绝密★启用前（新高考卷）

数学参考答案

1.【答案】C

【解析】$\frac{z}{1+i}=1-\frac{1}{i}=1+i$，$z=(1+i)^2=2i$，$\bar{z}=-2i$，$|\bar{z}|=2$.

2.【答案】D

【解析】$N=\{x|x<0或x>1\}$，所以 $M\cap N=\{-2,-1,2\}$.

3.【答案】A

【解析】因为向量 $\boldsymbol{e}_1=(0,1)$，$\boldsymbol{e}_2=(1,0)$，所以 $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2=(-1,2)$，

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\times(-1)+2\times2=1$.

4.【答案】D

【解析】$y=\cos(2x+\frac{\pi}{2})=-\sin 2x$，$y=\cos(2x-\frac{\pi}{2})=\sin 2x$，$y=\sin(2x+\frac{\pi}{2})=\cos 2x$，

$y=\sin(2x-\frac{\pi}{2})=-\cos 2x$，只有 $y=-\cos 2x$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 单调递增，故 D 正确.

5.【答案】A

【解析】圆 $x^2+y^2-4y+3=0$ 的标准方程为 $x^2+(y-2)^2=1$，圆心坐标为 $(0,2)$，半径 $r=1$，

圆心到直线 $3x-4y-2=0$ 的距离为 $d=\frac{|2\times(-4)-2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$，所以圆上的点到该直线的距离的取值范围是 $[d-r,d+r]$，即 $[1,3]$，故 A 正确.

6.【答案】B

【解析】直六棱柱的各顶点都在同一球面上，则底面六边形的所有顶点都在同一个圆上，因为底面六边形的边长均为 2，所以底面六边形必为正六边形，且由几何关系易知底面所在圆的直径为 4，又因为直六棱柱的侧棱长为 2，故直六棱柱外接球的直径为 $\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，球半径 $R=\sqrt{5}$，所以球的表面积 $S=4\pi R^2=20\pi$.

7.【答案】C

【解析】根据题意可知 $a_m<\frac{a_0}{2^m}=\frac{100}{2^m}$，所以 $a_8<2a_8<\frac{100}{2^7}=\frac{100}{128}<1$，$a_7<\frac{100}{2^7}=\frac{100}{128}$，

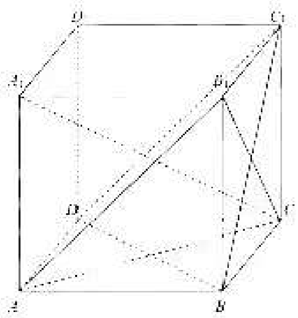
而 $2a_7<\frac{100}{2^6}=\frac{100}{64}$，故 $2a_7$ 可能大于 1，所以 m 可能取到的最大值为 7.

8.【答案】D

【解析】由 a，b 为正数，且 $\ln ab=\frac{2}{b}-a$ 可得 $a+\ln a=\frac{2}{b}+\ln\frac{1}{b}>\frac{1}{b}+\ln\frac{1}{b}$，因为函数 $f(x)=x+\ln x$ 单调递增，且 $f(a)>f(\frac{1}{b})$，所以 $a>\frac{1}{b}$，即 $ab>1$，所以 $\frac{2}{b}-a=\ln ab>0$，$ab<2$，故 $1<ab<2$；设 $a=b$，则 $2\ln a=\frac{2}{a}-a$，设 $g(x)=2\ln x+x-\frac{2}{x}$，则 $g'(x)=\frac{2}{x}+1+\frac{2}{x^2}>0$，$g(x)$ 单调递增，且 $g(1)=-1<0$，$g(2)=2\ln 2+1>0$，所以存在 $a\in(1,2)$ 使得 $g(a)=0$，所以存在 $\frac{a}{b}=1$ 使得 $\ln ab=\frac{2}{b}-a$ 成立.综上，D 正确.

