高三数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|2^x<8\}$，集合 $B=\{x|x>a\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，则实数 a 的取值范围为

A. $(-\infty,2)$　　B. $(2,+\infty)$　　C. $(-\infty,3]$　　D. $[3,+\infty)$

2. 若复数 z 满足 $(z+1)(\bar{z}-1)=2+\mathrm{i}$，i是虚数单位，则 $|z|=$

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

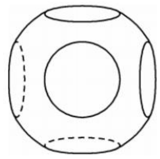
3. 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，抛物线上一点 P 在其对称轴的上方，若 $|PF|=3$，则点 P 的坐标是

A. $(4,4)$　　B. $(3,2\sqrt{3})$　　C. $(2,2\sqrt{2})$　　D. $(1,2)$

4. 地震的震级越大，以地震波的形式从震源释放出的能量就越大，震级 M 与所释放的能量 E 的关系如下：$E=10^{4.8+1.5M}$(焦耳)($\sqrt{10}\approx3.16$)，那么6级地震释放的能量是4级地震释放的能量的

A. 3.16倍　　B. 31.6倍　　C. 100倍　　D. 1000倍

5. 某同学在参加《通用技术》实践课时，制作了一个工艺品，如图所示，该工艺品可以看成是一个球被一个棱长为4的正方体的六个面所截后剩余的部分(球心与正方体的中心重合)，若其中一个截面圆的周长为 2π，则该球的表面积为



A. 20π　　B. 16π

C. 12π　　D. 8π

6. 某联欢晚会以"共圆小康梦，欢乐过大年"为主题，突出时代性、人民性、创新性，节目内容丰富多彩，呈现形式新颖多样.某小区的5个家庭买了8张连号的门票，其中甲家庭需要3张连号的门票，乙家庭需要2张连号的门票，剩余的3张随机分到剩余的3个家庭即可，则这8张门票不同的分配方法的种数为

A. 48　　B. 72　　C. 120　　D. 240

7. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2\sqrt{3}$，$AD=2$，点 E 满足 $2\overrightarrow{DE}=3\overrightarrow{DC}$，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=$

A. -14　　B. 14　　C. -16　　D. $-14\sqrt{3}$

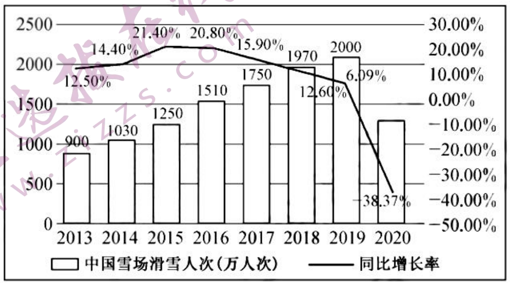
8. 已知 $a>b>1$，若 $e^a+be^a=ae^{b+1}+a$，则

A. $\ln(a+b)>1$　　B. $\ln(a-b)<0$

C. $3^a+3^{-b}<2\sqrt{3}$　　D. $3^{a-1}<3^b$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.

9. 2022 年北京冬奥会给中国冰雪产业带来快速发展，冰雪运动人数快速上升，冰雪运动市场需求得到释放，并引领相关户外用品行业市场增长. 下面是 2013 年至 2020 年中国雪场滑雪人次（万人次）与同比增长率（与上一年相比）的统计情况，则下面结论中正确的是



A. 2013 年至 2020 年，2019 年中国雪场滑雪人次最多

B. 2013 年至 2020 年，2015 年中国雪场滑雪人次的同比增长率最高

C. 2013 年到 2020 年，中国雪场滑雪人次在 2020 年首次出现负增长

D. 2013 年至 2020 年，中国雪场滑雪人次的年增加量相近

10. 将函数 $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)-2\cos2x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，得到 $y=g(x)$的图象，则下列说法正确的是

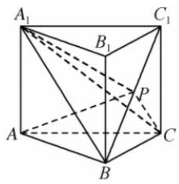
A. 函数 $g(x)$的最小正周期为 π　　B. 函数 $g(x)$的最小值为-1

C. 函数 $g(x)$的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$对称　　D. 函数 $g(x)$在$\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right]$上单调递减

11. 直线 $2x-y-4=0$ 分别与 x 轴，y 轴交于 A，B 两点，点 P 在圆 $x^2+(y-2)^2=5$ 上，则$\triangle PAB$ 面积的可能值是

