2023届高三一轮复习联考(一) 全国卷

理科数学试卷

注意事项:

1.答卷前,考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为120分钟,满分150分

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

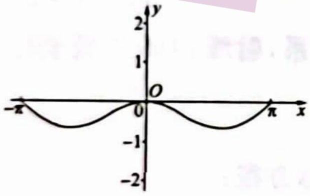
1.若集合 $A=\{x\mid x^2-x-2<0\}$,$B=\{x\mid 0<x<3\}$,则 $A\cap B=$

A.$(0,2)$　　B.$(2,3)$　　C.$(-1,0)$　　D.$(-1,3)$

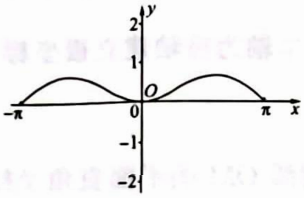
2.已知 $zi=2+i$,则复数 z 在复平面内对应的点在

A.第一象限　　B.第二象限　　C.第三象限　　D.第四象限

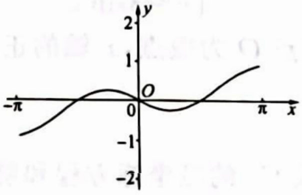
3.函数 $f(x)=\dfrac{\sin x\ln(\sqrt{x^2+1}-x)}{2}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的图象大致为



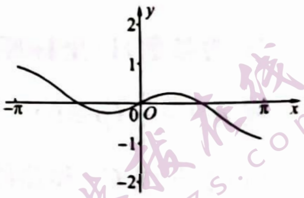
A



B



C

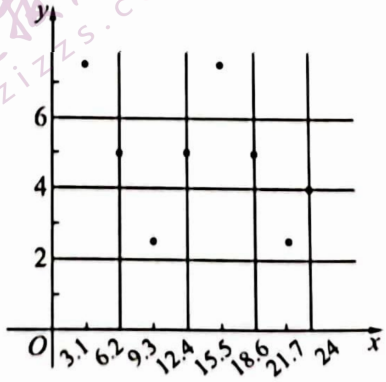


D

4.命题"$\forall x\in(1,2)$,$\log_2 x-a<0$"为真命题的一个充分不必要条件是

A.$a\geqslant 0$　　B.$a\geqslant 2$　　C.$a\geqslant 1$　　D.$a\leqslant 4$

5.我国古代学者余道安在他著的《海潮图序》一书中说:"潮之涨落,海非增减,盖月之所临,则之往从之"。哲学家王充在《论衡》中写道:"涛之起也,随月盛衰。"指出了潮汐跟月亮有关系。到了17世纪80年代,英国科学家牛顿发现了万有引力定律之后,提出了潮汐是由于月亮和太阳对海水的吸引力引起的假设,科学地解释了产生潮汐的原因。船只在涨潮时驶进航道,靠近码头;卸货后,在落潮时返回海洋。下图是某港口某天记录的时刻(x 轴)与水深(y 轴)关系的散点图



若某货船需要的安全水深为5米，则下列说法正确的是

A.该船在凌晨3点零6分驶入航道，靠近码头，9点18分返回海洋或15点30分驶入航道，靠近码头，21点42分返回海洋

B.该船这一天能进入航道，靠近码头的时间可以是0时到凌晨6点12分或12时24分到18点36分

C.海水涨落潮周期是12小时

D.该船最多在码头停留时间不能超过6小时

6.已知函数 $f(x)=\begin{cases}2-x, x<0,\\2-x^2, x\geqslant 0,\end{cases}$ 则不等式 $f(2a+1)>f(3a-4)$ 的解集为

A.$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$　　B.$\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$　　C.$(-\infty,5)$　　D.$(5,+\infty)$

7.函数 $f(x)=\ln\frac{4-x}{x+4}+(x^2+2)\sin x+2$ 在$[-3,3]$上的最大值与最小值的和为

A.-2　　B.2　　C.4　　D.6

8.已知 $\tan(\alpha+\beta)$，$\tan(\alpha-\beta)$是方程 $x^2+5x+6=0$ 的两个根，则 $\tan 2\alpha=$

