

秘密★启用前 【考试时间：3月10日 15:00 — 17:00】

## 2022年云南省第一次高中毕业生复习统一检测

# 理科数学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必用黑色碳素笔将自己的学校、姓名、准考证号、考场号、座位号填写在答题卡上，并认真核准条形码上的学校、准考证号、姓名、考场号、座位号，在规定的位罝贴好条形码及填涂准考证号。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一

项是符合题目要求的。

1. 设集合  $S = \{x \mid -2x \leq 2\}$ ,  $T = \{-2, -1, 0, 1\}$ , 则  $S \cap T =$

A.  $\{-2, -1\}$

B.  $\{-2, 1\}$

C.  $\{-1, 0, 1\}$

D.  $\{-2, -1, 0, 1\}$

2. 设  $i$  为虚数单位，则复数  $\frac{5}{i-2} =$

A.  $-2 - i$

B.  $2 - i$

C.  $2 + i$

D.  $\frac{5}{4} - \frac{1}{4}i$

3. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \leq 0, \\ \sin \frac{\pi x}{2}, & x > 0, \end{cases}$  则  $f[f(0)] =$

A.  $\frac{1}{2}$

B.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

理科数学试卷·第1页(共8页)



7. 若  $4^a = 0.8^b = \pi$ , 则

$0 < a < 1$     $b < 0$

A.  $ab < 0 < a+b$

B.  $a+b < 0 < ab$

C.  $a+b < ab < 0$

D.  $ab < a+b < 0$

8. 为得到函数  $y = \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x$  的图象, 只需要将函数  $y = 2 \sin 2x$  的图象

$= 2 \sin(2x - \frac{\pi}{3})$

A. 向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位

B. 向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位

C. 向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位

D. 向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位

$2(x - \frac{\pi}{6})$

9. 下列图形是某几何体的三视图 (正视图也称主视图, 侧视图也称左视图), 其中正视图与侧视图是两个全等的等腰三角形, 俯视图是面积等于  $4\pi$  的圆. 若该几何体的侧面展开图是个半圆, 则这个几何体的体积等于

A.  $\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$

B.  $\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$

C.  $8\sqrt{3}\pi$

D.  $4\sqrt{3}\pi$

$V = \frac{1}{3} Sh$

$= \frac{1}{3} 4\pi \cdot 2\sqrt{3}$

$= \frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$

正视图      侧视图

俯视图

10. 已知  $\triangle ABC$  的三个内角分别为  $A, B, C$ . 若  $\sin^2 C = 2\sin^2 A - 3\sin^2 B$ , 则  $\tan B$  的最大值为

A.  $\frac{\sqrt{5}}{3}$

B.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$

C.  $\frac{11\sqrt{5}}{20}$

D.  $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

$C^2 = 2a^2 - 3b^2$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

$3b^2 = 2a^2 - c^2$

$3(a^2 + c^2 - 2ac \cos B) = 2a^2 - c^2$

$a^2 + 4c^2 - 6ac \cos B = 0$

$\geq 2ac - 6ac \cos B = 0$

已知抛物线  $M$  的顶点在原点，焦点在  $y$  轴负半轴上。经过抛物线  $M$  的焦点作直线与抛物线  $M$  相交于  $A, B$  两点。若  $|AB|=12$ ，线段  $AB$  的中点的纵坐标为  $-5$ ，则抛物线  $M$  的方程为

A.  $x^2 = -14y$

B.  $x^2 = -4y$

C.  $y^2 = -4x$

D.  $y^2 = -14x$

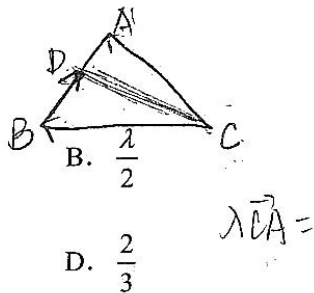
$x_1 + x_2 = 11$   
 $y_1 + y_2 + p = 12$   
 $2x_0$   
 $p = 2$   
 $\frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{p}{2} = 12$   
 $2y_0$

12. 在  $\triangle ABC$  中， $D$  是直线  $AB$  上的点。若  $2\vec{BD} = \vec{CB} + \lambda \vec{CA}$ ，记  $\triangle ACB$  的面积为  $S_1$ ，