9.【答案】AC

【解析】如图，易知 $AB_1 /\!/ DC_1$，且 $DC_1\subset$ 平面 BDC_1，所以 $AB_1 /\!/$ 平面 BDC_1，故 A 正确；若 $B_1C\perp$ 平面 BDC_1，则 $B_1C\perp DC_1$，故 $B_1C\perp AB_1$，显然 $\angle AB_1C\neq 90^\circ$，故 B 错误；因为 $ABCD$ 是正方形，故 $BD\perp AC$，且易知 $BD\perp AA_1$，所以 $BD\perp$ 平面 AA_1C，而 $BD\subset$ 平面 BDC_1，所以平面 $AA_1C\perp$ 平面 BDC_1，故 C 正确；计算可知点 A 到平面 BDC_1 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 D 错误.来源：高三答案公众号



10.【答案】ACD

【解析】去掉其中最小的和最大的两个数得到一组新样本数据的平均数可能与原数据的平均数相同，数据的方差变小，数据的中位数不变，数据的极差变小.

11.【答案】BC

【解析】因为 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$，$\tan\alpha=5\tan\beta$，故 $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}$，

$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}=5$，所以 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{5}{12}$，$\sin\beta\cos\alpha=\frac{1}{12}$，所以

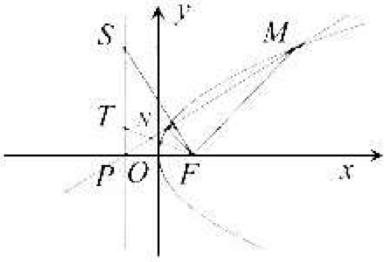
$\sin 2\alpha\sin 2\beta=4\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta=\frac{5}{36}$，

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{5}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$，又因为 $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{4}$，所以 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{6}$，故 B，C 正确.

12.【答案】ABD

【解析】由几何性质可知 $|MF|=|MS|$，$|NF|=|NT|$，且 $MS // NT$，所以 $\frac{|MF|}{|NF|}=\frac{|MS|}{|NT|}=\frac{|MP|}{|NP|}$，

故 $|MF|\cdot|NP|=|NF|\cdot|MP|$，A 正确；来源：高三答案公众号



设直线 MN 的方程为 $y=k(x+1)$，代入 C 的方程有：

$k^2x^2+(2k^2-4)x+k^2=0$，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

则 $x_1x_2=1$，所以 $\frac{y_1^2}{4}\cdot\frac{y_2^2}{4}=1$，由条件知 y_1，y_2 同号，

所以 $y_1y_2=4$．故 $k_{MF}+k_{NF}=\frac{y_1}{x_1-1}+\frac{y_2}{x_2-1}=$ $\frac{(y_1+y_2)(y_1y_2-4)}{4(x_1-1)(x_2-1)}=0$，$\angle MFP+\angle NFP=\pi$，因 $\angle MFS=\angle MSF=\angle SFP$，所以 $\angle MFP=2\angle MFS$，同理，$\angle NFP=2\angle NFT$，所以 $\angle MFS+\angle NFT=\frac{\pi}{2}$，故 B 正确；

因 $|SF|=2|MF|\cos\angle MFS$，$|TF|=2|NF|\cos\angle NFT=2|NF|\sin\angle MFS$，故 $|SF|\cdot|TF|=$ $2|MF|\cdot|NF|\sin 2\angle MFS$，当且仅当 $\sin2\angle MFS=\frac{1}{2}$ 时，$|MF|\cdot|NF|=|SF|\cdot|TF|$，故 C 错误；

设 $\angle MFP<\frac{\pi}{2}$，如图，由 $\angle MFP+\angle NFP=\pi$ 可知直线 MF，NF 关于直线 $x=1$ 对称，

