2022—2023 学年第二学期高一期末调研考试

数学 · 答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. **答案** D

命题意图 本题考查复数的基本运算与几何意义.

解析 $\because z=\dfrac{5\mathrm{i}^3}{1-2\mathrm{i}}=\dfrac{-5\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=2-\mathrm{i}$,$\therefore$ 所对应的点位于第四象限.

2. **答案** C

命题意图 本题考查百分位数的计算.

解析 因为 $8\times25\%=2$,根据百分位数的定义可知,该组数据的 25% 分位数为第 2 个数据和第 3 个数据的平均数$\dfrac{73+79}{2}=76$.

3. **答案** C

命题意图 本题考查用频率估计概率.

解析 用频率估计概率,因为前三年 6 月份各天最高气温小于 30 ℃的频率为$\dfrac{5+7+24}{5+7+24+35+19}=0.4$,因此估计今年 6 月份的某天最高气温小于 30 ℃的概率为 0.4.

4. **答案** D

命题意图 本题考查平面向量的坐标运算.

解析 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为$\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\cdot\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{2+4}{2}\cdot\boldsymbol{b}=3(-1,1)=(-3,3)$.

5. **答案** B

命题意图 本题考查圆锥的结构特征.

解析 设圆锥的高为 h,圆锥的体积 $V=\dfrac{1}{3}\pi\cdot2^2h=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\pi$,则 $h=2\sqrt{3}$,所以圆锥的母线长为 4,设侧面展开图的圆心角为 α,则 $4\alpha=2\pi\times2$,得 $\alpha=\pi$.

6. **答案** A

命题意图 本题考查平面向量的线性运算.

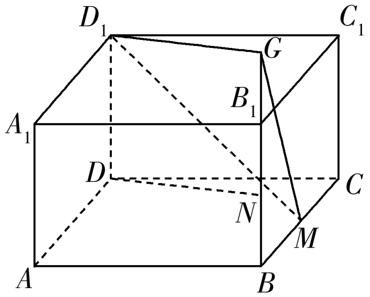
解析 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{CM}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CM}+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA})$,又因为$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$,所以$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CM}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{DC}$,所以$\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CM}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BM}$.

7. **答案** C

命题意图 本题考查异面直线所成角的计算.

解析 延长 BB_1 至 G,使得 $B_1G=1$,连接 D_1G,GM,易知 $D_1G/\!/DN$,则 $\angle MD_1G$ 为异面直线 D_1M,DN 所成角,因为 $D_1G=\sqrt{3^2+2^2+1^2}=\sqrt{14}$,$MG=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$,$D_1M=\sqrt{1^2+3^2+2^2}=\sqrt{14}$,故 $\cos\angle MD_1G=$

$$\frac{D_1M^2+D_1G^2-MG^2}{2D_1M\cdot D_1G}=\frac{14+14-10}{2\times\sqrt{14}\times\sqrt{14}}=\frac{9}{14}.$$



8. 答案　B

命题意图　本题考查正、余弦定理的应用.

解析　由已知得 $\sin A+\sin B=2\sin C$，根据正弦定理可得 $a+b=2c$，根据余弦定理可得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(a+b)^2-2ab-c^2}{2ab}=\frac{3c^2}{2ab}-1\geqslant\frac{3c^2}{2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}-1=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$. 所以 $\cos C$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$，从而 $\sin C$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 答案　AC

命题意图　本题考查复数的基本概念与运算性质.

解析　由共轭复数的概念可知，A 正确；当 $z=0$ 时，$\bar{z}=0$，此时 $z-\bar{z}$ 是实数，故 B 错误；设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$，所以 $z+\bar{z}=2a\in\mathbf{R}$，故 C 正确；当 $z=\mathrm{i}$ 时，$z^2=-1$ 不满足 $z^2\geqslant0$，故 D 错误.

10. 答案　BCD

命题意图　本题考查事件的关系与概率的运算性质.