$\triangle ACD$  的面积为  $S_2$ ，则  $\frac{S_1}{S_2} =$

A.  $\frac{\lambda}{6}$

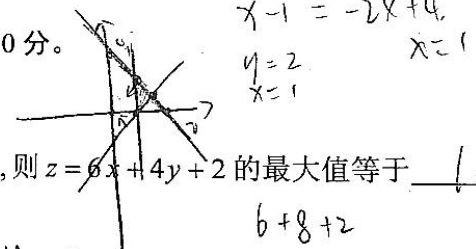
C.  $\frac{1}{3}$



$S_1 =$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若实数  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} y \geq x-1, \\ 2x+y-4 \leq 0, \\ x \geq 1, \end{cases}$  则  $z = 6x + 4y + 2$  的最大值等于 16.



14. 在篮球比赛中，罚球命中 1 次得 1 分，不中得 0 分。如果某运动员罚球命中的概率为  $\frac{7}{10}$ ，

设随机变量  $X$  表示该运动员罚球 1 次的得分，则随机变量  $10X + 13$  的数学期望

$E(10X + 13) =$  20.

$10E(X) + 13$

$7 + 13$

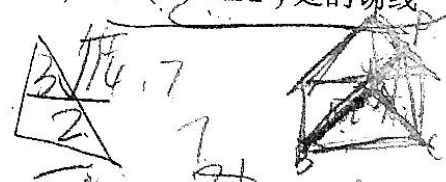
15. 在三棱锥  $P-ABC$  中， $AB \perp$  平面  $PAC$ ， $PA = PC = AC = AB$ ，三棱锥  $P-ABC$  的顶点

都在球  $O$  的球面上。若球  $O$  的表面积为  $84\pi$ ，则三棱锥  $P-ABC$  的体积为  $\frac{3\sqrt{21}}{2}$ .

$4\pi R^2$   
 $R = \sqrt{21}$   
 $\frac{3\sqrt{21}}{2}$

16. 若曲线  $y = \frac{(x-3)(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)}{x^2 + \ln x - 3} + 4\ln(3x+1)$  在点  $(1, 8\ln 2)$  处的切线

与直线  $2x = ay - 2$  平行，则  $a =$   $\frac{1}{2}$ .



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

下表是某高校 2017 年至 2021 年的毕业生中，从事大学生村官工作的人数：

年份	2017	2018	2019	2020	2021
年份代码 $x$	1	2	3	4	5
$y$ (单位：人)	2	4	4	7	8

2022 2023  
6 7

经过相关系数的计算和绘制散点图分析，我们发现  $y$  与  $x$  的线性相关程度很高。

请建立  $y$  关于  $x$  的回归方程  $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ ，并据此回归方程预测该校 2023 年的毕业生中，去从事大学生村官工作的人数。

附：
$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

10 40  
~~2+8+12+10+8+40~~  
90 - ~~53.5~~  
75



$$T(-2x) / (\ln x)$$

$$= -4x \ln x - 2x^2$$

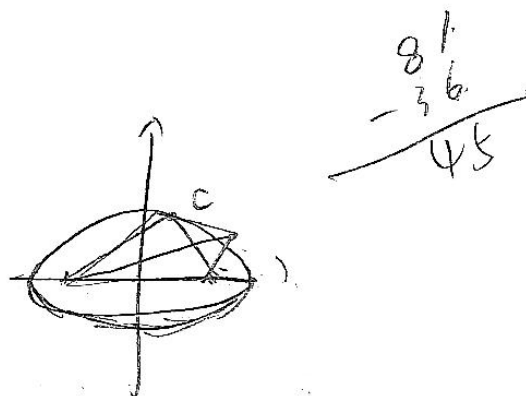
20. (12分)

已知函数  $f(x) = (2a+1)x^2 - 2x^2 \ln x - 4$ ,  $e$  是自然对数的底数,  $\forall x > 0, e^x > x+1$ .

(1) 求  $f(x)$  的单调区间;

(2) 记  $p: f(x)$  有两个零点;  $q: a > \ln 2$ . 求证:  $p$  是  $q$  的充要条件.

要求: 先证充分性, 再证必要性.



