

一、选择题

1. C 2. D 3. B 4. A 5. A 6. A 7. B 8. D

二、选择题

9. AC 10. BCD 11. ABD 12. BC

三、填空题

13. 1 14. 30 15. 231 16. $\left(\frac{2}{e}, +\infty\right)$

四、解答题

17. 解: (1) 因为 $f(x) = a \ln x + \frac{1}{x} - 3x + 1$,

$$\text{所以 } f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{1}{x^2} - 3,$$

又因为 $f'(1) = 0$, 所以 $a - 4 = 0$, 解得 $a = 4$,
经检验 $a = 4$ 符合题意, 所以 $a = 4$. (4分)

(2) 由(1)可知, $f(x) = 4 \ln x + \frac{1}{x} - 3x + 1$,

$$\text{则 } f'(x) = -\frac{(3x-1)(x-1)}{x^2} (x > 0),$$

当 $0 < x < \frac{1}{3}$ 或 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$,

当 $\frac{1}{3} < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$,

故可得 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

在区间 $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ 上单调递增,

故 $f(x)$ 的极大值点为 $x = 1$, 极小值点为 $x = \frac{1}{3}$. (10分)

18. 解: (1) 依题意有 $|GO_2| + |GO_1| = |GO_1| + |GP| = |O_1P| = 4\sqrt{2} > 4$,

即点 G 的轨迹是以 O_1, O_2 为焦点的椭圆,

则 $a = 2\sqrt{2}, c = 2$, 所以 $b = 2$,

故点 G 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$. (5分)

(2) 设 l 的方程为 $x = my + 2, D(x_1, y_1), E(x_2, y_2)$,

则 $\overrightarrow{O_1D} = (x_1 + 2, y_1), \overrightarrow{O_1E} = (x_2 + 2, y_2)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} x = my + 2, \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1, \end{cases} \text{ 得 } (m^2 + 2)y^2 + 4my - 4 = 0, \Delta > 0,$$

$$\text{则 } y_1 + y_2 = \frac{-4m}{m^2 + 2}, y_1 y_2 = \frac{-4}{m^2 + 2},$$

$$\overrightarrow{O_1D} \cdot \overrightarrow{O_1E} = (x_1 + 2)(x_2 + 2) + y_1 y_2 = (m^2 +$$

$$1)y_1 y_2 + 4m(y_1 + y_2) + 16 = \frac{-4(m^2 + 1)}{m^2 + 2} - \frac{16m^2}{m^2 + 2} +$$

$$16 = -4 + \frac{36}{m^2 + 2},$$

当 $m = 0$ 时, $\overrightarrow{O_1D} \cdot \overrightarrow{O_1E}$ 取最大值 14.

此时 $2y^2 - 4 = 0$, 所以 $D(2, \sqrt{2}), E(2, -\sqrt{2})$,

$$\text{故 } S_{\triangle O_1DE} = \frac{1}{2} |O_1O_2| \cdot |DE| = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

(12分)

19. 解: 若选择①②: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d (d > 0)$,

$$\text{由 } a_4 + a_5 = 8, a_3 a_6 = \frac{55}{4},$$

$$\text{可得 } \begin{cases} a_4 + a_5 = a_3 + a_6 = 8, \\ a_3 a_6 = \frac{55}{4}, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a_3 = \frac{5}{2}, \\ a_6 = \frac{11}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a_3 = \frac{11}{2}, \\ a_6 = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ (舍去),}$$

$$\text{所以 } d = \frac{a_6 - a_3}{3} = 1,$$

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = \frac{5}{2} + (n-3)$,

$$\text{即 } a_n = n - \frac{1}{2}, \quad (6分)$$

$$\text{所以 } b_n = \frac{a_n}{2^n} = \frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

$$\text{所以 } b_{n+1} - b_n = \frac{2(n+1)-1}{2^{n+2}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} = \frac{3-2n}{2^{n+2}},$$

所以当 $n = 1$ 时, $b_1 < b_2$;