解析　M 与 N 的关系未知，故 A 错误；若 $M\subseteq N$，则 $P(MN)=P(M)=\frac{1}{3}$，故 B 正确；当 $P(M\bar{N})=\frac{1}{9}$ 时，可得 $P(M\bar{N})=P(M)P(\bar{N})$，所以 M 与 $\bar{N}$ 相互独立，所以 M 与 N 也相互独立，故 C 正确；$P(M\cup N)=P(M)+P(N)$，所以 $P(MN)=0$，即 M 与 N 互斥，故 D 正确.

11. 答案　ACD

命题意图　本题考查解三角形.

解析　对于 A，若 $c<b$，则 $C<B$，由 $\pi=A+B+C<4B$，得 $B>\frac{\pi}{4}$，所以 $A>\frac{\pi}{2}$，故 A 正确；

对于 B，若 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，当 $A=C$ 时，$A+B+C=5B$，则顶角 $B=\frac{\pi}{5}$ 为锐角，当 $B=C$ 时，$A+B+C=2A$，则顶角 $A=\frac{\pi}{2}$ 为直角，即顶角不可能为钝角，故 B 错误；

对于 C，由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，即 $\frac{a}{\sin 2B}=\frac{b}{\sin B}$，所以 $\frac{a}{2\sin B\cos B}=\frac{b}{\sin B}$，结合 $b=3$ 得 $a=6\cos B$，若 $a=3\sqrt{3}$，则 $\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $B=\frac{\pi}{6}$，$A=\frac{\pi}{3}$，则 $C=\frac{\pi}{2}$，故 C 正确；

对于 D，由选项 C 的分析可知 $a=6\cos B$，再由余弦定理可得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+1-9}{2a}$，所以 $a=6\times\frac{a^2+1-9}{2a}$，整理得 $a^2=12$，所以 $a=2\sqrt{3}$，故 D 正确.

12. **答案** ABC

命题意图 本题考查平面向量的几何应用.

解析 设$|\overrightarrow{OD}|=r(0\leqslant r\leqslant 4)$,则$|\overrightarrow{OE}|=4-r$,则$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CE}=(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OE}-(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE})\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}^2=r(4-r)\cos\frac{2\pi}{3}-r\times 4\times\cos\frac{\pi}{3}-(4-r)\times 4\times\cos\frac{\pi}{3}+16=\frac{1}{2}r^2-2r+8=\frac{1}{2}(r-2)^2+6$,因为$0\leqslant r\leqslant 4$,所以$\frac{1}{2}(r-2)^2+6\in[6,8]$,则A,B正确,$2\sqrt{9}<2\sqrt{10}<2\sqrt{16}$,C也符合,$3\sqrt{10}>3\times 3=9$,D不符合条件.

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. **答案** $\frac{3}{2}$

命题意图 本题考查平面向量的坐标运算.

解析 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(1,2)+(-4,2)=(-3,4)$,因为$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$,所以$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(-3,4)\cdot(2,t)=-6+4t=0$,解得$t=\frac{3}{2}$.

14. **答案** 45

命题意图 本题考查样本方差的性质.

解析 数据4,7,7,$3a+1$,$3b+1$,16,19,25是原数据的3倍再加1,所以数据4,7,7,$3a+1$,$3b+1$,16,19,25的方差为$3^2\times 5=45$.

15. **答案** $\frac{3}{4}$

命题意图 本题考查相互独立事件的概率计算.

解析 设购买甲书的概率为x,购买乙书的概率为y,则由题意可得$\begin{cases}x(1-y)=\frac{1}{6},\\ xy=\frac{1}{2},\end{cases}$解得$x=\frac{2}{3}$,$y=\frac{3}{4}$.

16. **答案** 40π

命题意图 本题考查多面体与球的位置关系.