21. (12分)

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知  $F_1(-6, 0)$ ,  $F_2(6, 0)$ ,  $F(2, 0)$ . 动点  $C$  与  $F_1, F_2$  的距离的和等于 18, 动点  $D$  满足  $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DF_1} + \overrightarrow{DF_2} = \vec{0}$ . 动点  $D$  的轨迹与  $x$  轴交于  $A, B$  两点,  $A$  的横坐标小于  $B$  的横坐标,  $M$  是动点  $D$  的轨迹上异于  $A, B$  的动点, 直线  $AM$  与直线  $x=3$  交于  $E$  点, 设直线  $AM$  的斜率为  $k$ ,  $BE$  的中点为  $T$ , 点  $M$  关于直线  $FT$  的对称点为  $P$ .

(1) 求动点  $D$  的轨迹方程;

(2) 是否存在  $k$ , 使  $P$  的纵坐标为 0? 若存在, 求出使  $P$  的纵坐标为 0 的所有  $k$  的值;

若不存在, 请说明理由.

(二) 选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。作答时用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑。

22. [选修 4-4：坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系  $xOy$  中，曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 2\cos\alpha, \\ y = 2 + 2\sin\alpha \end{cases}$  ( $\alpha$  为参数)：以原点  $O$  为

极点， $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系。已知  $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，射线  $l_1$  的极坐标方程为  $\theta = \beta$ ，

射线  $l_2$  的极坐标方程为  $\theta = \beta + \frac{\pi}{3}$ 。

(1) 直接写出曲线  $C$  的极坐标方程；

(2) 若  $l_1$  与  $C$  交于  $O$ 、 $A$  两点， $l_2$  与  $C$  交于  $O$ 、 $B$  两点，求  $|OA| + |OB|$  的取值范围。

$$\leq |x+1| + |x-2|$$

$$|a-b| \leq$$

23. [选修 4-5：不等式选讲] (10 分)

已知函数  $f(x) = |x+1| + |x-2|$ ， $g(x) = |x+2| - |x-1|$ 。

(1) 求证： $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ ， $f(x) - g(x) \geq 0$ ；

$$\begin{array}{l} x+1 + x-2 \\ x+1 - x+2 \end{array} \quad \begin{array}{l} x+2 - x+1 \\ x+2 + x-1 \end{array}$$

(2) 已知  $a$  为常数， $f(x) \leq g(x)$  有实数解。若  $m > 0$ ， $n \geq 0$ ，且  $2m + n = a$ ，

$$-x-1 - x+2$$

求  $\frac{1}{m} + \frac{1}{m+n}$  的最小值。

$$(x+2) - (x-1)$$

$$(x+2) - (-x+1)$$

$$-(x+2) - (-x+1)$$

$$(2m+n) \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{m+n} \right)$$

$$\frac{1}{2} \left[ 2 + \frac{2m}{m+n} + \frac{n}{m} + \frac{n}{m+n} \right]$$

$$\frac{m}{m+n} = \frac{m+n}{m+n}$$

(二) 选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。作答时用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑。

22. [选修 4-4：坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系  $xOy$  中，曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 2 \cos \alpha, \\ y = 2 + 2 \sin \alpha \end{cases}$  ( $\alpha$  为参数)。以原点  $O$  为

极点， $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系。已知  $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，射线  $l_1$  的极坐标方程为  $\theta = \beta$ 。

射线  $l_2$  的极坐标方程为  $\theta = \beta + \frac{\pi}{3}$ 。

(1) 直接写出曲线  $C$  的极坐标方程：

(2) 若  $l_1$  与  $C$  交于  $O$ 、 $A$  两点， $l_2$  与  $C$  交于  $O$ 、 $B$  两点，求  $|OA| + |OB|$  的取值范围。

$$3 \sqrt{\quad}$$

23. [选修 4-5：不等式选讲] (10 分)

已知函数  $f(x) = |x+1| + |x-2|$ ， $g(x) = |x+2| - |x-1|$ 。

(1) 求证： $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ ， $f(x) - g(x) \geq 0$ ；

(2) 已知  $a$  为常数， $f(x) \leq a \leq g(x)$  有实数解。若  $m > 0$ ， $n \geq 0$ ，且  $2m + n = a$ 。

求  $\frac{1}{m} + \frac{1}{m+n}$  的最小值。

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m+n} \geq$$

$$\frac{m+n}{3m} + \frac{m}{3(m+n)}$$

$$m + \frac{2}{m+n} = 3$$

$$\frac{m}{3} \quad \frac{1}{9}$$



## 2022年云南省第一次高中毕业生复习统一检测

# 理科数学参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。

1. C      2. A      3. C      4. B      5. B      6. D  
7. C      8. D      9. A      10. B      11. B      12. D

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 16;      14. 20;      15.  $18\sqrt{3}$ ;      16.  $-\frac{2}{3}$ .