A.-1　　B.1　　C.-2　　D.2

9.已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\cos x-2$，设 $a=f(\log_2 0.2)$，$b=f(\log_{0.3}0.2)$，$c=f(0.2^{0.3})$，则

A.$a>c>b$　　B.$a>b>c$　　C.$c>b>a$　　D.$b>c>a$

10.已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2ax-2, x\leqslant 2,\\x+\frac{36}{x}-6a, x>2,\end{cases}$ 若 $f(x)$的最小值为 $f(2)$，则实数 a 的取值范围为

A.$[2,5]$　　B.$[2,+\infty)$　　C.$[2,6]$　　D.$(-\infty,5]$

11.已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，且满足 $f(3x-2)$为偶函数，$f(2x-1)$为奇函数，则下列说法正确的是

①函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称　②函数 $f(x)$的图象关于点$(-1,0)$中心对称

③函数 $f(x)$的周期为4　④$f(2\,023)=0$

A.①②③　　B.①②④　　C.②③④　　D.①③④

12.对于函数 $f(x)$和 $g(x)$，设 $\alpha\in\{x|f(x)=0\}$，$\beta\in\{x|g(x)=0\}$，若存在 α,β，使得 $|\alpha-\beta|\leqslant 1$，则称 $f(x)$和 $g(x)$互为“零点相邻函数”，若函数 $f(x)=\lg(x-1)+e^{x-2}-1$ 与 $g(x)=x^2-ax-a+8$ 互为“零点相邻函数”，则实数 a 的取值范围是

A.$\left[\frac{17}{4},\frac{9}{2}\right]$　　B.$\left[4,\frac{9}{2}\right]$　　C.$\left[\frac{7}{3},3\right]$　　D.$[2,4]$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13.已知 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x\geqslant y,\\x\leqslant 2,\\y\geqslant 1,\end{cases}$ 若 $z=kx+y$ 取得最大值的最优解有无数个，则实数 $k=$______.

14.已知 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$3\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{5}$，则 $\tan\alpha=$______.

15.已知 $z\in\mathbf{C}$，且$|z-\mathrm{i}|=1$，i为虚数单位，则$|z-2|$的最大值是______.

16.已知函数 $f(x)=(kx+2k)e^x$，$g(x)=x+1$，若不等式 $f(x)<g(x)$的解集中恰有两个非负整数，则实数 k 的取值范围为______.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：60 分。

17.(12 分)已知函数 $f(x)=4\cos x\cdot\cos\left(x-\dfrac{2\pi}{3}\right)+1$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调递减区间；

(2)求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的值域.

18.(12 分)为响应国家环保的号召，某企业计划 2020 年引进新型环保设备生产新能源汽车，通过市场分析，全年需投入固定成本 1 000 万元，每生产 x(百辆)汽车，需另投入成本 $C(x)$ 万元，且 $C(x)=\begin{cases}10x^2+500x, 0<x<20,\\ 801x+\dfrac{400}{x}-2\ 000, x\geqslant 20,\end{cases}$ 若每辆新能源汽车售价为 8 万元，并且全年内生产的汽车当年能全部销售完.

(1)求 2020 年的利润 L(万元)关于年产量 x(百辆)的函数关系式 $L(x)$(其中利润＝销售额－成本)

(2)当 2020 年产量为多少百辆时，企业所获利润最大？并求最大利润.

19.(12 分)已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ 在点 $P(1,f(1))$ 处的切线方程为 $4x-y-2=0$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2)若函数 $g(x)=f(x)-m$ 有三个零点，求实数 m 的取值范围.

20.(12 分)已知函数 $f(x)=\log_3(4^x-9\times 2^{x+1}+113)$，函数 $g(x)=x^2-2mx+5m$.