解析 因为$AC\perp BC$,所以$\triangle ABC$的外接圆圆心即点D,三棱锥外接球球心在过点D与平面ABC垂直的直线上,即在平面PAB内,所以球心即为$\triangle PAB$的外接圆圆心,球的半径即为$\triangle PAB$的外接圆半径R. 因为$PD\perp PB$,$PB=PD=2$,所以$BD=2\sqrt{2}$,从而$AD=2\sqrt{2}$. 设$PA=x$,在$\triangle PAD$中,根据余弦定理有$PA^2=2^2+(2\sqrt{2})^2-2\times 2\times 2\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4}=20$,所以$PA=2\sqrt{5}$,由正弦定理得$2R=\frac{2\sqrt{5}}{\sin\angle PBA}=2\sqrt{10}$,所以$R=\sqrt{10}$,所以三棱锥$P-ABC$的外接球的表面积为$4\pi R^2=40\pi$.

四、解答题:共70分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查复数的基本概念和运算.

解析 (Ⅰ)因为$z_1,z_2\in\mathbf{R}$,

所以$\begin{cases}t^2-1=0,\\ 2\cos\theta+1=0,\end{cases}$解得$t=\pm 1$,$\cos\theta=-\frac{1}{2}$, ……………………………………………………(2分)

因为$\theta\in[0,\pi]$,所以$z_2=\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ……………………………………………………(3分)

当 $t=-1$ 时，$z_1<z_2$，不符合条件，当 $t=1$ 时，满足 $z_1>z_2$， ………………………………………………（4 分）

综上，$t=1$. ……………………………………………………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）若 $z_1=z_2$，则 $\begin{cases} t=\sin\theta, \\ t^2-1=2\cos\theta+1, \end{cases}$ ……………………………………………………（7 分）

所以 $\sin^2\theta-1=2\cos\theta+1$，所以 $\cos^2\theta+2\cos\theta+1=0$，即 $(\cos\theta+1)^2=0$， ……………………（9 分）

解得 $\cos\theta=-1$，又因为 $\theta\in[0,\pi]$，

所以 $\theta=\pi$. ………………………………………………………………………………………………（10 分）

18. **命题意图** 本题考查频率分布直方图的应用，以及古典概型的概率计算.

解析 （Ⅰ）因为 $(0.025+0.075+0.1+a)\times4=1$，解得 $a=0.05$. ……………………………………（2 分）

由题意评分在 $[84,92)$ 内的频率为 $(0.025+0.075)\times4=0.4<0.5$，

评分在 $[84,96)$ 内的频率为 $(0.025+0.075+0.1)\times4=0.8>0.5$，

故中位数在区间 $[92,96)$ 内， ……………………………………………………………………………（4 分）

则估计中位数为 $92+\dfrac{0.5-0.4}{0.8-0.4}\times4=93$. ………………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）由分层随机抽样可知，这 6 人中评分在 $[84,88)$ 内的有 2 人，记为甲、乙；评分在 $[96,100]$ 内的有 4 人，记为 a,b,c,d. ……………………………………………………………………………………………（8 分）

从这 6 人中随机抽取 2 人有：

甲乙、甲 a、甲 b、甲 c、甲 d、乙 a、乙 b、乙 c、乙 d、ab、ac、ad、bc、bd、cd，共 15 个样本点， …………（10 分）

其中至少有一人评分在 $[84,88)$ 内的有：

甲乙、甲 a、甲 b、甲 c、甲 d、乙 a、乙 b、乙 c、乙 d，共 9 个样本点， ……………………………（11 分）

所以所求概率 $P=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$. ……………………………………………………………………（12 分）

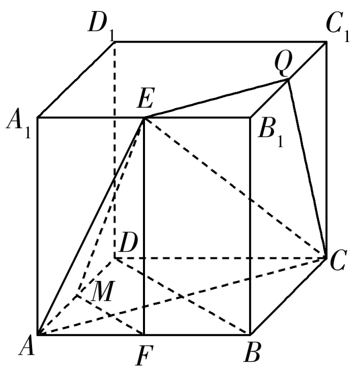
19. **命题意图** 本题考查正方体的结构特征以及面面垂直的证明.