A. 2　　B. 4　　C. 8　　D. 16

12. 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp BC$，$AB=BC=BB_1=2$，点 P 是线段 BC_1 上一点（包含端点），则下列说法正确的是



A. 点 B_1 到平面 ACC_1A_1 的距离为$\sqrt{2}$

B. 异面直线 BB_1 与 A_1P 所成角的余弦值为定值

C. 若 P 是 BC_1 中点，则直线 A_1P 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成的角的正切值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

D. $\triangle ACP$ 的面积 S 的取值范围为$\left[\frac{2\sqrt{6}}{3},2\sqrt{2}\right]$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 若函数 $f(x)=\ln x-ax$ 的图象在 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为 $\frac{1}{2}$，则实数 $a=$________.

14. 写出一个最小正周期为 3 的偶函数________.

15. 高斯是德国著名的数学家，有"数学王子"之称，以其名字命名的成果有 110 个. 设 $x\in\mathbf{R}$，用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $y=[x]$ 称为高斯函数，若用 $\{x\}=x-[x]$ 表示 x 的非负纯小数，如 $\{\sqrt{2}\}=\sqrt{2}-1$，已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\sqrt{3}$，$a_{n+1}=[a_n]+\frac{1}{\{a_n\}}$，则 $a_{2021}=$________.

16. 已知 F_1，F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$ 的左、右焦点，若动直线 l 垂直于 y 轴，交此椭圆于 A，B 两点，P 为 l 上满足 $|PA|\cdot|PB|=3$ 的点，则点 P 的轨迹方程为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $a_{n+1}-a_n=2$，$S_3=15$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

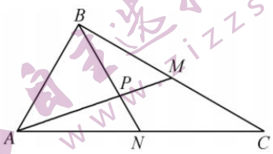
(2) 令 $b_n=\frac{1}{a_n+1}\cdot\frac{1}{a_n-1}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

18.（12 分）

如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB=3$，$AC=6$，$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，BC，AC 边上的两条中线 AM，BN 相交于点 P.

(1) 求 BC 的长度；

(2) 求 $\angle MPN$ 的余弦值.

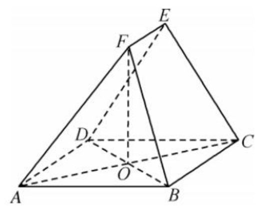


19.（12 分）

如图，已知四边形 $ABCD$ 为菱形，对角线 AC 与 BD 交于点 O，$\angle BAD=60^\circ$，平面 $ADEF\cap$ 平面 $BCEF=$ 直线 EF，$FO\perp$ 平面 $ABCD$，$BC=CE=DE=2EF=2$.

(1) 求证：$EF\parallel DA$；更多试题与答案，关注微信公众号：三晋高中指南

(2) 求二面角 $A-EF-B$ 的余弦值.



20.(12分)

某品牌汽车4S店对2020年该市前几个月的汽车成交量进行统计,用y表示2020年第x月份该店汽车成交量,得到统计表格如下:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	14	12	20	20	22	24	30	26

(1)求出y关于x的线性回归方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$,并预测该店9月份的成交量;($\hat{a},\hat{b}$精确到整数)

(2)该店为增加业绩,决定针对汽车成交客户开展抽奖活动,若抽中"一等奖"获5千元奖金;抽中"二等奖"获2千元奖金;抽中"祝您平安"则没有奖金.已知一次抽奖活动中获得"二等奖"的概率为$\frac{1}{3}$,没有获得奖金的概率为$\frac{1}{6}$.现有甲、乙两个客户参与抽奖活动,假设他们是否中奖相互独立,求此二人所获奖金总额X(千元)的分布列及数学期望.

参考数据及公式:$\sum\limits_{i=1}^{8}x_iy_i=850$,$\sum\limits_{i=1}^{8}x_i^2=204$,$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$,$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

21.(12分)

已知双曲线C:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$与双曲线$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1$有相同的焦点,且$C$的一条渐近线与直线$x-2y+2=0$平行.

(1)求双曲线C的方程;更多试题与答案,关注微信公众号:三晋高中指南

(2)若直线l与双曲线C右支相切(切点不为右顶点),且l分别交双曲线C的两条渐近线于A、B两点,O为坐标原点,试判断$\triangle AOB$的面积是否为定值,若是,请求出;若不是,请说明理由.