(1)求不等式 $f(x)\leqslant 4$ 的解集；

(2)若 $\forall x_1\in[1,3]$，$\exists x_2\in[0,2]$，使得 $f(x_1)\leqslant g(x_2)$，求实数 m 的取值范围.

21.(12 分)已知函数 $f(x)=2x-\sin x-a\ln x$.

(1)当 $a=0$ 时，$\forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，$f(x)\leqslant mx$，求实数 m 的取值范围；

(2)若 $\exists x_1,x_2\in(0,+\infty)$，$x_1\neq x_2$，使得 $f(x_1)=f(x_2)$，求证：$x_1x_2<a^2$.

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.[选修 4－4：坐标系与参数方程](10 分)

已知曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=3+3\cos\alpha,\\ y=3\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\alpha,\\ y=1+\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，射线 OM 的极坐标方程为 $\theta=\dfrac{\pi}{3}(\rho\geqslant 0)$.

(1)求曲线 C_1 和曲线 C_2 的极坐标方程和射线 OM 的平面直角坐标方程；

(2)若射线 OM 与曲线 C_1 的交点为 P，与曲线 C_2 的交点为 Q，求 $|OP|\cdot|OQ|$ 的值.

23.[选修 4－5：不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x)=|x-2|+|x+1|$.

(1)解不等式 $f(x)>5$；

(2)若不等式 $f(x)\geqslant t$ 恒成立，求实数 t 的取值范围.

2023届高三一轮复习联考(一)　全国卷

理科数学参考答案及评分意见

1.A 【解析】由题，$A=(-1,2)$，$B=(0,3)$，所以 $A\cap B=(0,2)$，故选 A.

2.D 【解析】设 $z=x+y\mathrm{i}$，因为 $(x+y\mathrm{i})\mathrm{i}=2+\mathrm{i}$，所以 $-y+x\mathrm{i}=2+\mathrm{i}$，则 $x=1$，$y=-2$，则对应的点在第四象限.故选 D.

3.A 【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x)=f(-x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，所以 C，D 错误，又 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)<0$，所以 B 错误，故选 A.

4.B 【解析】因为命题 $\forall x\in(1,2)$，$\log_2 x-a<0$ 是真命题，当 $x\in(1,2)$ 时，$0<\log_2 x<1$，若 $a>\log_2 x$ 恒成立，则 $a\geqslant1$，结合选项，命题是真命题的一个充分不必要条件是 $a\geqslant2$，故选 B.

5.B 【解析】由图可知一天内在凌晨到 6 点 12 分水深超过 5 米，在 12 点 24 分到 18 点 36 分水深超过 5 米，故 A 错误，B 正确；涨落潮周期为 12.4 小时即 12 小时 24 分钟，故 C 错误；海水水深保持在 5 米以上的时间为 $3.1+3.1=6.2$ 小时，故 D 错误.故选 B.

6.D 【解析】根据题目所给的函数解析式，可知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数，所以 $2a+1<3a-4$，解得 $a>5$.故选 D.

7.C 【解析】由题易知 $f(-x)+f(x)=4$，所以函数 $f(x)$ 关于点 $(0,2)$ 对称，故最大值与最小值也关于 $(0,2)$ 对称，其和为 4，故选 C.

8.B 【解析】由于 $\tan(\alpha+\beta)$，$\tan(\alpha-\beta)$ 是方程 $x^2+5x+6=0$ 的两个根，所以 $\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)=-5$，$\tan(\alpha+\beta)\cdot\tan(\alpha-\beta)=6$，所以 $\tan 2\alpha=\dfrac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)}{1-\tan(\alpha+\beta)\cdot\tan(\alpha-\beta)}=\dfrac{-5}{1-6}=1$.故选 B.