解析 （Ⅰ）如图所示，平面 AEC 截正方体所得截面为梯形 $ACQE$，其中 Q 为 B_1C_1 的中点， …………（2 分）

由题易知 $AC=2\sqrt{2}$，$EQ=\sqrt{2}$，$QC=AE=\sqrt{5}$，

所以梯形的高为 $\sqrt{5-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$， …………………………………………………………（4 分）

所以截面面积为 $\dfrac{\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=\dfrac{9}{2}$. ……………………………………………………（6 分）



（Ⅱ）连接 BD，

因为 M,F 为 AD,AB 的中点，所以 $MF/\!/BD$.

在正方形 $ABCD$ 中，$AC\perp BD$，

所以 $AC\perp MF$. ……………………………………………………………………………………………………（8 分）

因为 E,F 分别是 A_1B_1,AB 的中点，所以 $EF// AA_1$，

因为 $AA_1\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $EF\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $EF\perp AC$. ……………………………………………………………………………………………（10 分）

又因为 $EF\cap MF=F$，所以 $AC\perp$ 平面 MEF， ……………………………………………………（11 分）

又因为 $AC\subset$ 平面 AEC，所以平面 $AEC\perp$ 平面 MEF. ……………………………………………（12 分）

20. **命题意图** 本题考查解三角形.

解析 （Ⅰ）由 $\tan B=-2\sqrt{2}$，可得 $\sin B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\cos B=-\frac{1}{3}$. ……………………………………（1 分）

设 $AB=c(c>0)$，

在$\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $9=4+c^2-4c\times\left(-\frac{1}{3}\right)$，即 $c^2+\frac{4}{3}c-5=0$， ……………………………（3 分）

解得 $c=-3$（舍去）或 $c=\frac{5}{3}$， ……………………………………………………………………………（4 分）

由正弦定理得 $\sin\angle ACB=\frac{c\sin B}{3}=\frac{\frac{5}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}}{3}=\frac{10\sqrt{2}}{27}$. ……………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）$\because\ \angle COD=\angle AOD$，$\therefore\ AD=CD$， …………………………………………………………………（7 分）

由已知得 $\angle B+\angle ADC=\pi$，$\therefore\ \cos\angle ADC=\frac{1}{3}$. ……………………………………………………（8 分）

设 $AD=CD=m(m>0)$.

在$\triangle ACD$ 中，由余弦定理得 $9=m^2+m^2-2m^2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}m^2$， ……………………………………………（10 分）

$\therefore\ m^2=\frac{27}{4}$，$\therefore\ m=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，即 $AD=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………………………………（12 分）

21. **命题意图** 本题考查距离的计算以及平行的证明.

解析 （Ⅰ）方法一：如图，连接 AC，因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $V_{P-ABC}=\frac{1}{3}PD\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}\times 3\times\left(\frac{1}{2}\times 3\times 1\right)=\frac{3}{2}$. …………………………………………（2 分）

因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PD\perp BC$，

又 $BC\perp CD$，$CD\cap PD=D$，所以 $BC\perp$ 平面 PCD，

所以 $BC\perp PC$. ………………………………………………………………………………………………（3 分）

设点 A 到平面 PBC 的距离为 h，

则 $V_{A-PBC}=\frac{1}{3}h\cdot S_{\triangle PBC}=\frac{1}{3}h\times\left(\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times 1\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}h$. ……………………………………………（4 分）

又因为 $V_{P-ABC}=V_{A-PBC}$，所以可得 $\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}h$， ………………………………………………………（5 分）

得 $h=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，即点 A 到平面 PBC 的距离为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. ………………………………………………（6 分）

