元素优先安排，先安排甲、乙，再安排其他人员 $C_3^1\cdot\dfrac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}A_2^2=18$

5.已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，若 $p=f(e^{0.1})$，$q=f(\ln\frac{8}{7})$，$r=f(-\frac{1}{7})$，则 p,q,r 大小关系为（　）

A. $r<q<p$　　B. $q<r<p$　　C. $p<r<q$　　D. $r<p<q$

【答案】C

【详解】$f(x)$ 为偶函数，则 $p=f\left(e^{0.1}\right),q=f\left(\ln\frac{8}{7}\right),r=f\left(\frac{1}{7}\right)$.又当 $x\geq 0$ 时，

设 $h(x)=\ln x-x+1$，$h'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$（$x>0$），当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，所以当 $x=1$ 时，$h(x)$ 取得最大值，$h(1)=0$，

则 $\ln x\leq x-1$，$x=1$ 时，等号成立，所以 $\ln\frac{8}{7}<\frac{8}{7}-1=\frac{1}{7}$，

$\therefore e^{0.1}>\frac{1}{7}>\ln\frac{8}{7}>0$，$\therefore f\left(e^{0.1}\right)<f\left(\frac{1}{7}\right)<f\left(\ln\frac{8}{7}\right)$，故选：C

6.　O 为平行四边形 ABCD 外一点，$OA=\sqrt{3},OB=3,OC=2,\angle AOB=\frac{\pi}{6},\angle BOC=\frac{\pi}{3},\angle AOC=\frac{\pi}{2}$,则向量 $\overrightarrow{OD}$ 与向量 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为（　　　）

A. $\frac{5\pi}{6}$　　B. $\frac{2\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{6}$　　答案：B

答案：由向量运算可知 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$

所以：$\cos\angle BOD=\dfrac{\overrightarrow{OB}\bullet\overrightarrow{OD}}{|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OD}|}=\dfrac{-\dfrac{3}{2}}{\sqrt{1}\cdot 3}=-\dfrac{1}{2}$所以夹角为$\dfrac{2\pi}{3}$

7. 已知圆C_1：$(x-1)^2+(y-1)^2=1$，圆C_2：$(x-2)^2+(y-1)^2=4$，A，B分别是圆C_1，C_2上的动点.若动点M在直线l_1：$x+y-1=0$上，动点N在直线l_2：$x+y+1=0$上，记线段MN的中点为P，则$|PA|+|PB|$的最小值为（　）

A. 3　　B. $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$　　C. $\sqrt{14}-3$　　D. $\sqrt{13}-3$

答案】D

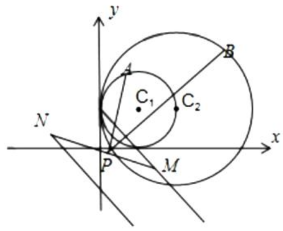
【详解】由题意，点动点M在直线l_1：$x+y-1=0$上，动点N在直线l_2：$x+y+1=0$上，

线段MN的中点为P，可得点P在直线$x+y=0$上，又由$|PA|+|PB|\ge|PC_1|-r_1+|PC_2|-r_2=|PC_1|+|PC_2|-3$，

点$C_1(1,1)$关于直线$x+y=0$对称的点$C(-1,-1)$，则

$|PC_1|+|PC_2|=|PC|+|PC_2|\ge|CC_2|=\sqrt{13}$，

所以$|PA|+|PB|$的最小值为$\sqrt{13}-3$.



故选 D

8. 已知函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x},x<0\\|\ln x|,x>0\end{cases}$（$e$为自然对数的底数），则函数$F(x)=f[f(x)]-\dfrac{1}{e^3}f(x)-1$的零点个数为（　）

A. 3　　B. 5　　C. 7　　D. 9

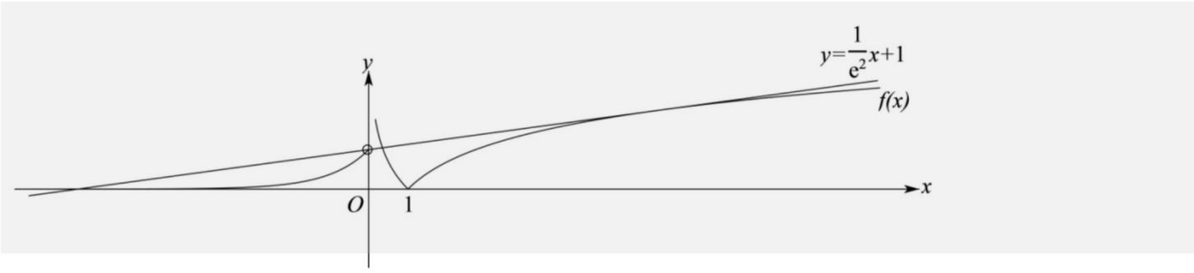
【答案】C

【详解】设$f(x)=t$，令$F(x)=0$可得：$f(t)=\dfrac{1}{e^3}t+1$；$y=\dfrac{1}{1-x}$在$x=0$处切线的斜率值为$k_1=1$