9.B 【解析】函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\cos x-2$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)=\frac{1}{2}(-x)^2+\cos(-x)-2=f(x)$，故 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\cos x-2$ 为偶函数，当 $x\geqslant0$ 时，$f'(x)=x-\sin x$，令 $g(x)=x-\sin x$，则 $g'(x)=1-\cos x\geqslant0$，即 $g(x)=x-\sin x$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，故 $g(x)\geqslant g(0)=0$，所以 $f'(x)\geqslant0$，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，由于 $\log_2 0.2=\log_2\frac{1}{5}=-\log_2 5\in(-3,-2)$，$2=\log_{0.3}0.09>\log_{0.3}0.2>\log_{0.3}0.3=1$，$0<0.2^{0.3}<1$，所以 $a>b>c$.故选 B.

10.A 【解析】当 $x>2$ 时，$x+\frac{36}{x}-6a\geqslant2\sqrt{x\cdot\frac{36}{x}}-6a=12-6a$，当且仅当 $x=6$ 时，等号成立，即当 $x>2$ 时，函数 $f(x)$ 的最小值为 $12-6a$，当 $x\leqslant2$ 时，$f(x)=x^2-2ax-2$，要使得函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(2)$，则满足 $\begin{cases}a\geqslant2,\\f(2)=2-4a\leqslant12-6a,\end{cases}$ 解得 $2\leqslant a\leqslant5$.故选 A.

11.C 【解析】因为 $f(3x-2)$ 为偶函数，所以 $f(3x-2)=f(-3x-2)$，所以 $f(x-2)=f(-x-2)$，$f(x)=f(-x-4)$，所以函数 $f(x)$ 关于直线 $x=-2$ 对称，不能确定 $f(x)$ 是否关于直线 $x=1$ 对称，①错误；因为 $f(2x-1)$ 为奇函数，所以 $f(2x-1)=-f(-2x-1)$，所以 $f(x-1)=-f(-x-1)$，所以 $f(x)=-f(-x-2)$，所以函数 $f(x)$ 关于点 $(-1,0)$ 中心对称，故②正确，且函数 $f(x)$ 的周期为 4，故③正确；$f(2\,023)=f(506\times4-1)=f(-1)=0$，故④正确.故选 C.

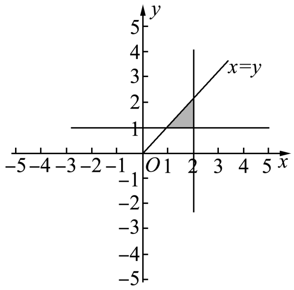
12.B 【解析】$\because f(x)$ 的定义域为 $(1,+\infty)$，易得 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，又 $f(2)=0$，$\therefore f(x)$ 只有一个零点 $x=2$.若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 互为"零点相邻函数"，则 $g(x)$ 在 $[1,3]$ 上存在零点.$\therefore\Delta=a^2-4(8-a)\geqslant0$，解得 $a\geqslant4$ 或 $a\leqslant-8$.(1)若 $\Delta=0$，即 $a=4$ 或 $a=-8$ 时，$g(x)$ 只有一个零点 $x=\frac{a}{2}$，显然当 $a=4$ 时，$\frac{a}{2}=2\in[1,3]$，符合题意，当 $a=-8$ 时，$\frac{a}{2}\notin[1,3]$，不符合题意；(2)若 $\Delta>0$，即 $a<-8$ 或 $a>4$ 时，

①若 $g(x)$ 在 $[1,3]$ 上存在 1 个零点，则 $g(1)\cdot g(3)\leqslant0$，即 $(9-2a)(17-4a)\leqslant0$，解得 $\frac{17}{4}\leqslant a\leqslant\frac{9}{2}$，$\therefore\frac{17}{4}\leqslant a\leqslant\frac{9}{2}$.

②若 $g(x)$ 在 $[1,3]$ 上存在 2 个零点，则 $\begin{cases}g(1)\geqslant0,\\g(3)\geqslant0,\\1<\frac{a}{2}<3,\end{cases}$ $\therefore4<a\leqslant\frac{17}{4}$.

综上，a 的取值范围是 $\left[4,\frac{9}{2}\right]$.故选 B.