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。

17. (12 分)

解：依据题意得：

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3,$$

$$\bar{y} = \frac{2+4+4+7+8}{5} = 5, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 = 10,$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) &= (-2) \times (-3) + (-1) \times (-1) + 0 \times (-1) + 1 \times 2 + 2 \times 3 \\ &= 15, \dots\dots\dots 6 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x} = 5 - \frac{3}{2} \times 3 = \frac{1}{2}.$$

∴ 所求回归方程为  $\hat{y} = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ .  $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

当  $x=7$  时,  $\hat{y} = \frac{3}{2} \times 7 + \frac{1}{2} = 11$ .

所以预测该校 2023 年的毕业生中, 去从事大学生村官工作的人数大约为 11 人.  $\dots 12 \text{ 分}$

18. (12分)

解: (1)  $\because 4a_n - 2S_n - 3^n + 1 = 0,$

$$\therefore 2S_n = 4a_n - 3^n + 1.$$

$$\therefore 2S_{n+1} = 4a_{n+1} - 3^{n+1} + 1.$$

$\because$  数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n,$

$$\therefore 2S_{n+1} - 2S_n = 2(S_{n+1} - S_n) = 2a_{n+1} = 4a_{n+1} - 3^{n+1} + 1 - 4a_n + 3^n - 1. \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

$$\therefore a_{n+1} - 3^{n+1} = 2(a_n - 3^n).$$

$$\therefore a_n - 3^n = (a_1 - 3) \times 2^{n-1}.$$

当  $n=1$  时, 由  $4a_n - 2S_n - 3^n + 1 = 0$  和  $S_1 = a_1$  得  $4a_1 - 2S_1 - 3 + 1 = 4a_1 - 2a_1 - 2 = 0,$

解方程得  $a_1 = 1.$

$$\therefore a_n - 3^n = (a_1 - 3) \times 2^{n-1} = -2 \times 2^{n-1} = -2^n.$$

$\therefore$  数列  $\{a_n - 3^n\}$  的通项公式为  $a_n - 3^n = -2^n. \dots\dots\dots 6 \text{分}$

(2) 由 (1) 知:  $a_n - 3^n = -2^n.$

$$\therefore b_n = a_n - 3^n + \log_2 |a_n - 3^n| = -2^n + \log_2 2^n = n - 2^n. \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

$$\therefore b_{2n-1} = 2n - 1 - 2^{2n-1}.$$

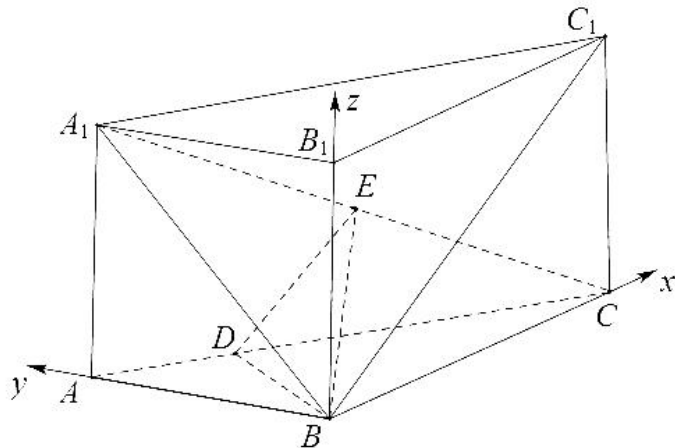
$$\therefore T_n = [1 + 3 + \dots + (2n - 1)] - (2 + 2^3 + 2^5 + \dots + 2^{2n-1}) \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(1 + 2n - 1)n}{2} - \frac{2(1 - 2^{2n})}{1 - 2^2} \\ &= n^2 + \frac{2}{3} - \frac{2^{2n+1}}{3}. \dots\dots\dots 12 \text{分} \end{aligned}$$

19. (12分)

(1) 证明: 由已知得  $AB$ 、 $BC$ 、 $BB_1$  两两互相垂直, 分别以射线  $BC$ ,  $BA$ ,  $BB_1$  为  $x$  轴