设$y=k_2x+1$与$y=\ln x$相切于点$(x_2,\ln x_2)$，

$\because(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，$\therefore$切线斜率为$\dfrac{1}{x_2}$，则切线方程为：$y-\ln x_2=\dfrac{1}{x_2}(x-x_2)$，即$y=\dfrac{1}{x_2}\cdot x+\ln x_2-1$，

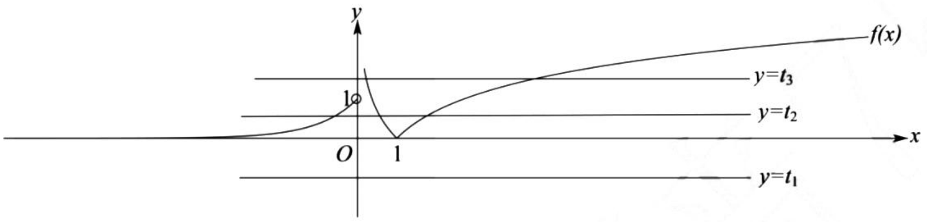
$\therefore\begin{cases}k_2=\dfrac{1}{x_2}\\\ln x_2-1=1\end{cases}$，解得：$x_2=e^2$，$k_2=\dfrac{1}{e^2}$；作出$f(x)$与$y=\dfrac{1}{e^2}x+1$图象如下图所示，



$\therefore y=\frac{1}{e^3}x+1$与$f(x)$有四个不同交点，

即$y=\frac{1}{e^3}t+1$与$f(t)$有四个不同交点，设三个交点为$t_1,t_2,t_3,t_4\left(t_1<t_2<t_3<t_4\right)$，由图象可知：

$t_1<0<t_2<1<t_3<t_4$；



$\because f(x)$与$y=t_1$无交点，与$y=t_2$有三个不同交点，与$y=t_3$，$y=t_4$各有两个不同交点，

$\therefore F(x)=f\left[f(x)\right]-\frac{1}{e^2}f(x)-1$的零点个数为 7 个.故选：C

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9.下列说法正确的有（　）

A. 若随机变量$X\sim N(1,\sigma^2)$，$P(X\geq 0)=0.8$，则$P(0\leq X\leq 2)=0.6$

B. 残差和越小，模型的拟合效果越好

C. 根据分类变量X与Y的成对样本数据计算得到$\chi^2=4.012$，依据$\alpha=0.05$的独立性检验$\left(x_{0.05}=3.841\right)$，可判断$X$与$Y$有关且犯错误的概率不超过 0.05

D. 数据$4,7,5,6,10,2,12,8$的第 70 百分位数为 8

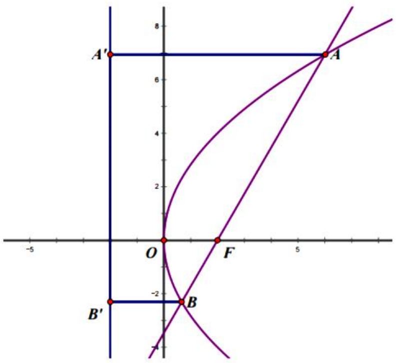
【答案】ACD

$A.$随机变量$X\sim N\left(1,\sigma^2\right)$，所以对称轴为$x=1$,由$P\left(X\geq 0\right)=0.8$知，
$P\left(X<0\right)=1-P\left(X\geq 0\right)=0.2$,所以$P\left(X>2\right)=P\left(X<0\right)=0.2$,
所以$P\left(0\leq X\leq 2\right)=0.6$.故A正确
$B.$残差和越小，模型的拟合效果越好；
因为残差平方和越小，模型的拟合效果越好. 故B错误
$C.$由$\chi^2=4.012>3.841$可知判断X与Y有关且犯错误的概率不超过0.05.C正确
$D.$对数据从小到大重新排序，即：2,4,5,6,7,8,10,12，共8个数字，
所以$8\times 70\%=5.6$，这组数据的第70百分位数为第6项，即8.故D正确

10. 已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F，经过点F且斜率为$\sqrt{3}$的直线l与抛物线C交于点A，B两点（点A在第一象限），若$|AF|=8$，则以下结论正确的是（　）

A. $p=2$　　B. $|AF|=3|BF|$　　C. $\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{1}{2}$　　D. $S_{\Delta AOB}=\dfrac{32\sqrt{3}}{3}$

【答案】BC



法一：如图，$F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，直线的斜率为$\sqrt{3}$，则设直线$l$的方程为$y=\sqrt{3}\left(x-\dfrac{p}{2}\right)$，联立

$\begin{cases}y^2=2px\\ y=\sqrt{3}\left(x-\dfrac{p}{2}\right)\end{cases}$，得$12x^2-20px+3p^2=0$.解得：$x_A=\dfrac{3p}{2},x_B=\dfrac{p}{6}$.