所以 $\frac{1}{2}\angle MFN+\angle NFP=\frac{\pi}{2}$，因 $\angle MFN=\angle MFS+\angle SFN=\angle SFP+\angle SFN=2\angle NFT$ $+\angle SFN+\angle SFN=2\angle SFT$，所以 $\angle SFT+\angle NFP=\frac{\pi}{2}$

$$S_{\triangle MFN}=\frac{1}{2}|MF|\cdot|NF|\sin\angle MFN=\frac{1}{2}|MF|\cdot|NF|\sin 2\angle SFT，$$

$$S_{\triangle SFT}=\frac{1}{2}|SF|\cdot|TF|\sin\angle SFT=\frac{1}{2}|MF|\cdot|NF|\cdot 2\sin 2\angle MFS\sin\angle SFT$$

$$=\frac{1}{2}|MF|\cdot|NF|\cdot 2\sin 2(\frac{\pi}{2}-\angle NFT)\sin\angle SFT=\frac{1}{2}|MF|\cdot|NF|\cdot 2\sin 2\angle NFT\cdot\sin\angle SFT$$

$$=\frac{1}{2}|MF|\cdot|NF|\cdot 2\sin\angle NFP\cdot\sin\angle SFT=\frac{1}{2}|MF|\cdot|NF|\cdot 2\sin(\frac{\pi}{2}-\angle SFT)\cdot\sin\angle SFT$$

$$=\frac{1}{2}|MF|\cdot|NF|\cdot 2\cos\angle SFT\cdot\sin\angle SFT=\frac{1}{2}|MF|\cdot|NF|\sin 2\angle SFT，$$ 故 D 正确．

13.【答案】$\frac{\pi}{3}$

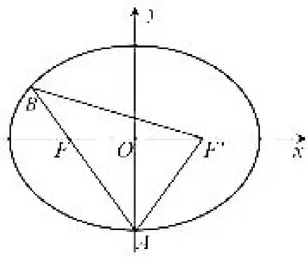
【解析】设圆锥的底面半径为 r，母线长为 l，高为 h，则 $\frac{r}{l}=\frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi}=\frac{1}{3}$，所以 $h=\sqrt{l^2-r^2}=2\sqrt{2}r=2$，$r=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{\pi}{3}$．

14.【答案】-40

【解析】x^2 的系数为 $C_n^2\times 2^{n-2}=80$，易知 $n=5$，所以 x^3 的系数为 $C_5^3\times 2^2\times(-1)^3=-40$.

15.【答案】$\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】方法 1：如图，设 C 的右焦点为 F'，根据题意可知 $|AF|=|AF'|=a$，若 $|AF|:|BF|=2:1$，且由于 $|BF|+|BF'|=2a$，所以 $|BF|=\frac{a}{2}$，$|BF'|=\frac{3a}{2}$，所以 $|AB|=|AF|+|BF|=\frac{3a}{2}$，由余弦定理可知 $\cos\angle BAF'=\frac{|AB|^2+|AF'|^2-|BF'|^2}{2|AB|\cdot|AF'|}=\frac{1}{3}$，设 O 为坐标原点，C 的焦距为 $2c$，则离心率 $e=\frac{c}{a}=\sin\angle OAF'$，因为 $\angle BAF'=2\angle OAF'$，故 $\cos\angle BAF'=1-2\sin^2\angle OAF'=1-2e^2$，所以 $e=\frac{\sqrt{3}}{3}$.



方法 2：设 B 在 x 轴上的射影为 D，由于 $|AF|:|BF|=2:1$，所以 $|BD|=\frac{|OA|}{2}=\frac{b}{2}$，$|FD|=\frac{|OF|}{2}=\frac{c}{2}$，即 $B(-\frac{3c}{2},\frac{b}{2})$，将 B 的坐标代入 C 的方程，得 $e=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