正半轴,  $y$  轴正半轴,  $z$  轴正半轴建立如图所示的空间直角坐标系  $B-xyz$ ,



设  $AB = a$ , 由  $A_1A = AB = \frac{\sqrt{2}}{2}BC$  得  $B(0,0,0)$ ,  $C(\sqrt{2}a,0,0)$ ,  $C_1(\sqrt{2}a,0,a)$ ,

$A_1(0,a,a)$ ,  $E(\frac{\sqrt{2}a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ ,  $\overrightarrow{BE} = (\frac{\sqrt{2}a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ ,  $\overrightarrow{A_1C} = (\sqrt{2}a, -a, -a)$ .

$$\therefore \overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{BE} = \sqrt{2}a \times \frac{\sqrt{2}a}{2} + (-a) \times \frac{a}{2} + (-a) \times \frac{a}{2} = 0,$$

$\therefore \overrightarrow{A_1C} \perp \overrightarrow{BE}$ , 即  $A_1C \perp BE$ . .....4分

又  $\because BE \subset$  平面  $EBD$ ,  $DE \subset$  平面  $EBD$ ,  $BE \cap DE = E$ ,  $A_1C \perp ED$ ,

$\therefore A_1C \perp$  平面  $EBD$ . .....6分

(2) 解: 由 (1) 知:  $\overrightarrow{A_1C} = (\sqrt{2}a, -a, -a)$  是平面  $EBD$  的一个法向量,

$$\overrightarrow{BA_1} = (0, a, a), \quad \overrightarrow{BC_1} = (\sqrt{2}a, 0, a).$$

设平面  $A_1BC_1$  的一个法向量为  $\vec{n} = (x, y, z)$ , 则  $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BA_1} = x \times 0 + ay + az = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC_1} = \sqrt{2}ax + y \times 0 + az = 0. \end{cases}$

取  $z = 1$ , 得  $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $y = -1$ .

$\therefore \vec{n} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, 1)$  是平面  $A_1BC_1$  的一个法向量. ....9分

设平面  $A_1BC_1$  与平面  $EBD$  所成二面角的平面角大小为  $\theta$ ，则  $0 < \theta < \pi$ ，且

$$|\cos \theta| = \frac{|\overrightarrow{A_1C} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{A_1C}| |\vec{n}|} = \frac{a}{\sqrt{\frac{10}{4}} \times \sqrt{4a}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \therefore \sin \theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$\therefore$  平面  $A_1BC_1$  与平面  $EBD$  所成二面角的正弦值为  $\frac{3\sqrt{10}}{10}$  .....12分

20. (12分)

(1) 解:  $\because f(x) = (2a+1)x^2 - 2x^2 \ln x - 4$ ,

$\therefore f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ,  $f'(x) = 4x(a - \ln x)$  .....2分

$\therefore$  当  $0 < x < e^a$  时,  $f'(x) > 0$ ,

$\therefore f(x)$  在  $(0, e^a)$  上是增函数;

$\therefore$  当  $x > e^a$  时,  $f'(x) < 0$ ,

$\therefore f(x)$  在  $(e^a, +\infty)$  上是减函数.

$\therefore f(x)$  的单调递增区间为  $(0, e^a]$ ; 单调递减区间为  $[e^a, +\infty)$ . .....4分

(2) 证明: 充分性.

由 (1) 知, 当  $x = e^a$  时,  $f(x)$  取得最大值,

即  $f(x)$  的最大值为  $f(e^a) = e^{2a} - 4$  .....6分

由  $f(x)$  有两个零点, 得  $e^{2a} - 4 > 0$ , 解得  $a > \ln 2$ .

$\therefore a > \ln 2$ . .....8分

下面证必要性.

$\because a > \ln 2, \therefore e^{2a} > 4. \therefore f(e^a) = e^{2a} - 4 > 0$ .

$\because a > \ln 2 > 0, \forall x > 0, e^x > x + 1, \therefore e^{2a} > 2a + 1 > 2a$ .

$\therefore f(e^{-a}) = e^{-2a}(4a+1) - 4 = \frac{4a+1}{e^{2a}} - 4 < \frac{4a+1}{2a} - 4 = \frac{1}{2a} - 2 < \frac{1}{2 \ln 2} - 2 = \frac{1}{\ln 4} - 2 < 0$ .