当 $n \geq 2$ 时, $b_{n+1} < b_n$, 故 $b_n \leq b_2$,

$$\text{即数列 } \{b_n\} \text{ 的最大项为 } b_2 = \frac{2 \times 2 - 1}{2^3} = \frac{3}{8}. \quad (12分)$$

若选择①③: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d (d > 0)$,

由 $S_{10} = 50, a_4 + a_5 = 8$,

$$\text{可得 } \begin{cases} 10a_1 + \frac{10 \times 9}{2} d = 50, \\ 2a_1 + 7d = 8, \end{cases} \text{ 解得 } a_1 = \frac{1}{2}, d = 1,$$

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = \frac{1}{2} + (n-1)$,

$$\text{即 } a_n = n - \frac{1}{2}, \quad (6分)$$

$$\text{所以 } b_n = \frac{a_n}{2^n} = \frac{2n-1}{2^{n+1}}, \text{ 所以 } b_{n+1} - b_n = \frac{2(n+1)-1}{2^{n+2}} -$$

$$\frac{2n-1}{2^{n+1}} = \frac{3-2n}{2^{n+2}},$$

所以当 $n = 1$ 时, $b_1 < b_2$;

当 $n \geq 2$ 时, $b_{n+1} < b_n$, 故 $b_n \leq b_2$,



即数列 $\{b_n\}$ 的最大项为 $b_2 = \frac{2 \times 2 - 1}{2^3} = \frac{3}{8}$. (12分)

若选择②③: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d > 0)$,

由 $a_3 a_6 = \frac{55}{4}, S_{10} = 50$,

$$\text{可得} \begin{cases} 10a_1 + \frac{10 \times 9}{2}d = 50, \\ (a_1 + 2d)(a_1 + 5d) = \frac{55}{4}, \end{cases} \text{解得 } a_1 = \frac{1}{2}, d = 1,$$

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = \frac{1}{2} + (n-1)$, (6分)

即 $a_n = n - \frac{1}{2}$, 所以 $b_n = \frac{a_n}{2^n} = \frac{2n-1}{2^{n+1}}$,

所以 $b_{n+1} - b_n = \frac{2(n+1)-1}{2^{n+2}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} = \frac{3-2n}{2^{n+2}}$,

所以当 $n=1$ 时, $b_1 < b_2$;

当 $n \geq 2$ 时, $b_{n+1} < b_n$;

故 $b_n \leq b_2$,

即数列 $\{b_n\}$ 的最大项为 $b_2 = \frac{2 \times 2 - 1}{2^3} = \frac{3}{8}$. (12分)

20. 解: (1) 由题意 $f'(x) = \cos x + x \sin x - 1$, 所以 $f'(0) = 0$, 即切线的斜率 $k = 0$, 且 $f(0) = 0$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $A(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = 0$. (4分)

(2) 由题意知 $f(x)_{\min} > g(x)_{\min}$, 且 $g(x) = x^2 - 2x + a(a \in \mathbb{R})$ 的对称轴为直线 $x = 1$, 所以当 $1 \leq x \leq 2$ 时,

$g(x)_{\min} = g(1) = a - 1$.

设 $h(x) = f'(x)$, 则 $h(x) = \cos x + x \sin x - 1$, $h'(x) = x \cos x$.

当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $h'(x) > 0$; 当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时,

$h'(x) < 0$, 所以 $h(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 在

区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递减.

又 $h(0) = 0, h(\frac{\pi}{2}) > 0, h(\pi) = -2$, 所以 $f'(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上只有一个零点, 设为 x_0 , 且当 $x \in (0, x_0)$ 时,

$f'(x) > 0$; 当 $x \in (x_0, \pi)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在区间 $(0, x_0)$ 上单调递增, 在区间 (x_0, π) 上单调递减.