由$|AF|=x_A+\dfrac{p}{2}=2p=8$，得$p=4$.故A错误；

由于$|BF|=x_B+\dfrac{p}{2}=\dfrac{2}{3}p$，则$|AF|=3|BF|$，故B正确；

同理$\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{2}$，故C正确；

因为直线l的方程为$y=\sqrt{3}\left(x-2\right)$，原点到直线的距离为$d=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3+1}}=\sqrt{3}$，

所以$S=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\left(8+\dfrac{8}{3}\right)=\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$,故D错误.

法二：由倾角式焦半径公式和面积公式可知，

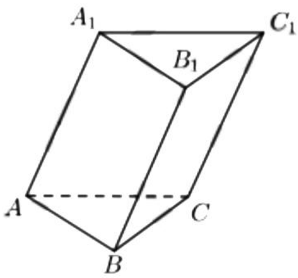
$|AF|=\dfrac{p}{1-\cos\alpha}=2p=8, p=4$. 故 A 错误；

$|BF|=\dfrac{p}{1+\cos\alpha}=\dfrac{2}{3}p=\dfrac{8}{3}$，故 B、C 正确；

$S=\dfrac{p^2}{2\sin\alpha}=\dfrac{16}{2\sin\alpha}=\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$，故 D 错误.

【答案】BC

11．如图：在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面为正三角形，且 $\angle A_1AB=\angle A_1AC=45^\circ$, $AB=1$,则下列说法正确的是（　）



A.直线 A_1A 与底面 $A_1B_1C_1$ 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

B.设 BC 中点为 P，则线段 PA_1 的长度的最小值为 $\dfrac{1}{2}$

C.平面 A_1B_1BA 与平面 BCC_1B_1 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

D.直线 A_1A 与平面 C_1AB_1 所成角的余弦值的最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

答案：ABC

解析：对于 A：由三余弦定理可知: $\cos 45^\circ=\cos\alpha\cdot\cos 30^\circ\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

对于选项 B：当 $PA_1\perp AA_1$ 时，PA_1 最短为 $\dfrac{1}{2}$。

对于选项 C：

过点B作$BK\perp AA_1$,垂足为K，连接KP,（P为BC中点），$\because AA_1\perp$平面BCK,$\therefore BB_1\perp$平面BCK,

$\therefore\angle KBC$为所求二面角的夹角，计算得:$\cos\angle KBP=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

对于选项 D：当 AA_1 变大时，，角越来越小接近于 0，所以错误.

12. 出现于春秋时期的正整数乘法歌诀“九九歌”，堪称是先进的十进位记数法与简明的中国语言文字相结合之结晶，这是任何其它记数法和语言文字所无法产生的. 表示十进制的数要用 10 个数码：0，1，2，3，4，5，6，7，8，9， 如四位十进制数 $1079=1\times10^3+0\times10^2+7\times10^1+9\times10^0$；当前的计算机系统使用的基本上是二进制系统. 二进制数据是用 0 和 1 两个数码来表示的数. 它的基数为 2，进位规则是“逢二进一”，借位规则是“借一当二”，由 18 世纪德国数学家莱布尼兹第一个提出了二进制记数法. 如四位二进制的数 $1101_{(2)}=1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0$，等

于十进制的数13．现把 m 位 n 进制中的最大数记为 $M(m,n)$，其中 m，$n\in\mathbf{N}^*,n\geq 2$，$M(m,n)$ 为十进制的数，则下列结论中正确的是（ ）

A．$M(4,2)=15$　　B．$M(4,2)=M(2,4)$

C．$M(2023,2022)<M(2022,2023)$　　D．$M(2023,2022)>M(2022,2023)$

【答案】ABD

【详解】对于A：$M(4,2)$ 即是：$1111_{(2)}=1\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+1\times2^0=15$，A正确；

对于B：$M(2,4)$ 即是：$33_{(4)}=3\times4^1+3\times4^0=15$，B正确；对于C、D：$n\in\mathbf{N}^*,n\geq 2$，$M(n+2,n+1)$ 即是

$$nnn\cdots n_{(n+1)}=n(n+1)^{n+1}+n(n+1)^n+n(n+1)^{n-1}+\cdots+n(n+1)^1+n(n+1)^0$$
$$=n\left[(n+1)^{n+1}+(n+1)^n+(n+1)^{n-1}+\cdots+(n+1)^1+(n+1)^0\right]$$
$$=n\cdot\frac{1-(n+1)^{n+2}}{1-(n+1)}=(n+1)^{n+2}-1$$