16.【答案】$(\frac{27}{4},+\infty)$

【解析】设 x_1，x_2，x_3 是 $f(x)$ 的三个零点，则 $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$，所以 $b=-(x_1+x_2+x_3)=0$，所以 $f(x)=x^3+cx-c$，$f'(x)=3x^2+c$，若 $f(x)$ 有三个零点，则 $f(x)$ 有两个极值点，故对于方程 $f'(x)=0$，$\Delta=-12c>0$，$c<0$，$f(x)$ 的两个极值点分别为 $x_4=-\sqrt{-\frac{c}{3}}$ 和 $x_5=\sqrt{-\frac{c}{3}}$，其中 x_4 为极大值点，x_5 为极小值点. 若 $f(x)$ 存在三个零点，则需满足 $f(x_4)>0$，且 $f(x_5)<0$，所以 $(-\sqrt{-\frac{c}{3}})^3-c\sqrt{-\frac{c}{3}}+c>0$，解得 $c<-\frac{27}{4}$，又因为 $f(x_5)<f(0)=c<0$，所以 $b-c$ 的取值范围是 $(\frac{27}{4},+\infty)$.

17.（10 分）

【解析】(1) 设公差为 d，则 $S_6=6a_1+\frac{6\times5\times d}{2}=15d+6$，$S_4=4a_1+\frac{4\times3\times d}{2}=6d+4$，

所以 $S_6-2S_4=3d-2=4$， ……3 分

解得 $d=2$. ……4 分

所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2n-1$． ……5 分

（2）由（1）可知，$S_n = na_1 + \dfrac{n(n-1)d}{2} = n^2$，$\dfrac{1}{a_1^2} + \dfrac{1}{a_2^2} + \cdots + \dfrac{1}{a_{100}^2} = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{199^2}$，

……6 分

所以当 $n \geqslant 100$ 时，$\dfrac{\pi^2}{6} - 0.01 < \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} < \dfrac{\pi^2}{6}$， ……7 分

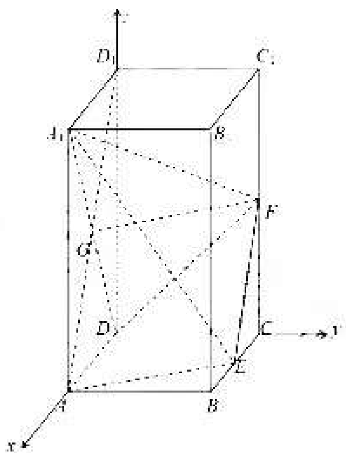
故 $-\dfrac{\pi^2}{24} < -(\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{4^2} + \cdots + \dfrac{1}{200^2}) = -\dfrac{1}{4} \times (\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{100^2}) < -\dfrac{\pi^2}{24} + 0.0025$， ……8 分

$\dfrac{\pi^2}{8} - 0.01 < \dfrac{1}{a_1^2} + \dfrac{1}{a_2^2} + \cdots + \dfrac{1}{a_{100}^2} = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{200^2} - (\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{4^2} + \cdots + \dfrac{1}{200^2}) < \dfrac{\pi^2}{8} + 0.0025$．

所以 $\left| \dfrac{1}{a_1^2} + \dfrac{1}{a_2^2} + \cdots + \dfrac{1}{a_{100}^2} - \dfrac{\pi^2}{8} \right| < 0.01$． ……10 分

18．（12 分）

【解析】（1）连接 AD_1，交 A_1D 于点 G，连接 FG，



因为 E，F 分别为 BC，CC_1 的中点，

所以 $EF \parallel AG$，且 $EF = AG$， ……2 分

所以四边形 $AEFG$ 是平行四边形，

所以 $AE \parallel FG$， ……3 分

又因为 $FG \subset$ 平面 A_1DF，

$AE \not\subset$ 平面 A_1DF，

所以 $AE \parallel$ 平面 A_1DF． ……5 分

（2）以 D 为坐标原点，DA 为 x 轴，DC 为 y 轴，DD_1 为 z 轴建立坐标系，设 $AA_1 = 2AB = 2$，

则 $A_1(1,0,2)$，$E(\dfrac{1}{2},1,0)$，$F(0,1,1)$，

所以 $\overrightarrow{DA_1} = (1,0,2)$，$\overrightarrow{FA_1} = (1,-1,1)$，$\overrightarrow{EF} = (-\dfrac{1}{2},0,1)$， ……7 分