22.(12分)

已知函数$f(x)=2e^x\sin x-ax$.(e是自然对数的底数)

(1)若$a=0$,求$f(x)$的单调区间;

(2)若$0<a<6$,试讨论$f(x)$在$(0,\pi)$上的零点个数.(参考数据:$e^{\frac{\pi}{2}}\approx4.8$)

高三数学参考答案、提示及评分细则

1. D $\because A=\{x|2^x<8\}=\{x|2^x<2^3\}=\{x|x<3\}, B=\{x|x>a\}$，又 $A\cap B=\varnothing$，$\therefore a$ 的取值范围为 $[3,+\infty)$.

2. C 设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则 $(a+bi+1)(a-bi-1)=a^2-(1+bi)^2=a^2+b^2-1-2bi=2+i$，所以 $a^2+b^2=3, b=-\frac{1}{2}$，所以 $|z|=\sqrt{3}$.

3. C 设点 P 的坐标为 (x,y)，由抛物线的定义知 $|PF|=x+1=3$，所以 $x=2, y=2\sqrt{2}$，点 P 的坐标为 $(2,2\sqrt{2})$.

4. D 设 4 级地震释放的能量为 E_1，6 级地震释放的能量为 E_2，所以 $E_1=10^{4.8+1.5\times4}=10^{10.8}$，$E_2=10^{4.8+1.5\times6}=10^{13.8}$，所以 $\frac{E_2}{E_1}=\frac{10^{13.8}}{10^{10.8}}=10^3=1000$，即 6 级地震释放的能量是 4 级地震释放的能量的 1000 倍.

5. A 设截面圆半径为 r，球的半径为 R，则球心到某一截面的距离为正方体棱长的一半即 2，根据截面圆的周长可得 $2\pi=2\pi r$，得 $r=1$，故由题意知 $R^2=r^2+2^2$，即 $R^2=1^2+2^2=5$，$\therefore$ 该球的表面积为 $4\pi R^2=20\pi$.

6. C 若甲、乙 2 个家庭的 5 张票连号，则有 $A_2^1\cdot A_4^4=48$ 种不同的分配方法，若甲、乙 2 个家庭的 5 张票不连号，则有 $A_3^3\cdot A_4^2=72$ 种不同的分配方法，综上，这 8 张门票共有 $48+72=120$ 种不同的分配方法.

7. A 以 A 为坐标原点，AB，AD 为 x，y 轴建立直角坐标系，则 $B(2\sqrt{3},0)$，$D(0,2)$. $\because 2\overrightarrow{DE}=3\overrightarrow{DC}$，$\therefore D(3\sqrt{3},2)$，$\therefore \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=(3\sqrt{3},2)(-2\sqrt{3},2)=-14$.

8. A 由 $e^a+be^a=ae^{b+1}+a$ 得，$(b+1)e^a=a(e^{b+1}+1)$，所以 $\frac{e^a}{a}=\frac{e^{b+1}+1}{b+1}$. 令 $f(x)=\frac{e^x}{x}(x>1)$，则 $f'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}>0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 由 $\frac{e^a}{a}-\frac{e^{b+1}}{b+1}=\frac{1}{b+1}>0$，所以 $f(a)>f(b+1)$，所以 $a>b+1>2$. 所以 $a-b>1$，所以 $\ln(a-b)>\ln1=0$，B 错误；因为 $a+b>b+1+b>3>e$，所以 $\ln(a+b)>1$，A 正确；$3^a+3^{-b}>3^2>2\sqrt{3}$，C 错误；因为 $a-1>b$，所以 $3^{a-1}>3^b$，D 错误. 更多试题与答案，关注微信公众号：三晋高中指南

9. ABC 由条形图知，2013 年至 2020 年，中国雪场滑雪人次的年增加量不相近，故 D 错误.

10. AC $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)-2\cos2x=\sqrt{3}\sin2x-\cos2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，

$g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

$g(x)$ 的周期为 π，选项 A 正确；

$g(x)$ 的最小值为 -2，选项 B 错误；

$g\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=2$ 为 $g(x)$ 的最大值，

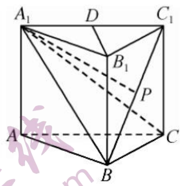
所以直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 是 $g(x)$ 的一条对称轴，选项 C 正确；

$x\in\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right]$，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{3\pi}{2},\frac{13\pi}{6}\right]$，$g(x)$ 单调递增，选项 D 错误.