$n\in\mathbf{N}^*,n\geq 2$，$M(n+1,n+2)$ 即是：

$$(n+1)(n+1)(n+1)\cdots(n+1)_{(n+2)}$$
$$=(n+1)(n+2)^n+(n+1)(n+2)^{n-1}+(n+1)(n+2)^{n-2}+\cdots+(n+1)(n+2)^1+(n+1)(n+2)^0$$
$$=(n+1)\left[(n+2)^n+(n+2)^{n-1}+(n+2)^{n-2}+\cdots+(n+2)^1+(n+2)^0\right]$$
$$=(n+1)\cdot\frac{1-(n+2)^{n+1}}{1-(n+2)}=(n+2)^{n+1}-1$$

构造函数：$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，求得：$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ $\therefore x\in(0,\mathrm{e})$，$f'\ x\ >0$，$f(x)$ 单调递增；$x\in(\mathrm{e},+\infty)$，

$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

$\because n\in\mathbf{N}^*,n\geq 2\ \therefore \mathrm{e}<n+1<n+2\ \therefore$ $f(n+1)>f(n+2)$ 代入得：$\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}>\dfrac{\ln(n+2)}{n+2}$

即是：$(n+1)^{n+2}>(n+2)^{n+1}$，$\therefore (n+1)^{n+2}-1>(n+2)^{n+1}-1$ $\therefore M(n+2,n+1)>M(n+1,n+2)$，

$M(2023,2022)>M(2022,2023)$ D正确.故选：ABD

非选择题部分

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 在 $(1-x+x^2)(1+x)^8$ 的展开式中，x^4 的系数是______.

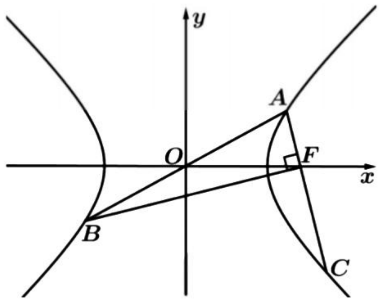
【答案】42

【解析】原式可化为（$1+x^3$）$(1+x)^7$，再利用二项式定理求解.

14．已知无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2=0$，$a_3=-1$，$a_4=0$，写出满足条件的 $\{a_n\}$ 的一个通项公式：______.（不能写成分段数列的形式）

【答案】$a_n=2^n-n^2$（答案不唯一）$a_n=\cos\frac{n-1}{2}\pi$

15. 如图，已知 A，B，C 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上的三个点，AB 经过原点 O，AC 经过右焦点 F. 若以AB为直径的圆经过右焦点 F 且 $\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{FA}$，则该双曲线的离心率等于_____.

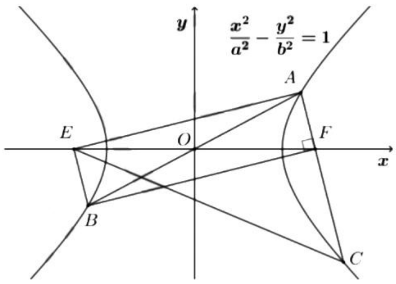


【答案】$\frac{\sqrt{17}}{3}$

【解析】若 E 是左焦点，连接 AE,BE,EC，设 $|BF|=m$，$|AF|=n$，

$\therefore$ 由双曲线的对称性且 $BF\perp AC$ 知：$AEBF$ 是矩形，则 $|AE|=m$，

$|BE|=n$，



又 $\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{FA}$，即 $|FC|=2n$，则 $|EC|=2a+|FC|=2a+2n$，

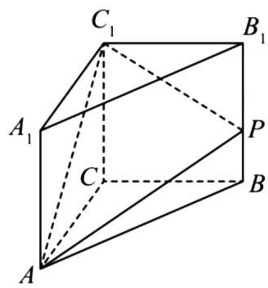
$\therefore$ 在 $Rt\triangle EAC$ 中，$|AE|^2+|AC|^2=|EC|^2$，即 $m^2+9n^2=4(a+n)^2$，而 $m-n=2a$，

$\therefore n=\frac{2a}{3}$，$m=\frac{8a}{3}$，

$\because$ 在 $Rt\triangle EAF$ 中，$m^2+n^2=4c^2$，即 $\frac{68a^2}{9}=4c^2$，可得 $e=\frac{\sqrt{17}}{3}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{17}}{3}$.

16. 如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle BCA=\frac{3}{4}\pi$，$AC=\sqrt{2}$，$BC=2$，点 P 在棱 BB_1 上，且 $PA\perp PC_1$，当 $\triangle APC_1$ 的面积取最小值时，三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为______.