$\therefore \exists x_1 \in (e^{-a}, e^a)$ , 使  $f(x_1) = 0$ ; .....10分

又  $\because f(e^{a+1}) = -e^{2a+2} - 4 < 0$ ,  $\therefore \exists x_2 \in (e^a, e^{a+1})$ , 使  $f(x_2) = 0$ .

$\because f(x)$  在  $(0, e^a]$  上单调递增, 在  $[e^a, +\infty)$  上单调递减,

$\therefore \forall x, x \neq x_1$  且  $x \neq x_2$ , 易得  $f(x) \neq 0$ .

$\therefore$  当  $a > \ln 2$  时,  $f(x)$  有两个零点. ....12分

21. (12分)

解: (1)  $\because F_1(-6, 0), F_2(6, 0)$ ,  $\therefore |F_1F_2| = 12 < 18$ .

又  $\because$  动点  $C$  与  $F_1, F_2$  两点的距离之和为 18,

$\therefore$  动点  $C$  的轨迹是以  $F_1, F_2$  为焦点, 长轴长为 18 的椭圆.

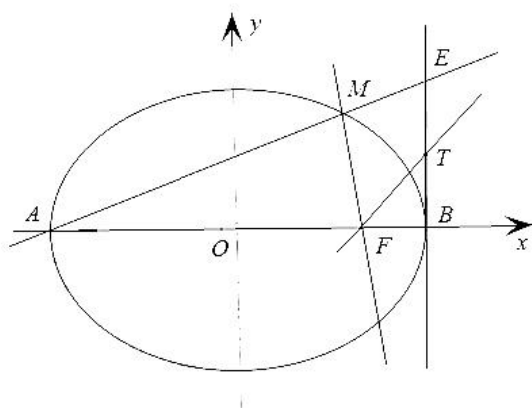
设  $C(x_0, y_0)$ , 则  $\frac{x_0^2}{81} + \frac{y_0^2}{45} = 1$ . ....2分

设  $D(x, y)$ , 由  $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DF_1} + \overrightarrow{DF_2} = \vec{0}$  得  $\begin{cases} x_0 = 3x, \\ y_0 = 3y. \end{cases}$

$\therefore \frac{9x^2}{81} + \frac{9y^2}{45} = 1$  即  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ .

$\therefore$  动点  $D$  的轨迹方程为  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ . ....4分

(2) 存在  $k$ , 使  $P$  的纵坐标为 0, 且  $k$  的取值范围为  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ .



理科数学参考答案及评分标准·第5页(共8页)

由已知得  $A(-3,0)$ ,  $B(3,0)$ ,  $k \neq 0$ , 直线  $AM$  的方程为  $y = k(x+3)$ .

$$\text{由 } \begin{cases} y = k(x+3), \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \end{cases} \text{ 得 } (5+9k^2)x^2 + 54k^2x + 81k^2 - 45 = 0.$$

$$\therefore \Delta = (54k^2)^2 - 4(5+9k^2)(81k^2 - 45) = 900 > 0. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{由已知得 } -3x_M = \frac{81k^2 - 45}{5+9k^2}, \text{ 解得 } x_M = \frac{15-27k^2}{5+9k^2}.$$

$$\therefore y_M = k\left(\frac{15-27k^2}{5+9k^2} + 3\right) = \frac{30k}{5+9k^2}.$$

$$\therefore M\left(\frac{15-27k^2}{5+9k^2}, \frac{30k}{5+9k^2}\right).$$

$$\text{解 } \begin{cases} y = k(x+3), \\ x = 3 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x = 3, \\ y = 6k. \end{cases}$$

$$\therefore E(3, 6k).$$

由  $BE$  的中点为  $T$ , 得  $T(3, 3k)$ . \dots\dots\dots 9 分

$$\therefore \overrightarrow{FB} = (1, 0), \overrightarrow{FT} = (1, 3k), \overrightarrow{FM} = \left(\frac{5-45k^2}{5+9k^2}, \frac{30k}{5+9k^2}\right) = \frac{5}{5+9k^2}(1-9k^2, 6k).$$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FT} \rangle = \frac{\overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{FT}}{|\overrightarrow{FB}| |\overrightarrow{FT}|} = \frac{1}{\sqrt{1+9k^2}},$$