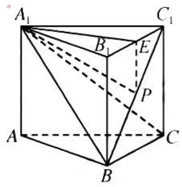
11. ABC 由题意可知：$A(2,0)$，$B(0,-4)$，则 $|AB|=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$，圆 $x^2+(y-2)^2=5$ 的圆心为 $(0,2)$，半径 $r=\sqrt{5}$，则

圆心(0,2)到直线 $2x-y-4=0$ 的距离为$\frac{|-2-4|}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$,设点 P 到直线 $2x-y-4=0$ 的距离为 d,则 $d_{\min}=\frac{6\sqrt{5}}{5}-\sqrt{5}$ $=\frac{\sqrt{5}}{5}$,$d_{\max}=\frac{6\sqrt{5}}{5}+\sqrt{5}=\frac{11\sqrt{5}}{5}$,即 $d\in[\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{11\sqrt{5}}{5}]$,又$\because S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\times|AB|\times d=\sqrt{5}d$,$\therefore S_{\triangle ABP}\in[1,11]$,结合选项可知,$\triangle PAB$ 面积的可能取值是 2 或 4 或 8.

12. AD　过点 B_1 作 $B_1D\perp A_1C_1$,垂足为 D,在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AB\perp BC$,$AB=BC=BB_1$,则 $B_1D\perp$ 平面 ACC_1A_1,$B_1D=\sqrt{2}$,$\therefore$点 B_1 到平面 ACC_1A_1 的距离为$\sqrt{2}$,A 正确;



若 P 是 BC_1 中点,取 B_1C_1 中点 E,连接 A_1E、EP,如下图所示:



即有 $EP\perp$面 $A_1B_1C_1$,$\therefore$直线 A_1P 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成的角的正切值 $\tan\angle PA_1E=\frac{EP}{AE}$.

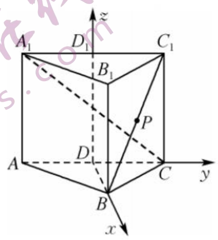
$\because EP=\frac{1}{2}BB_1$,$AE=\sqrt{A_1B_1^{\ 2}+B_1E^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}BB_1$,$\therefore\tan\angle PA_1E=\frac{\sqrt{5}}{5}$,故 C 错误;

如图,D,D_1 分别为 AC,A_1C_1 中点,易证 BD,CD,DD_1 两两垂直,建立如图所示直角坐标系,则 $B(\sqrt{2},0,0)$,$B_1(\sqrt{2},0,2)$,$C_1(0,\sqrt{2},2)$,$A(0,-\sqrt{2},0)$,$A_1(0,-\sqrt{2},2)$,$C(0,\sqrt{2},0)$,

设 $P(x,y,z)$,$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC_1}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,则 $P(\sqrt{2}(1-\lambda),\sqrt{2}\lambda,2\lambda)$,$\overrightarrow{A_1P}=(\sqrt{2}(1-\lambda),\sqrt{2}(\lambda+1),2\lambda-2)$,$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,2)$,

$\therefore\cos\langle\overrightarrow{BB_1},\overrightarrow{A_1P}\rangle=\frac{\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{A_1P}}{|\overrightarrow{BB_1}||\overrightarrow{A_1P}|}=\frac{\lambda-1}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2-\lambda+1}}$,不是定值,B 错误;

$\overrightarrow{AP}=(\sqrt{2}(1-\lambda),\sqrt{2}(1+\lambda),2\lambda)$,$\boldsymbol{\mu}=\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=(0,1,0)$,$\therefore$点 P 到直线 AC 的距离 $d=\sqrt{\overrightarrow{AP}^2-(\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{\mu})^2}=$ $\sqrt{6(\lambda-\frac{1}{3})^2+\frac{4}{3}}\in\left[\frac{2\sqrt{3}}{3},2\right]$,$\therefore\triangle ACP$ 的面积 S 的取值范围为$\left[\frac{2\sqrt{6}}{3},2\sqrt{2}\right]$,D 正确.