【答案】$(20+3\sqrt{10})\pi$

【详解】由余弦定理得：

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos\frac{3\pi}{4}}=\sqrt{10},$$

设 BP=x，$B_1P=y$，则 $PA=\sqrt{10+x^2}$，$PC_1=\sqrt{B_1C_1^2+B_1P^2}=\sqrt{4+y^2}$，

$AC_1=\sqrt{AC^2+CC_1^2}=\sqrt{2+(x+y)^2}$，

由 $PA^2+PC_1^2=AC_1^2$ 得：$10+x^2+4+y^2=2+(x+y)^2$，解得：$xy=6$，

因为 $PA\perp PC_1$，故 $S_{\triangle APC_1}=\frac{1}{2}AP\cdot PC_1=\frac{1}{2}\sqrt{10+x^2}\cdot\sqrt{4+y^2}=\frac{1}{2}\sqrt{40+10y^2+4x^2+x^2y^2}$

由基本不等式得：当且仅当 $\sqrt{10}y=2x$，且 $x\cdot y=6$ 时,即 $x^2=3\sqrt{10}$ 时取最小值。

底面三角形外接圆半径 $2r=\dfrac{AB}{\sin C}=2\sqrt{5}\Rightarrow r=\sqrt{5}$，

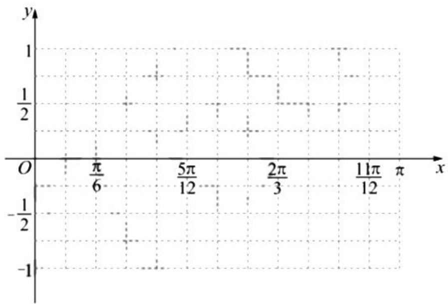
$$R^2=r^2+\left(\frac{PB}{2}\right)^2$$

$$S=4\pi R^2=4\pi\left(5+\frac{x^2}{4}\right)=4\pi\left(5+\frac{3\sqrt{10}}{4}\right)=(20+3\sqrt{10})\pi$$

四、解答题：本大题共 6 小题，第 17 题 10 分，第 18、19、20、21、22 题为 12 分，共 70 分.

17.（本题满分 10 分）设 $x\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<0\right)$ 的最小正周期为 π，且 $f(x)$ 图象向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 后得到的函数为偶函数.

(1).求 $f(x)$ 解析式，并通过列表、描点在给定坐标系中作出函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的图象；



(2).在锐角 ΔABC 中，a,b,c 分别是角 A,B,C 的对边，若 $\dfrac{2a-b}{\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$，求 $f(B)$ 的值域.

【答案】(1) $\because$ 函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi$，$\therefore\omega=2$.

$\because$ 向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 后 $f\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}+\varphi\right)$ 且 $-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<0$，$\therefore\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$.

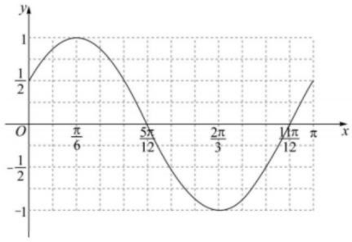
解析式为: $f(x)=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$……………………………………………………………2 分

$f(x)=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，列表如下：

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
$2x-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	1	0	-1	0	$\frac{1}{2}$

……………………………………………………………………………………………………4 分

$f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的图象如图所示：



…………………………………………………………………6 分

（2）$\because \frac{2a-b}{\cos B}=\frac{c}{\cos C}\therefore(2a-b)\cos C=c\cos B\Rightarrow 2a\cos C=b\cos C+c\cos B$

$\therefore 2a\cos C=a\Rightarrow\cos C=\frac{1}{2}\Rightarrow C=\frac{\pi}{3}$, ,

又因为三角形为锐角三角形所以：$\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$ ……………………………………………9 分

由（1）图像可知：$f(B)\in\left(-\frac{1}{2},1\right)$ ……………………………………………10 分

18．设数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=3a_n-2a_{n-1}(n\geq 2),a_1=1,a_2=2$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)在数列$\{a_n\}$的任意a_k与a_{k+1}项之间，都插入$k\left(k\in\mathrm{N}^*\right)$个相同的数$(-1)^k k$，组成数列$\{b_n\}$，记数列$\{b_n\}$的前$n$项的和为$T_n$，求$T_{27}$的值.

【答案】(1)$a_n=2^{n-1}$；　(2)T_{27}=84

【详解】（1）数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^{n-1}$；……………………………………………4 分

（2）数列$\{b_n\}$中在a_{k+1}之前共有$k+(1+2+\cdots+k)=k+\frac{(1+k)k}{2}=\frac{k^2+3k}{2}$项，

当$k=5$时，$\frac{k^2+3k}{2}=20<27$，当$k=6$时$\frac{k^2+3k}{2}=27$ ……………………………………………8 分

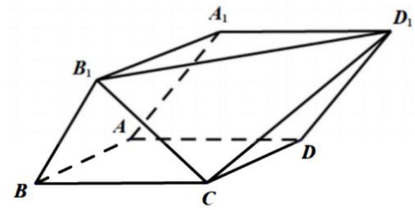
则$T_{100}=\left(1+2+2^2+\ldots+2^5\right)+\left(-1^2+2^2-3^2+4^2-5^2+6^2\right)$

$=2^6-1+21=84$

…………………………………………………………………12 分

19.（本小题满分 12 分）

由四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 截去三棱锥 $C_1-B_1CD_1$ 后得到的几何体如图所示,四边形 A_1ADD_1 和 $ABCD$ 是全等的边长为 2 的菱形，且 $\angle A_1AD=\angle ABC=\dfrac{\pi}{3}$， $A_1C=3$.