设平面 DA_1F 与平面 EA_1F 的一个法向量分别为 $\boldsymbol{m} = (x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{n} = (x_2,y_2,z_2)$，则

$\begin{cases} x_1 + 2z_1 = 0 \\ x_1 - y_1 + z_1 = 0 \end{cases}$，$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x_2 + z_2 = 0 \\ x_2 - y_2 + z_2 = 0 \end{cases}$

不妨取 $z_1 = -1$，则 $\boldsymbol{m} = (2,1,-1)$，取 $z_2 = 1$，则 $\boldsymbol{n} = (2,3,1)$， ……10 分

所以 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2\times2+1\times3-1\times1}{\sqrt{6}\times\sqrt{14}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，

故二面角 $D-A_1F-E$ 的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$． ……12 分

19.（12 分）

【解析】（1）由正弦定理可知：$\dfrac{\sin A}{\sin B+\sin C}=\dfrac{\cos A}{\cos B+\cos C}$， ……1 分

所以 $\sin A\cos B+\sin A\cos C=\cos A\sin B+\cos A\sin C$，

所以 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=\cos A\sin C-\sin A\cos C$，

故 $\sin(A-B)=\sin(C-A)$． ……3 分

因为 A，B，C 是 $\triangle ABC$ 的内角，

所以 $-\pi<A-B<\pi$， 且 $-\pi<C-A<\pi$，

所以 $A-B+C-A=C-B=\pi$（不合题意），或 $A-B=C-A$，即 $2A=B+C$， ……4 分

又由三角形内角和定理可知 $A+B+C=\pi$，

所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$． ……5 分

（2）若 $a=2$，则 $b^2+2c^2=\dfrac{4(b^2+2c^2)}{a^2}$，

由正弦定理得 $b^2+2c^2=\dfrac{4(\sin^2B+2\sin^2C)}{\sin^2A}=\dfrac{16}{3}(\dfrac{1-\cos2B}{2}+1-\cos2C)$， ……7 分

由（1）可知 $C=\pi-A-B=\dfrac{2\pi}{3}-B$，

所以 $b^2+2c^2=\dfrac{16}{3}[\dfrac{1-\cos2B}{2}+1-\cos(\dfrac{4\pi}{3}-2B)]=\dfrac{16}{3}(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin2B+\dfrac{3}{2})$，

所以当 $\sin2B=1$，即 $B=\dfrac{\pi}{4}$ 时，b^2+2c^2 取得最大值． ……9 分

由正弦定理可知 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，即 $\dfrac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，解得 $b=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，

又 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$， ……11 分

所以此时 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times2\times\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$． ……12 分

20.（12 分）

【解析】（1）根据题意可知若 7 点 46 分出门，则一定不会迟到；若 7 点 47 分出门，仅当遇到 4 个红灯时才会迟到，则迟到的概率为 $(\dfrac{1}{2})^4=\dfrac{1}{16}$，不迟到的概率为 $\dfrac{15}{16}>90\%$， ……2 分

若7点48分出门，则遇到3个或4个红灯会迟到，迟到的概率为$C_4^3\times(\frac{1}{2})^3\times\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^4=\frac{5}{16}$，

迟到的概率为$\frac{11}{16}<90\%$，来源：高三答案公众号 ……3分

所以若保证不迟到的概率高于90%，小李最晚在7点47分从家出发. ……4分

（2）由（1）可知，小李7点48分从家出发迟到的概率为$\frac{5}{16}$，不迟到的概率为$\frac{11}{16}$，

所以若两天都是7点48分出发，则恰有一天迟到的概率为$C_2^1\times\frac{5}{16}\times\frac{11}{16}=\frac{55}{128}$. ……7分

（3）**方法1**：根据题意可知小李每天上班时长$X=10,11,12,13,14$(分钟)，

则$P(X=10)=P(X=14)=(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{16}$， ……8分