13. $\frac{1}{2}$　因为 $f(x)=\ln x-ax$,所以 $f'(x)=\frac{1}{x}-a$,所以 $f(x)$在 $x=1$ 处的切线斜率 $k=f'(1)=1-a=\frac{1}{2}$,解得 $a=\frac{1}{2}$.

14. $f(x)=\cos\frac{2\pi}{3}x$(答案不唯一) 由最小正周期为 3,可考虑三角函数中的余弦型函数 $f(x)=A\cos\omega x,(A\neq0)$,满足 $f(-x)=A\cos\omega x=f(x)$,即是偶函数;根据最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=3$,可得 $\omega=\frac{2}{3}\pi$. 故函数可以是 $f(x)=A\cos\frac{2\pi}{3}x(A\neq0)$中任一个,可取 $f(x)=\cos\frac{2\pi}{3}x$.

15. $3030+\sqrt{3}$ $\because a_1=\sqrt{3}$;$\therefore a_2=1+\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$;$a_3=2+\frac{1}{\frac{3+\sqrt{3}}{2}-2}=\frac{6}{2}+\sqrt{3}$;$a_4=4+\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{9}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$;$a_5=5+\frac{1}{\frac{9+\sqrt{3}}{2}-5}=\frac{12}{2}+\sqrt{3}$;由此可得到规律:当 n 为奇数时,$a_n=\frac{n-1}{2}\times3+\sqrt{3}$;$\therefore a_{2021}=\frac{2021-1}{2}\times3+\sqrt{3}=3030+\sqrt{3}$.

16. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ 或 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1(-2<y<2)$ 设点 P 的坐标为(x,y),依题意得 $A(x_0,y)$,$B(-x_0,y)$,因为$|PA|\cdot|PB|=3$,所以$|x-x_0|\cdot|x+x_0|=|x^2-x_0^2|=3\Rightarrow x_0^2=x^2\pm3$,代入椭圆的方程得$\frac{x^2\pm3}{6}+\frac{y^2}{4}=1$,即$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ 与$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$ $(-2<y<2)$. 更多试题与答案,关注微信公众号:三晋高中指南

17. 解:(1)在数列$\{a_n\}$中,因为 $a_{n+1}-a_n=2$,所以数列$\{a_n\}$是公差 $d=2$ 的等差数列, ······ 2 分

由 $S_3=15$ 得 $3a_1+3d=15$,解得 $a_1=3$, ······ 4 分

所以数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=a_1+(n-1)d=2n+1$; ······ 5 分

(2)$\because a_n=2n+1$,$\therefore b_n=\frac{1}{4n(n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$. ······ 7 分

故 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{4(n+1)}$,

$\therefore$数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $T_n=\frac{n}{4n+4}$. ······ 10 分

18. 解:(1)在$\triangle ABC$ 中,由余弦定理知 $BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cos\angle BAC$, ······ 2 分

整理得 $BC^2=9+36-2\times3\times6\times\frac{1}{2}=27$,解得 $BC=3\sqrt{3}$. ······ 4 分

(2)因为 $AB^2+BC^2=9+27=36=AC^2$,

所以$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$. ······ 6 分

$BN=\frac{1}{2}AC=3$,$AM=\sqrt{AB^2+BM^2}=\frac{3\sqrt{7}}{2}$, ······ 8 分

所以 $AP=\frac{2}{3}AM=\sqrt{7}$,$BP=\frac{2}{3}BN=2$,$\cos\angle APB=\frac{AP^2+BP^2-AB^2}{2AP\cdot BP}=\frac{\sqrt{7}}{14}$. ······ 11 分

所以$\angle MPN$ 的余弦值为$\frac{\sqrt{7}}{14}$. ······ 12 分

19. (1)证明:$\because$四边形 $ABCD$ 为菱形,$\therefore AD/\!/BC$,

$\because AD\not\subset$平面 $BCEF$,$BC\subset$平面 $BCEF$

$\therefore AD/\!/$平面 $BCEF$, ······ 2 分

∵平面 $ADEF\cap$ 平面 $BCEF=$ 直线 EF，$AD\subset$ 平面 $ADEF$，

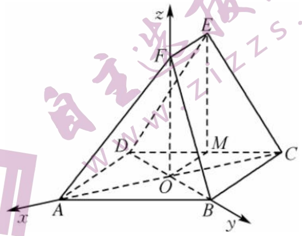
∴$EF\parallel AD$；…………………………………………………………………… 4 分