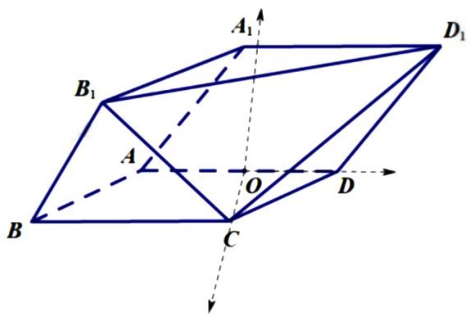
（1）求三棱锥 A_1-ACD 的体积；

（2） 求直线 CD_1 和平面 B_1BC 所成角的正弦值.

19.解析：（1）取 AD 中点 O ,连接 A_1O,CO，则 $A_1O\perp AD$， $CO\perp AD$，则 $AD\perp$ 平面A_1OC ,…………1 分

则 $V_{A_1-ACD}=\dfrac{1}{3}\cdot AD\cdot S_{\Delta A_1OC}$， $\because A_1O=\sqrt{3},CO=\sqrt{3},A_1C=3$，

$\therefore \angle A_1OC=\dfrac{2}{3}\pi$， …………2 分



$\therefore S_{\Delta A_1OC}=\dfrac{1}{2}\cdot A_1O\cdot CO=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$， …………3 分

$\therefore V_{A_1-ACD}=\dfrac{1}{3}\cdot AD\cdot S_{\Delta A_1OC}=\dfrac{1}{3}\cdot 2\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$…………4 分

（2）以 O 为原点，以 OC， OD 所在直线分别为 x,y 轴，建立如图所示空间直角坐标系.

$\because AD\perp$ 平面A_1OC， $AD\subset$ 平面$ABCD$， $\therefore$ 平面$A_1OC\perp$ 平面$ABCD$,交线为CO，过点 A_1 作 $A_1H\perp OC$，则 $A_1H\perp$ 平面$ABCD$， $\because \angle A_1OC=\dfrac{2}{3}\pi$ $\therefore H$点在CO的延长线上…………5 分

$\therefore A_1(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},0,\dfrac{3}{2}),A(0,-1,0),D(0,1,0),C(\sqrt{3},0,0),B(\sqrt{3},-2,0)$， $D_1(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},2,\dfrac{3}{2})$

$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}=(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},1,\dfrac{3}{2}),\overrightarrow{BC}=(0,2,0),\overrightarrow{DC}=(\sqrt{3},-1,0),\overrightarrow{CD_1}=(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2},2,\dfrac{3}{2})$…………8 分

设平面 CBB_1 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$， 则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$， 即 $\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+y+\dfrac{3}{2}z=0\\ 2y=0\end{cases}$， 令

$x=\sqrt{3}$， 则 $\vec{n}=(\sqrt{3},0,1)$， …………10 分

设直线 CD_1 和平面 B_1BC 所成角为 θ， 则 $\sin\theta=\left|\dfrac{\overrightarrow{CD_1}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{CD_1}||\vec{n}|}\right|=\dfrac{3\sqrt{13}}{26}$.…………12 分

.

20.（本小题满分 12 分）为提升学生的综合素养能力，学校积极为学生搭建平台，组织学生参与各种社团活动。在学校辩论队活动中，甲同学积极参与．为了更好的了解每个同学的社团参与情况和能力水平，对每位参与辩论队的同学进行跟踪记录．社团老师了解到，甲自加入辩论队以来参加过 100 场辩论比赛：甲作为一辩出场 20 次，其中辩论队获胜 14 次；甲作为二辩出场 30 次，其中辩论队获胜 21 次；甲作为三辩出场 25 次，其中辩论队获胜 20 次；甲作为四辩出场 25 次，其中辩论队获胜 20 次.用该样本的频率估计概率，则：

(1)甲参加比赛时，求该辩论队某场比赛获胜的概率；

(2)现学校组织 6 支辩论队，进行单循环比赛，即任意两支队伍均有比赛，规定至少 3 场获胜才可晋级．社团老师决定每场比赛均派甲上场，已知甲所在辩论队顺利晋级，记其获胜的场数为 X，求 X 的分布列和数学期望.