13.-1 【解析】作出满足约束条件$\begin{cases}x\geqslant y,\\x\leqslant 2,\\y\geqslant 1\end{cases}$对应的平面区域，如图所示，



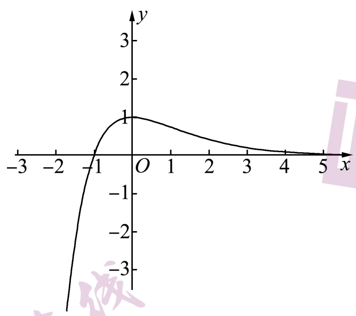
由 $z=kx+y$ 得 $y=-kx+z$，当 $k=0$ 时，直线 $y=-kx+z=z$，此时取得最大值的最优解只有一个，不满足条件，当$-k>0$ 时，即直线 $y=-kx+z$ 的纵截距取得最大值时，z 取得最大值，此时直线与 $x=y$ 重合时，最大值有无数个，$-k=1$，解得 $k=-1$；当$-k<0$ 时，目标函数的最优解只有一个，不满足题意.故答案为-1.

14.2 【解析】因为 $3\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{5}>0$，所以 $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，又因为$(3\sin\alpha-\cos\alpha)^2=5$，所以 $9\sin^2\alpha-6\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=5$，所以 $\frac{9\sin^2\alpha-6\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=5$，所以$\frac{9\tan^2\alpha-6\tan\alpha+1}{1+\tan^2\alpha}=5$，$2\tan^2\alpha-3\tan\alpha-2=0$，所以 $\tan\alpha=2$ 或 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$（舍）.

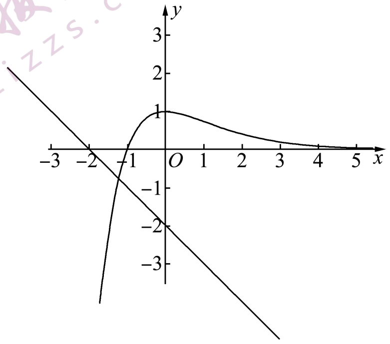
15.$\sqrt{5}+1$ 【解析】由三角不等式可得$|z-2|=|(z-i)-(2-i)|\leqslant|z-i|+|2-i|=1+\sqrt{5}$，即$|z-2|$的最大值为$\sqrt{5}+1$.

16.$\left[\frac{3}{4e^2},\frac{2}{3e}\right)$ 【解析】$f(x)<g(x)$等价于$(kx+2k)e^x-x-1<0$，即 $k(x+2)<\frac{x+1}{e^x}$，设 $\varphi(x)=\frac{x+1}{e^x}$，$h(x)=k(x+2)$，则上面不等式转化为 $h(x)<\varphi(x)$，直线 $h(x)=k(x+2)$恒过定点$(-2,0)$，要使 $f(x)<g(x)$的解集中恰有两个整数，只需 $\varphi(x)$的图象在 $h(x)$的图象上方所对应的 x 的取值范围中恰好有两个整数解.因为 $\varphi'(x)=\frac{e^x-(x+1)\cdot e^x}{(e^x)^2}=\frac{-x}{e^x}$，所以 $x\in(-\infty,0)$时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$单调递增，$x\in(0,+\infty)$时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$单调递减，所以 $\varphi(x)_{\max}=\varphi(0)=1$，且 $\varphi(-1)=0$，当 $x\to-\infty$时，$\varphi(x)\to-\infty$，$x\to+\infty$时，$\varphi(x)\to 0$，

根据上述结论作出 $\varphi(x)$的图象如下图所示：

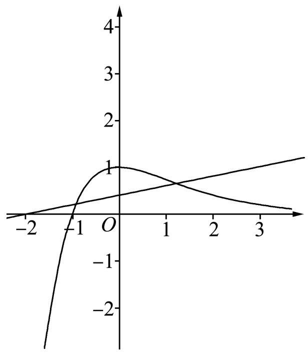


当 $k\leqslant 0$ 时，作出 $\varphi(x)$，$h(x)$的图象如下图所示：



从图中可以看出，当 $x\in[-1,+\infty)$时，$\varphi(x)$的图象恒在 $h(x)$的图象上方，所以 $h(x)<\varphi(x)$恒成立，所有的 x 的取值范围中，整数解有无穷多个，不符合题意；