(2)解：∵四边形 $ABCD$ 为菱形，∴$AC\perp BD$，

∵$OF\perp$ 平面 $ABCD$，OA、$OB\subset$ 平面 $ABCD$，∴$OF\perp OA$，$OF\perp OB$，

∴以 O 为坐标原点、OA，OB，OF 为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系如图所示，

取 CD 中点 M，连 EM，OM，…………………………………………… 5 分



∵$\angle BAD=60^\circ$，$BC=2$，∴$OA=OC=\sqrt{3}$，$OB=OD=1$，

∵$BC=CD=CE=DE=2$，∴$\triangle CDE$ 为正三角形，$EM=\sqrt{3}$，

∵$OM\parallel BC$，$OM=\frac{1}{2}BC$，$EF\parallel BC$，$EF=\frac{1}{2}BC$，

∴$EF\parallel OM$，$EF=OM$，∴四边形 $EFOM$ 为平行四边形，∴$OF\parallel EM$，$OF=EM$，………………………… 7 分

从而 $A(\sqrt{3},0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(-\sqrt{3},0,0)$，$D(0,-1,0)$，$E(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},\sqrt{3})$，

∴$\overrightarrow{DA}=(\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{DE}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},-1,0)$，$\overrightarrow{EC}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},-\sqrt{3})$，

设平面 $ADEF$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DA}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{3}x+y=0,\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$

令 $x=1$，∴$y=-\sqrt{3}$，$z=1$，$\boldsymbol{m}=(1,-\sqrt{3},1)$，……………………………………………… 9 分

设平面 $BCEF$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{3}x-y=0,\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-\sqrt{3}z=0,\end{cases}$

令 $x=1$，∴$y=-\sqrt{3}$，$z=-1$，$\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},-1)$，……………………………………………… 11 分

∴$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{3}{5}$，

由图可知，二面角 $A-EF-B$ 为锐二面角，

因此二面角 $A-EF-B$ 的余弦值为 $\frac{3}{5}$．……………………………………………… 12 分

20. 解：(1)由题意得：$\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5+6+7+8}{8}=\frac{9}{2}$，$\bar{y}=\frac{14+12+20+20+22+24+30+26}{8}=21$，……………… 2 分

∴$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{8}x_iy_i-8\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum_{i=1}^{8}x_i^2-8\bar{x}^2}=\frac{850-8\times\frac{9}{2}\times 21}{204-8\times\left(\frac{9}{2}\right)^2}=\frac{94}{42}\approx 2$，∴$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\cdot\bar{x}=12$，…………………………… 4 分

所以，线性回归方程为 $\hat{y}=2x+12$，……………………………………………………

∴当 $x=9$ 时，$\hat{y}=2\times9+12=30$，即预计 9 月份的成交量为 30 辆；…… 6 分

(2)由题意得：获得"一等奖"的概率为 $\frac{1}{2}$，

所以 X 的可能取值为 0，2，4，5，7，10，

$\therefore P(X=0)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$，$P(X=2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$，

$P(X=4)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$，$P(X=5)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，

$P(X=7)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$，$P(X=10)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，

所以 X 的分布列为：

X	0	2	4	5	7	10
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

…… 10 分

$\therefore E(X)=0\times\frac{1}{36}+2\times\frac{1}{9}+4\times\frac{1}{9}+5\times\frac{1}{6}+7\times\frac{1}{3}+10\times\frac{1}{4}=\frac{19}{3}$. …… 12 分

21. 解：(1)设双曲线 C 的焦距为 $2c(c>0)$，

由题意可得：$\begin{cases}c=\sqrt{5},\\ c^2=a^2+b^2,\\ \frac{b}{a}=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=1,\end{cases}$，则双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$；…… 4 分

(2)由于直线 l 与双曲线 C 右支相切(切点不为右顶点)，则直线 l 的斜率存在，

设直线 l 的方程为 $y=kx+m$，

则 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{4}-y^2=1,\end{cases}$ 消 y 得 $(4k^2-1)x^2+8kmx+4m^2+4=0$，