【答案】（1）设 $A_1=$“甲担任一辩”；$A_2=$“甲担任二辩”；$A_3=$“甲担任三辩”；$A_4=$“甲担任四辩”；$B=$“某场比赛中该辩论队获胜”；

则 $P(A_1)=\frac{20}{100}=0.2$，$P(A_2)=\frac{30}{100}=0.3$，$P(A_3)=\frac{25}{100}=0.25$，$P(A_4)=\frac{25}{100}=0.25$；$P(B|A_1)=\frac{14}{20}=0.7$，

$P(B|A_2)=\frac{21}{30}=0.7$，$P(B|A_3)=\frac{20}{25}=0.8$

$P(B|A_4)=\frac{20}{25}=0.8$……………………………………………………………………………3 分

由全概率公式可得：$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)+P(A_4)P(B|A_4)$

$=0.2\times0.7+0.3\times0.7+0.25\times0.8+0.25\times0.8=0.75$.

所以甲参加比赛时，该辩论队某场比赛获胜的概率是 0.75………………………………5 分

（2）设 $C_i=$“5 场中有 i 场获胜”$(i=3,4,5)$，$D=$“甲所在辩论队顺利晋级”，

$P(C_3D)=C_5^3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{270}{1024}$；$P(C_4D)=C_5^4\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^1=\frac{405}{1024}$；$P(C_5D)=C_5^5\left(\frac{3}{4}\right)^5=\frac{243}{1024}$，则

$P(D)=\frac{918}{1024}$，………………………………………………………8 分

$P(X=3)=P(C_3|D)=\frac{P(C_3D)}{P(D)}=\frac{270}{918}=\frac{5}{17}$，

同理可得 $P(X=4)=P(C_4|D)=\frac{P(C_4D)}{P(D)}=\frac{405}{918}=\frac{15}{34}$，

$P(X=5)=P(C_5|D)=\frac{P(C_5D)}{P(D)}=\frac{243}{918}=\frac{9}{34}$…………………………………………………11 分

则 X 的分布列为：

X	3	4	5
P	$\frac{5}{17}$	$\frac{15}{34}$	$\frac{9}{34}$

$E(X)=3\times\frac{5}{17}+4\times\frac{15}{34}+5\times\frac{9}{34}=\frac{135}{34}$ ……………………………………………………………12 分

21.已知函数$f(x)=a\sin x+b\tan x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

(1)若$a=1,b=0$时，求证：$g(x)=f(x)-\frac{x^3}{2}$在$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上有唯一极值点.

(2)若$a\in N,b=1$,不等式$f(x)\ge(1+a)x$恒成立，求a的取值集合.

解析：(1) 由题意：$g(x)=\sin x-\frac{x^3}{2}$，

所以$g'(x)=\cos x-\frac{3x^2}{2}, g''(x)=-\sin x-3x, g'''(x)=-\cos x-3<0$ ……………1 分

所以$g''(x)=-\sin x-3x$ 在 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减，

又因为$g''(0)=0$，所以$g''(x)<0$在$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$恒成立，

故$g'(x)$在$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减，因为$g'(0)=1>0$，$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$，

所以存在唯一的$x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得$g'(x_0)=0$，

故当$x\in(0,x_0)$时，$g'(x)>0$，当$x\in\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$g'(x)<0$。……………3 分

所以 $g(x)$ 在 $x\in(0,x_0)$ 上单调递增，在 $x\in\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，故 $g(x)$ 在 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上有唯一极大值点 x_0. ……………4 分

(2) 令$F(x)=a\sin x+\tan x-(a+1)x$，则当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$F(x)\ge0$恒成立。

因为$F'(x)=a\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-(a+1)=\frac{1}{\cos^2 x}(\cos x-1)\left(a\cos^2 x-\cos x-1\right)$……………5 分

①当$a=0$时，$F'(x)\ge0$恒成立，故$F(x)$在$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，故$F(x)>F(0)=0$,满足题意.……………6 分

②当$a=1$或$a=2$时，$a\cos^2 x-\cos x-1\le2\cos^2 x-\cos x-1=(2\cos x+1)(\cos x-1)\le0$，

故：$F'(x)\ge0$在$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上恒成立，故$F(x)>F(0)=0$，满足题意。……………8 分

③当 $a\geq 3$ 时，考虑 $h(t)=at^2-t-1,t\in(0,1)$，则 $h(t)$ 在 $t\in\left(0,\frac{1}{2a}\right)$ 上单调递减，在 $t\in\left(\frac{1}{2a},1\right)$ 上单调递增，

令 $\cos x_1=\frac{1}{2a}$，故 $m(x)=a\cos^2 x-\cos x-1$ 在 $x\in(0,x_1)$ 上单调递减，在 $x\in\left(x_1,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，