当 $k>0$ 时，作出 $\varphi(x)$，$h(x)$的图象如图所示：



从图象可得，要使 $\varphi(x)$ 的图象在 $h(x)$ 的图象上方所对应的 x 的取值范围中恰好有两个整数解，只需满足：

$\begin{cases}\varphi(1)>h(1),\\ \varphi(2)\leqslant h(2),\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}\dfrac{2}{e}>3k,\\ \dfrac{3}{e^2}\leqslant 4k,\end{cases}$ 解得 $\dfrac{3}{4e^2}\leqslant k<\dfrac{2}{3e}$. 综上，$\dfrac{3}{4e^2}\leqslant k<\dfrac{2}{3e}$.

17.【解析】(1) $f(x)=4\cos x\cdot\cos\left(x-\dfrac{2\pi}{3}\right)+1=2\sqrt{3}\cos x\sin x-2\cos^2 x+1=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，…………… 3 分

所以 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，令 $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$，…………………………………………… 4 分

则 $\dfrac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{5\pi}{6}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以函数的单调递减区间为 $\left[\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\dfrac{5\pi}{6}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$. …………………… 6 分

(2)因为 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{4}\right]$，所以 $2x-\dfrac{\pi}{6}\in\left[-\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$，…………………………………………… 8 分

所以 $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left[-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$，…………………………………………………… 9 分

所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值为 $\sqrt{3}$，最小值为 -2，…………………………………… 10 分

即 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的值域为 $[-2,\sqrt{3}]$. ………………………………………………… 12 分

18.【解析】(1)根据题意可知，

当 $0<x<20$ 时，$L(x)=800x-10x^2-500x-1\,000=-10x^2+300x-1\,000$，…………………………… 2 分

当 $x\geqslant 20$ 时，$L(x)=800x-801x-\dfrac{400}{x}+2\,000-1\,000=1\,000-\left(x+\dfrac{400}{x}\right)$，…………………………… 4 分

所以 $L(x)=\begin{cases}-10x^2+300x-1\,000, & 0<x<20,\\ 1\,000-\left(x+\dfrac{400}{x}\right), & x\geqslant 20.\end{cases}$ ………………………………………………… 5 分

(2)当 $0<x<20$ 时，$L(x)=-10x^2+300x-1\,000$，

∴当 $x=15$ 时，$L(x)$ 取得最大值 $1\,250$；…………………………………………………………………… 8 分

当 $x\geqslant 20$ 时，$L(x)=1\,000-\left(x+\dfrac{400}{x}\right)\leqslant 1\,000-2\sqrt{x\cdot\dfrac{400}{x}}=960$，

当且仅当 $x=\dfrac{400}{x}$ 即 $x=20$ 时取等号. ………………………………………………………………… 10 分

∴综上，当 $x=15$ 时，$L(x)$ 取得最大值 $1\,250$.

即 2020 年产量为 15 百辆时，企业所获利润最大，最大利润为 1 250 万元. ………………………………… 12 分

19.【解析】(1)由题可得 $f'(x)=3x^2+2ax+b$，………………………………………………………… 1 分

由题意得 $\begin{cases}f(1)=2+a+b=2,\\ f'(1)=3+2a+b=4,\end{cases}$ ……………………………………………………………… 2 分

解得 $a=1,b=-1$，…………………………………………………………………………………… 3 分

所以 $f(x)=x^3+x^2-x+1$，$f'(x)=3x^2+2x-1$，………………………………………………………… 4 分

由 $f'(x)>0$ 得 $x<-1$ 或 $x>\frac{1}{3}$，

由 $f'(x)<0$ 得 $-1<x<\frac{1}{3}$，…………………………………………………………………… 5 分

所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $\left(-1,\frac{1}{3}\right)$，单调递增区间是 $(-\infty,-1)$，$\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$. …………………… 6 分