$$\cos \langle \overrightarrow{FM}, \overrightarrow{FT} \rangle = \frac{\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FT}}{|\overrightarrow{FM}| |\overrightarrow{FT}|} = \frac{1-9k^2+18k^2}{\sqrt{1+9k^2} \times \sqrt{(1-9k^2)^2+36k^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+9k^2}},$$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FT} \rangle = \cos \langle \overrightarrow{FM}, \overrightarrow{FT} \rangle.$$

$$\text{又 } \because 0 \leq \langle \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FT} \rangle \leq \pi, \quad 0 \leq \langle \overrightarrow{FM}, \overrightarrow{FT} \rangle \leq \pi,$$

$$\therefore \langle \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FT} \rangle = \langle \overrightarrow{FM}, \overrightarrow{FT} \rangle.$$

$\therefore \angle MFT = \angle BFT$ , 即  $FT$  平分  $\angle MFB$ .

∴ 直线  $FM$  与直线  $FB$  关于直线  $FT$  对称. ....11 分

∴ 点  $P$  在直线  $FB$  上, 即点  $P$  在  $x$  轴上.

∴  $\forall k \neq 0$ ,  $P$  的纵坐标为 0. ....12 分

22. (10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

解: (1) 曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho = 4\sin\theta$ . ....4 分

(2) 当  $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$  时,

将  $\theta = \beta$  代入  $\rho = 4\sin\theta$  得  $\rho = 4\sin\beta$ , 即  $|OA| = 4\sin\beta$ .

将  $\theta = \beta + \frac{\pi}{3}$  代入  $\rho = 4\sin\theta$  得  $\rho = 4\sin(\beta + \frac{\pi}{3}) = 2\sin\beta + 2\sqrt{3}\cos\beta$ ,

即  $|OB| = 2\sin\beta + 2\sqrt{3}\cos\beta$ .

∴  $|OA| + |OB| = 6\sin\beta + 2\sqrt{3}\cos\beta = 4\sqrt{3}\sin(\beta + \frac{\pi}{6})$ . ....8 分

∵  $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,

∴  $\frac{\pi}{6} < \beta + \frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3}$ .

∴  $\frac{1}{2} < \sin(\beta + \frac{\pi}{6}) \leq 1$ ,  $2\sqrt{3} < 4\sqrt{3}\sin(\beta + \frac{\pi}{6}) \leq 4\sqrt{3}$ .

∴  $|OA| + |OB|$  的取值范围为  $(2\sqrt{3}, 4\sqrt{3})$ . .... 10 分

23. (10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

(1) 证明: ∵  $f(x) = |x+1| + |x-2| \geq |(x+1) - (x-2)| = 3$ , 且  $f(2) = 3$ ,

∴  $f(x)$  的最小值为 3. ....2 分

∵  $g(x) = |x+2| - |x-1| \leq |(x+2) - (x-1)| = 3$ , 且  $g(2) = 3$ ,

∴  $g(x)$  的最大值为 3.

∴  $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ ,  $f(x) \geq g(x)$ , 即  $f(x) - g(x) \geq 0$ . ....4 分

(2) 解：由(1)知： $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ ， $f(x)$ 的最小值为3， $g(x)$ 的最大值为3.

根据已知设 $x_0$ 是 $f(x) \leq a \leq g(x)$ 的一个解，则 $3 \leq f(x_0) \leq a \leq g(x_0) \leq 3$ .

$\therefore a = 3, 2m + n = 3$ . .....5分

$\because m > 0, n \geq 0, m + (m + n) \geq 2\sqrt{m(m+n)}, \frac{1}{m} + \frac{1}{m+n} \geq 2\sqrt{\frac{1}{m} \times \frac{1}{m+n}},$

$\therefore \frac{1}{m} + \frac{1}{m+n} = \frac{1}{3} \times (2m+n) \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{m+n} \right)$

$= \frac{1}{3} [m + (m+n)] \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{m+n} \right) \geq \frac{4}{3}$ . .....9分

当 $m = \frac{3}{2}, n = 0$ 时， $\frac{1}{m} + \frac{1}{m+n} = \frac{4}{3}$ .

$\therefore \frac{1}{m} + \frac{1}{m+n}$ 的最小值为 $\frac{4}{3}$ . .....10分

请注意：以上参考答案与评分标准仅供阅卷时参考，其他答案请参考评分标准酌情给分.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