而 $m(0)=a-2>0,m(x_1)=-\frac{1}{4a}-1<0$，…………10 分

所以存在唯一 $x_2\in(0,x_1)$，使得 $m(x_2)=0$，所以当 $x\in(0,x_2)$ 时，$m(x)>0$，

所以当 $x\in(0,x_2)$ 时，$F'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}(\cos x-1)m(x)<0$，

所以 $F(x)<0$ 在 $x\in(0,x_2)$ 时恒成立，不满足题意。

故 a 的取值集合为 $\{0,1,2\}$. …………12 分

22.（本小题满分 12 分）已知椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{3}=1(a>\sqrt{3})$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，点 $M(m,n)$ 在 Γ 上，从原点 O 向圆 $M:(x-m)^2+(y-n)^2=2$ 作两条切线，分别交椭圆于点 P,Q，

（1）求椭圆 Γ 方程；

（2）若直线 OP,OQ 的斜率记为 $k_1,k_2(k_1\cdot k_2\neq 0)$，求 $k_1\cdot k_2$ 的值；

（3）若 $m<0,n>0$，直线 $l:mx+2ny=0$ 与 Γ 在第一象限的交点为 N，点 R 在线段 ON 上，且 $|MR|=\sqrt{6}$，试问直线 MR 是否过定点？若是，求出该定点坐标，若不是，请说明理由.

（1）因为椭圆离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 所以 $e^2=\frac{a^2-3}{a^2}=\frac{1}{2}$，解得 $a^2=6$

所以椭圆方程为 $\Gamma:\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ ……………………………… 2 分

因为直线 $OP:y=k_1x$ 和直线 $OQ:y=k_2x$ 都与圆 M 相切

所以 $\frac{|k_1m-n|}{\sqrt{k_1^2+1}}=\sqrt{2}$，$\frac{|k_2m-n|}{\sqrt{k_2^2+1}}=\sqrt{2}$，即 k_1，k_2 是 $\frac{|km-n|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2}$ 的两根，

将 $\frac{|km-n|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2}$ 两边平方，可得 $(m^2-2)\cdot k^2-2mnk+n^2-2=0$

所以 $k_1\cdot k_2=\frac{n^2-2}{m^2-2}$ ……………………………… 3 分

又因为点 $M(m,n)$ 在 Γ 上，

所以点 $m^2+2n^2=6$，即 $m^2=6-2n^2$ ……………………………… 4 分

所以 $k_1\cdot k_2=\frac{n^2-2}{m^2-2}=\frac{n^2-2}{6-2n^2-2}=-\frac{1}{2}$ ……………………………… 5 分

（2）直线 MR 的方程为 $x=sy+t$，联立 $\begin{cases}x=sy+t\\x^2+2y^2=6\end{cases}$

整理可得 $\left(s^2+2\right)y^2+2sty+t^2-6=0$

…………………………………………………………………………………… 6 分

因为点 $M(m,n)$ 在直线 MR 上，所以 $m=sn+t$ 且 $n>0$，

所以 $n=\dfrac{-2st+\sqrt{4s^2t^2-4\left(s^2+2\right)\left(t^2-6\right)}}{2\left(s^2+2\right)}=\dfrac{-st+\sqrt{-2t^2+6s^2+12}}{s^2+2}$

整理得：$n\left(s^2+2\right)+st=\sqrt{-2t^2+6s^2+12}$　①

…………………………………………………………………………………… 8 分

联立 $\begin{cases}x=sy+t\\mx+2ny=0\end{cases}$，可得 $(ms+2n)y=-mt$ 所以 $y_R=\dfrac{-mt}{ms+2n}$

…………………………………………………………………………………… 9 分

又因为 $|MR|=\sqrt{6}$ 所以 $|MR|=\sqrt{1+s^2}\,|n+\dfrac{mt}{ms+2n}|=\sqrt{1+s^2}\,|\dfrac{mns+mt+2n^2}{ms+2n}|$

$=\sqrt{1+s^2}\,|\dfrac{m(ns+t)+2n^2}{ms+2n}|=\sqrt{1+s^2}\,|\dfrac{m^2+2n^2}{ms+2n}|$

因为点 $M(m,n)$ 在 Γ 上所以 $m^2+2n^2=6$，代入上式继续化简得 $\sqrt{1+s^2}\,|\dfrac{6}{ms+2n}|=\sqrt{6}$

所以 $\sqrt{6}\cdot\sqrt{1+s^2}=|ms+2n|=|(sn+t)s+2n|=|n\left(s^2+2\right)+ts|$

由①可知，$\sqrt{6}\cdot\sqrt{1+s^2}=\sqrt{-2t^2+6s^2+12}$ ………………………………………… 11 分

所以解得 $t^2=3$ 所以 $t_1=-\sqrt{3}$（此时点 $M(m,n)$ 在第三象限，不合题意，舍去），$t_2=\sqrt{3}$

所以直线 MR 过定点 $\left(\sqrt{3},0\right)$ ………………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。