(2)因为 $g(x)=f(x)-m=x^3+x^2-x+1-m$，$g'(x)=f'(x)=3x^2+2x-1$，…………………… 7 分

由(1)可知，$g(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值，在 $x=\frac{1}{3}$ 处取得极小值，

$g(x)$ 的单调递减区间是 $\left(-1,\frac{1}{3}\right)$，单调递增区间是 $(-\infty,-1)$，$\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$. …………………… 8 分

依题意，要使 $g(x)$ 有三个零点，则 $\begin{cases} g(-1)>0, \\ g\left(\frac{1}{3}\right)<0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} g(-1)=2-m>0, \\ g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{22}{27}-m<0, \end{cases}$ …………………………………………………… 10 分

解得 $\frac{22}{27}<m<2$，经检验，$g(-2)=m-1<0$，$g(2)=m+11>0$，…………………………… 11 分

根据零点存在定理，可以确定函数有三个零点，所以 m 的取值范围为 $\left(\frac{22}{27},2\right)$. …………………… 12 分

20.【解析】(1)由 $4^x-9\times 2^{x+1}+113=4^x-18\times 2^x+113=(2^x-9)^2+32>0$，可知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

由 $\log_3(4^x-9\times 2^{x+1}+113)\leqslant 4$，得 $4^x-18\times 2^x+32\leqslant 0$. …………………………… 2 分

令 $t=2^x$，则 $t^2-18t+32\leqslant 0$，解得 $2\leqslant t\leqslant 16$，由 $2\leqslant 2^x\leqslant 16$，得 $1\leqslant x\leqslant 4$，…………………… 4 分

所以不等式 $f(x)\leqslant 4$ 的解集为 $\{x|1\leqslant x\leqslant 4\}$. …………………………………………………… 5 分

(2)由题意，$\forall x_1\in[1,3]$，有 $f(x_1)\leqslant g(x_2)$，所以 $g(x_2)\geqslant f(x)_{\max}$. …………………………… 7 分

因为 $f(x)=\log_3[(2^x-9)^2+32]$，$\forall x_1\in[1,3]$，有 $2\leqslant 2^x\leqslant 8$，所以 $f(x)_{\max}=4$，…………………… 8 分

$\exists x_2\in[0,2]$，使得 $g(x_2)\geqslant 4$，只要 $g(x)_{\max}\geqslant 4$ 即可. …………………………………………… 9 分

函数 $g(x)$ 的图象开口向上，且它的对称轴方程为 $x=m$.

①当 $m\leqslant 1$ 时，$g(x)_{\max}=g(2)=4-4m+5m\geqslant 4$，所以 $0\leqslant m\leqslant 1$；…………………………… 10 分

②当 $m>1$ 时，$g(x)_{\max}=g(0)=5m\geqslant 4$，解得 $m\geqslant\frac{4}{5}$，所以 $m>1$. …………………………… 11 分

综上所述，m 的取值范围为 $[0,+\infty)$. …………………………………………………………… 12 分

21.【解析】(1)由 $f(x)\leqslant mx$ 得 $2x-\sin x\leqslant mx$，即 $m\geqslant 2-\frac{\sin x}{x}$，其中 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，…………………… 2 分

令 $h(x)=2-\frac{\sin x}{x}$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，得 $h'(x)=\frac{\sin x-x\cos x}{x^2}$，

设 $\varphi(x)=\sin x-x\cos x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，

则 $\varphi'(x)=x\sin x>0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，

所以 $\varphi(x)>\varphi(0)=\sin 0-0\times\cos 0=0$，所以 $h'(x)>0$，

所以 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，所以 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有最大值，

$h(x)_{\max}=h\left(\frac{\pi}{2}\right)=2-\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=2-\frac{2}{\pi}$，…………………………………………………… 4 分