方法二：因为 $AD// BC$，$AD\not\subset$ 平面 PBC，所以 $AD//$ 平面 PBC，

所以点 A 到平面 PBC 的距离即点 D 到平面 PBC 的距离. ……………………………………………（1 分）

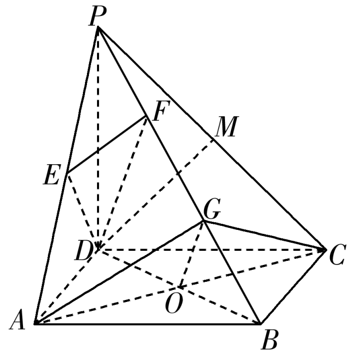
作 $DM\perp PC$，垂足为 M.

同方法一可知 $BC\perp$ 平面 PCD,所以平面 $PBC\perp$ 平面 PCD,且交线为 PC, …………………………………（3 分）

又 $DM\subset$ 平面 PCD,所以 $DM\perp$ 平面 PBC,点 D 到平面 PBC 的距离即 DM. ………………………………（4 分）

在等腰直角 $\triangle PCD$ 中,$PD=CD=3$,

所以 $DM=\frac{3\times3}{3\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,即点 A 到平面 PBC 的距离为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$. ………………………………………（6 分）



（Ⅱ）存在满足条件的点 G,且点 G 为线段 PB 上靠近点 B 的三等分点. ……………………………………（7 分）

证明如下：

连接 AC,BD 交于点 O,连接 OG,AG.

因为点 F,G 是 PB 的三等分点,所以 F 为 PG 的中点,G 为 BF 的中点. ……………………………………（8 分）

在矩形 $ABCD$ 中,O 为 BD 的中点,所以 $OG/\!/DF$,

因为点 E 为 PA 的中点,所以 $EF/\!/AG$, ……………………………………………………………（9 分）

又因为 $OG\cap AG=G,EF\cap DF=F$,

所以平面 $ACG/\!/$平面 DEF, ………………………………………………………………………………（10 分）

又因为 $CG\subset$ 平面 ACG,所以 $CG/\!/$平面 DEF. ……………………………………………………（11 分）

因为 $PB=\sqrt{1^2+3^2+3^2}=\sqrt{19}$,所以 $BG=\frac{\sqrt{19}}{3}$. ……………………………………………………（12 分）

22. **命题意图** 本题考查古典概型和相互独立事件的概率计算.

解析 （Ⅰ）记 1 个红球为 a,4 个白球分别为 b,c,d,e.

则从箱子中随机摸出两球,样本点有:$ab,ac,ad,ae,bc,bd,be,cd,ce,de$,共 10 个样本点, ………………（2 分）

其中含有红球的为:ab,ac,ad,ae,共 4 个样本点, ……………………………………………………（3 分）

所以在一次摸奖中,中奖概率为$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$. ………………………………………………………………（4 分）

当 $m=60$ 时,甲、乙两人只能摸奖一次,所以他们中奖的概率为$\frac{2}{5}$. ……………………………………（5 分）

（Ⅱ）当 $m=240$ 时,他们可以摸奖 4 次. ……………………………………………………………………（6 分）

记事件第 i 次由甲摸奖为 $A_i(i=1,2,3,4)$,记第一次由甲摸奖,最后一次也是甲摸奖为事件 B,

则 $B=A_1A_2A_3A_4+A_1A_2\overline{A}_3A_4+A_1\overline{A}_2A_3A_4+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4$, ……………………………………………（8 分）

$$\begin{aligned}\text{所以 } P(B)&=P(A_1A_2A_3A_4+A_1A_2\overline{A}_3A_4+A_1\overline{A}_2A_3A_4+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4)\\&=P(A_1A_2A_3A_4)+P(A_1A_2\overline{A}_3A_4)+P(A_1\overline{A}_2A_3A_4)+P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4)\\&=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{5}\right)^3+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\\&=\frac{31}{125}.\end{aligned}$$
……………………………………………………………………………………（12 分）