$P(X=11)=P(X=13)=C_4^1\times(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{4}$， ……9分

$P(X=12)=C_4^2\times(\frac{1}{2})^4=\frac{3}{8}$， ……10分

上班路平均时长为$E(X)=10\times\frac{1}{16}+11\times\frac{1}{4}+12\times\frac{3}{8}+13\times\frac{1}{4}+14\times\frac{1}{16}=12$（分钟）. ……12分

方法2：设小李每天上班时长$X=10,11,12,13,14$(分钟)，易知遇到的红灯个数$Y=0,1,2,3,4$服从$B(4,\frac{1}{2})$， ……10分

所以$E(Y)=np=2$， ……11分

所以$E(X)=E(Y+10)=12$（分钟）. ……12分

21.（12分）

【解析】（1）根据题意有$F_2(\sqrt{2}a,0)$，C的一条渐近线方程为$y=x$， ……1分

将$x=\sqrt{2}a$代入C的方程有$M(\sqrt{2}a,a)$，$N(\sqrt{2}a,-a)$， ……2分

所以M，N到直线$y=x$的距离之和为$\frac{|\sqrt{2}a-a|}{\sqrt{2}}+\frac{|\sqrt{2}a+a|}{\sqrt{2}}=2a=2\sqrt{2}$， ……3分

所以$a=\sqrt{2}$，C的方程为$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$. ……4分

（2）**方法1**：当l垂直于x轴时，由（1）可知，$|MF_2|=|NF_2|=a=\sqrt{2}$，且由双曲的定义可知$|MF_1|=|NF_1|=a+2a=3a=3\sqrt{2}$，故$\frac{|MF_1|}{|MF_2|}+\frac{|NF_1|}{|NF_2|}=6$. ……6分

当l不垂直于x轴时，由双曲线的定义可知$|MF_1|=|MF_2|+2a=|MF_2|+2\sqrt{2}$，$|NF_1|=|NF_2|+2\sqrt{2}$

故 $\dfrac{|MF_1|}{|MF_2|}+\dfrac{|NF_1|}{|NF_2|}=2+2\sqrt{2}(\dfrac{1}{|MF_2|}+\dfrac{1}{|NF_2|})$． ……7 分

设 $l:y=k(x-2)$，代入 C 的方程有：$(1-k^2)x^2+4k^2x-4k^2-2=0$，

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{k^2-1}$，$x_1x_2=\dfrac{4k^2+2}{k^2-1}$， ……9 分

所以 $\dfrac{1}{|MF_2|}+\dfrac{1}{|NF_2|}=\dfrac{|MF_2|+|NF_2|}{|MF_2|\cdot|NF_2|}=\dfrac{|MN|}{|MF_2|\cdot|NF_2|}=\dfrac{|x_1-x_2|}{\sqrt{1+k^2}|(x_1-2)(x_2-2)|}$ ……10 分

$$=\frac{\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}}{\sqrt{1+k^2}|x_1x_2-2(x_1+x_2)+4|}=\frac{\sqrt{\dfrac{16k^4}{(k^2-1)^2}-\dfrac{16k^2+8}{k^2-1}}}{\sqrt{1+k^2}\left|\dfrac{4k^2+2}{k^2-1}-\dfrac{8k^2}{k^2-1}+4\right|}=\frac{\sqrt{8k^2+8}}{2\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{2},$$

所以 $\dfrac{|MF_1|}{|MF_2|}+\dfrac{|NF_1|}{|NF_2|}=2+2\sqrt{2}(\dfrac{1}{|MF_2|}+\dfrac{1}{|NF_2|})=2+2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=6$．

综上，$\dfrac{|MF_1|}{|MF_2|}+\dfrac{|NF_1|}{|NF_2|}$ 的值为 6. ……12 分

方法 2： 当 l 垂直于 x 轴时，由（1）可知，$|MF_2|=|NF_2|=a=\sqrt{2}$，且由双曲的定义可知

$|MF_1|=|NF_1|=a+2a=3a=3\sqrt{2}$，故 $\dfrac{|MF_1|}{|MF_2|}+\dfrac{|NF_1|}{|NF_2|}=6$． ……6 分