所以 m 的取值范围为 $\left[2-\frac{2}{\pi},+\infty\right)$. …………………………………………………… 5 分

(2) $f(x_1)=f(x_2)$，即 $2x_1-\sin x_1-a\ln x_1=2x_2-\sin x_2-a\ln x_2$，

整理为 $a(\ln x_2-\ln x_1)=2(x_2-x_1)-(\sin x_2-\sin x_1)$，…………………………………… 6 分

令 $u(x)=x-\sin x, x>0$，

则 $u'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，所以 $u(x)=x-\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

不妨设 $x_1<x_2$，所以 $x_1-\sin x_1<x_2-\sin x_2$，从而 $x_2-x_1>\sin x_2-\sin x_1$，

所以 $a(\ln x_2-\ln x_1)=2(x_2-x_1)-(\sin x_2-\sin x_1)>2(x_2-x_1)-(x_2-x_1)=x_2-x_1$，………… 7 分

所以 $a>\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}$.…………………………………… 8 分

下面证明 $\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}>\sqrt{x_1x_2}$，即证明 $\dfrac{\frac{x_2}{x_1}-1}{\ln\frac{x_2}{x_1}}>\sqrt{\dfrac{x_2}{x_1}}$，…………………………………… 9 分

令 $\dfrac{x_2}{x_1}=t$，即证明 $\dfrac{t-1}{\ln t}>\sqrt{t}$，其中 $t>1$，只要证明 $\dfrac{t-1}{\sqrt{t}}-\ln t>0$.…………………………………… 10 分

设 $v(t)=\dfrac{t-1}{\sqrt{t}}-\ln t(t>1)$，则 $v'(t)=\dfrac{(\sqrt{t}-1)^2}{2t\sqrt{t}}>0$，

所以 $v(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $v(t)>v(1)=\dfrac{1-1}{\sqrt{1}}-\ln 1=0$，…………………………………… 11 分

所以 $\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}>\sqrt{x_1x_2}$，

所以 $a>\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}>\sqrt{x_1x_2}$，

所以 $x_1x_2<a^2$.…………………………………… 12 分

22.【解析】(1) 曲线 C_1 的参数方程消参得 $x^2+y^2-6x=0$，即 $\rho^2=6\rho\cos\theta$，

则曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=6\cos\theta$，…………………………………… 2 分

曲线 C_2 的参数方程消参得 $x^2+y^2-2y=0$，即 $\rho^2=2\rho\sin\theta$，则曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta$，………… 4 分

射线 OM 的极坐标方程为 $\theta=\dfrac{\pi}{3}(\rho\geqslant 0)$，则其直角坐标方程为 $y=\sqrt{3}x(x\geqslant 0)$.…………………… 5 分

(2) 将 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 代入圆 C_1 和圆 C_2 的极坐标方程得 $P\left(3,\dfrac{\pi}{3}\right)$，…………………………………… 7 分

$Q\left(\sqrt{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$，…………………………………… 9 分

所以 $|OP|\cdot|OQ|=3\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$.…………………………………… 10 分

23.【解析】(1) $f(x)=|x-2|+|x+1|$，

不等式 $f(x)>5$ 等价于 $\begin{cases}x<-1,\\-2x+1>5\end{cases}$ …………………………………… 1 分

或 $\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 2,\\3>5\end{cases}$ …………………………………… 2 分

或 $\begin{cases}x>2,\\2x-1>5,\end{cases}$ …………………………………… 3 分

解得 $x<-2$ 或 $x>3$.…………………………………… 4 分

故不等式 $f(x)>5$ 的解集为 $(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$.…………………………………… 5 分

(2) $f(x)=|x-2|+|x+1|\geqslant|(x-2)-(x+1)|=3$.…………………………………… 8 分

即 $f(x)_{\min}=3$，

若不等式 $f(x)\geqslant t$ 恒成立，即 $t\leqslant f(x)_{\min}=3$，…………………………………… 9 分

所以实数 t 的取值范围为 $(-\infty,3]$.…………………………………… 10 分