又 $f(0) = 0, f(\pi) = 0$,

所以当 $x \in [0, \pi]$ 时, $f(x)_{\min} = 0$,

所以 $0 > a - 1$, 即 $a < 1$,

因此, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 1)$. (12分)

21. (1) 解: $f(x) = e^{x-2} - \ln(x-1) (x > 1)$, $f'(x) =$

$e^{x-2} - \frac{1}{x-1}$, 易知 $f'(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递

增, 且 $f'(2) = 1 - 1 = 0$, 所以当 $1 < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > 2$ 时, $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 上单调递减, 在区间 $(2, +\infty)$ 上单调递增. (4分)

(2) 证明: $g(x) = \frac{x}{e^x - a \ln(x+1) + a \ln(x+1)} = \frac{x}{e^x} (x >$

$-1)$, 所以 $g'(x) = \frac{1-x}{e^x}$,

当 $-1 < x < 1$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, 当 $x > 1$

时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

$x > 1$ 时, $g(x) > 0, g(0) = 0$.

因为存在 $x_1 < x_2$, 使得 $g(x_1) = g(x_2)$, 所以 $0 < x_1 < 1 < x_2$,

$\frac{x_1}{e^{x_1}} = \frac{x_2}{e^{x_2}}$, 令 $\frac{x_2}{x_1} = e^{x_2-x_1} = t > 1$,

$$\text{所以} \begin{cases} x_2 = tx_1, \\ x_2 - x_1 = \ln t, \end{cases} \text{所以} \begin{cases} x_1 = \frac{\ln t}{t-1}, \\ x_2 = \frac{t \ln t}{t-1}. \end{cases} \quad (8 \text{分})$$

所以 $3x_1 + x_2 - 3 = \frac{3 \ln t}{t-1} + \frac{t \ln t}{t-1} - 3 = \frac{t+3}{t-1} \left[\ln t - \frac{3(t-1)}{t+3} \right]$, 令 $r(t) = \ln t - \frac{3(t-1)}{t+3} (t > 1)$,

则 $r'(t) = \frac{1}{t} - \frac{12}{(t+3)^2} = \frac{(t-3)^2}{t(t+3)^2} \geq 0$, 所以 $r(t)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $r(t) > r(1) = 0$,

所以 $3x_1 + x_2 - 3 > 0$,

所以 $x_2 > 3(1-x_1) > 0, \ln x_2 > \ln 3(1-x_1)$,

所以 $\ln x_2 - \ln(1-x_1) > \ln 3$. (12分)

22. 解: (1) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $f'(x) = 2ae^{2x} + (a-2)e^x - 1 = (ae^{2x} - 1)(2e^x + 1)$,

(i) 若 $a \leq 0$, 则 $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减.

(ii) 若 $a > 0$, 则由 $f'(x) = 0$ 得 $x = -\ln a$.

当 $x \in (-\infty, -\ln a)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (-\ln a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -\ln a)$

上单调递减, 在区间 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增. (5分)

(2) 若 $a \leq 0$, 由(1)知, $f(x)$ 至多有一个零点.

若 $a > 0$, 由(1)知, 当 $x = -\ln a$ 时, $f(x)$ 取得最小值, 最小值为 $f(-\ln a) = 1 - \frac{1}{a} + \ln a$,

① 当 $a = 1$ 时, 由于 $f(-\ln a) = 0$, 因此 $f(x)$ 只有一个零点;

② 当 $a \in (1, +\infty)$ 时, 由于 $1 - \frac{1}{a} + \ln a > 0$, 即 $f(-\ln a) > 0$, 因此 $f(x)$ 没有零点;

③ 当 $a \in (0, 1)$ 时, $1 - \frac{1}{a} + \ln a < 0$, 即 $f(-\ln a) < 0$.

又 $f(-2) = ae^{-4} + (a-2)e^{-2} + 2 > -2e^{-2} + 2 > 0$, 且 $-2 < -\ln a$, 故 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -\ln a)$ 上有一个零点. (8分)

设正整数 n_0 满足 $n_0 > \ln\left(\frac{3}{a} - 1\right)$, 则 $f(n_0) =$

$e^{n_0} (ae^{n_0} + a - 2) - n_0 > e^{n_0} - n_0 > 2^{n_0} - n_0 > 0$.

由于 $\ln\left(\frac{3}{a} - 1\right) > -\ln a$, 因此 $f(x)$ 在区间 $(-\ln a, +\infty)$ 上有一个零点.

综上, a 的取值范围为 $(0, 1)$. (12分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线