当 l 不垂直于 x 轴时，设 $l:y=k(x-2)$，代入 C 的方程有：$(1-k^2)x^2+4k^2x-4k^2-2=0$．

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{k^2-1}$，$x_1x_2=\dfrac{4k^2+2}{k^2-1}$， ……9 分

所以 $\dfrac{|MF_1|}{|MF_2|}+\dfrac{|NF_1|}{|NF_2|}=\dfrac{\sqrt{2}x_1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}x_1-\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}x_2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}x_2-\sqrt{2}}=\dfrac{2x_1x_2-2}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}=$

$$\frac{\dfrac{8k^2+4}{k^2-1}-2}{\dfrac{4k^2+2}{k^2-1}-\dfrac{4k^2}{k^2-1}+1}=6.$$

综上，$\dfrac{|MF_1|}{|MF_2|}+\dfrac{|NF_1|}{|NF_2|}$ 的值为 6. ……12 分

22.（12 分）

【解析】（1）根据题意有 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\ln x+\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}(x-\ln x)$，……1 分

设 $g(x)=x-\ln x$，则 $g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，……2 分

当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

所以 $g(x)\geqslant g(1)=1>0$，……3 分

所以 $f'(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}g(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增．……4 分

（2）设 $h(x)=f(x)+\frac{a}{x^2}=e^{\frac{1}{x}}\ln x+\frac{a}{x^2}$，则 $h'(x)=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\ln x+\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}-\frac{2a}{x^3}$，

若 $x=1$ 是 $y=f(x)+\frac{a}{x^2}$ 的极值点，则 $h'(1)=0$，$a=\frac{e}{2}$，$h'(x)=\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}(1-\frac{\ln x}{x})-\frac{e}{x^3}$，……5 分

设 $\varphi(x)=-xe^{\frac{1}{x}}\ln x+x^2e^{\frac{1}{x}}$，则 $\varphi'(x)=\frac{(x-1)e^{\frac{1}{x}}(2x-\ln x)}{x}$，……6 分

由（1）可知，$2x-\ln x=x+g(x)\geqslant x+1>0$，

所以当 $0<x<1$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减；当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增，

所以 $\varphi(x)\geqslant\varphi(1)=e$，……7 分

所以 $h'(x)=\frac{\varphi(x)-e}{x^3}\geqslant 0$，$h(x)$ 单调递增，

所以 $x=1$ 不是函数 $y=f(x)+\frac{a}{x^2}$ 的极值点．……8 分

（3）当 $0<u\leqslant 1$ 时，$-\frac{1}{u}\leqslant -u$，当 $u\geqslant 1$ 时，$-\frac{1}{u}\geqslant -u$．

因为 $y=e^x$ 是增函数，且由（1）可知，$f(x)$ 单调递增，$f(1)=0$，

所以 $(e^{-\frac{1}{u}}-e^{-u})[f(u)-f(1)]=\ln u-e^{-u}f(u)\geqslant 0$，即 $e^{-u}f(u)\leqslant\ln u$①，……10 分

另有 $(e^{-uv}-e^{-\frac{1}{uv}})[f(\frac{1}{uv})-f(v)]=\ln\frac{1}{uv}-e^{-uv}f(\frac{1}{uv})-e^{-uv}f(v)+\ln v\geqslant 0$，

即 $e^{-uv}f(v)+e^{-uv}f(\frac{1}{uv})\leqslant\ln\frac{1}{uv}+\ln v$②，……11 分

所以①+②有 $e^{-u}f(u)+e^{-uv}f(v)+e^{-uv}f(\frac{1}{uv})\leqslant\ln u+\ln\frac{1}{uv}+\ln v=\ln(u\cdot\frac{1}{uv}\cdot v)=0$．……12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。