$\Delta=64k^2m^2-4(4k^2-1)(4m^2+4)=0\Rightarrow4k^2=m^2+1$，① …… 6 分

设 l 与 x 轴交于一点 D，$|OD|=-\frac{m}{k}$，

$S_{\triangle OAB}=S_{\triangle AOD}+S_{\triangle BOD}=\frac{1}{2}OD\times|y_A-y_B|=\frac{-m}{2k}|k|\cdot|x_A-x_B|$，

双曲线两条渐近线方程为：$y=\pm\frac{1}{2}x$， …… 8 分

联立 $\begin{cases}y=\frac{1}{2}x,\\ y=kx+m,\end{cases}\Rightarrow A\left(\frac{2m}{1-2k},\frac{m}{1-2k}\right)$，联立 $\begin{cases}y=-\frac{1}{2}x,\\ y=kx+m,\end{cases}\Rightarrow B\left(\frac{-2m}{2k+1},\frac{m}{2k+1}\right)$，

则 $S_{\triangle AOB}=\frac{-m}{2k}\cdot|k|\cdot\left|\frac{2m}{1-2k}+\frac{2m}{1+2k}\right|=\frac{-m}{2k}\cdot|k|\cdot\left|\frac{4m}{1-4k^2}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{m}{k}\right|\cdot|k|\cdot\left|\frac{4m}{-m^2}\right|=2$(定值). … 12 分

22. 解：(1) $a=0$，则 $f(x)=2e^x\sin x$，定义域为 $\mathbf{R}$.

$f'(x)=2e^x(\sin x+\cos x)=2\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，…… 2 分

由 $f'(x)>0$，解得 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0$，可得 $2k\pi<x+\frac{\pi}{4}<2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$，

解得 $2k\pi-\frac{\pi}{4}<x<2k\pi+\frac{3\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，

由 $f'(x)<0$，解得 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<0$，可得 $2k\pi+\pi<x+\frac{\pi}{4}<2k\pi+2\pi(k\in\mathbf{Z})$，

解得 $2k\pi+\frac{3\pi}{4}<x<\frac{7\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$. 更多试题与答案，关注微信公众号：三晋高中指南

∴ $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$，单调递减区间为 $\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\frac{7\pi}{4}+2k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$. …… 4 分

(2) 由已知 $f(x)=2e^x\sin x-ax$，∴ $f'(x)=2e^x(\sin x+\cos x)-a$，令 $h(x)=f'(x)$，则 $h'(x)=4e^x\cos x$. …… 5 分

∵ $x\in(0,\pi)$，∴ 当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$h'(x)>0$；当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$h'(x)<0$，

∴ $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减，即 $f'(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减. …… 6 分

$f'(0)=2-a$，$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2e^{\frac{\pi}{2}}-a>0$，$f'(\pi)=-2e^{\pi}-a<0$. …… 7 分

①当 $2-a\geqslant 0$ 时，即 $0<a\leqslant 2$ 时，$f'(0)\geqslant 0$，∴ $\exists x_0\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，使得 $f'(x_0)=0$，

∴ 当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(x_0,\pi)$ 时，$f'(x)<0$，∴ $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，(x_0,π) 上单调递减.

∵ $f(0)=0$，∴ $f(x_0)>0$. 又 ∵ $f(\pi)=-a\pi<0$，∴ 由零点存在性定理可得，此时 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上仅有一个零点. …… 9 分

②若 $2<a<6$ 时，$f'(0)=2-a<0$，

又 ∵ $f'(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减，而 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2e^{\frac{\pi}{2}}-a>0$，

∴ $\exists x_1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$x_2\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，使得 $f'(x_1)=0$，$f'(x_2)=0$，

且当 $x\in(0,x_1)$、$x\in(x_2,\pi)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(x_1,x_2)$ 时，$f'(x)>0$.

∴ $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 和 (x_2,π) 上单调递减，在 (x_1,x_2) 上单调递增.

∵ $f(0)=0$，∴ $f(x_1)<0$，∵ $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}a>2e^{\frac{\pi}{2}}-3\pi>0$，∴ $f(x_2)>0$，

又 ∵ $f(\pi)=-a\pi<0$，由零点存在性定理可得，$f(x)$ 在 (x_1,x_2) 和 (x_2,π) 内各有一个零点，即此时 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有两个零点. …… 11 分

综上所述，当 $0<a\leqslant 2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上仅有一个零点；当 $2<a<6$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有两个零点. …… 12 分

【数学参考答案 第 6 页(共 6 页)】

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。