# 2021年秋季高三数学（文）开学摸底考试卷02

班级____________ 姓名____________ 分数____________

（考试时间：120分钟 试卷满分：150分）

**一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1．复数 $z$ 满足 $z(2-i)=|3+4i|$，则 $\overline{z}=$

A．$2+i$　　B．$2-i$　　C．$10+5i$　　D．$10-5i$

【答案】B

【解析】因为 $z(2-i)=|3+4i|=5$，

所以 $z=\dfrac{5}{2-i}=\dfrac{5(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{5(2+i)}{5}=2+i$，

故 $\overline{z}=2-i$．

故选B．

2．已知集合 $A=\{x\in Z\mid x>-1\}$，集合 $B=\{x\mid \log_2 x<2\}$，则 $A\bigcap B=$

A．$\{x\mid -1<x<4\}$　　B．$\{x\mid 0<x<4\}$　　C．$\{0，1，2，3\}$　　D．$\{1，2，3\}$

【答案】D

【解析】$\because$ 集合 $A=\{x\in Z\mid x>-1\}$，

集合 $B=\{x\mid \log_2 x<2\}=\{x\mid 0<x<4\}$，

$\therefore A\bigcap B=\{1，2，3\}$，

故选D．

3．已知命题 $p:\exists x\in R$，$\sin x<1$；命题 $q:\forall x\in R$，$e^{|x|}$　1，则下列命题中为真命题的是

A．$p\wedge q$　　B．$\neg p\wedge q$　　C．$p\wedge\neg q$　　D．$\neg(p\vee q)$

【答案】A

【解析】对于命题 $p:\exists x\in R$，$\sin x<1$，

当 $x=0$ 时，$\sin x=0<1$，故命题 $p$ 为真命题，$\neg p$ 为假命题；

对于命题 $q:\forall x\in R$，$e^{|x|}$　1，

因为 $|x|$　0，又函数 $y=e^x$ 为单调递增函数，故 $e^{|x|}$　$e^0=1$，

故命题 $q$ 为真命题，$\neg q$ 为假命题，

所以 $p \wedge q$ 为真命题，$\neg p \wedge q$ 为假命题，$p \wedge \neg q$ 为假命题，$\neg(p \vee q)$ 为假命题，

故选 A．

4．设函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，则下列函数中为奇函数的是

A．$f(x-1)-1$　　B．$f(x-1)+1$　　C．$f(x+1)-1$　　D．$f(x+1)+1$

【答案】B

【解析】因为 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}=\dfrac{-(x+1)+2}{1+x}=-1+\dfrac{2}{x+1}$，

所以函数 $f(x)$ 的对称中心为 $(-1,-1)$，

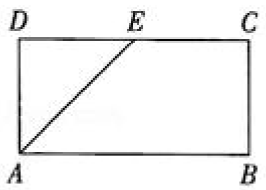
所以将函数 $f(x)$ 向右平移一个单位，向上平移一个单位，

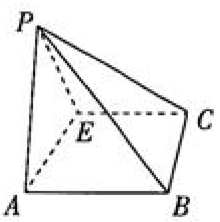
得到函数 $y=f(x-1)+1$，该函数的对称中心为 $(0,0)$，

故函数 $y=f(x-1)+1$ 为奇函数．

故选 B．

5．矩形 ABCD 中，$AB=4$，$AD=2$，点 $E$ 为 CD 中点，沿 AE 把 $\Delta ADE$ 折起，点 $D$ 到达点 $P$，使得平面 $PAE\perp$ 平面 ABCE，则异面直线 AB 与 PC 所成角的余弦值为






A．$\dfrac{1}{4}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】D

【解析】如右图，因为 $AB//CE$，异面直线 $AB$ 与 $PC$ 所成角就是 $\angle PCE$ 或其补角，

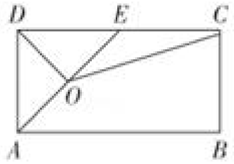
在 $\Delta PCE$ 中，$EC=2$，$PE=2$，

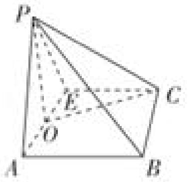
在左图中作 $DO\perp AE$，垂足为 $O$，则 $DO=\sqrt{2}$，$OC=\sqrt{10}$，

所以 $PC=\sqrt{PO^2+OC^2}=\sqrt{2+10}=2\sqrt{3}$，

所以 $\cos\angle PCE=\dfrac{PC^2+EC^2-PE^2}{2PC\cdot EC}=\dfrac{12+2^2-2^2}{2\times2\sqrt{3}\times2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

故选 D．




6．在一次 53.5 公里的自行车个人赛中，25 名参赛选手的成绩（单位：分钟）的茎叶图如图所示，现将参赛选手按成绩由好到差编为$1\sim25$号，再用系统抽样方法从中选取 5 人，已知选手甲的成绩为 85 分钟，若甲被选取，则被选取的 5 名选手的成绩的平均数为

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 8 | 9 |
| 9 | 0 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 | 7 | 9 | | |
| 10 | 0 | 0 | 5 | 6 | 7 | | | | | | |

A．93.6　　B．94.6　　C．95.6　　D．97

【答案】B

【解析】结合系统抽样法知间隔 5 人抽取一次，甲为 85 分，故其他人的成绩分别是 88，94，99，107，

故平均数为$\dfrac{85+88+94+99+107}{5}=94.6$，

故选 B．

7．把函数$y=f(x)$图像上所有点的横坐标缩短到原来的$\dfrac{1}{2}$倍，纵坐标不变，再把所得曲线向右平移$\dfrac{\pi}{3}$个单位长度，得到函数$y=\sin(x-\dfrac{\pi}{4})$的图像，则$f(x)=$

A．$\sin(\dfrac{x}{2}-\dfrac{7\pi}{12})$　　B．$\sin(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{12})$　　C．$\sin(2x-\dfrac{7\pi}{12})$　　D．$\sin(2x+\dfrac{\pi}{12})$

【答案】B

【解析】$\because$把函数$y=f(x)$图像上所有点的横坐标缩短到原来的$\dfrac{1}{2}$倍，纵坐标不变，

再把所得曲线向右平移$\dfrac{\pi}{3}$个单位长度，得到函数$y=\sin(x-\dfrac{\pi}{4})$的图像，

$\therefore$把函数$y=\sin(x-\dfrac{\pi}{4})$的图像，向左平移$\dfrac{\pi}{3}$个单位长度，

得到$y=\sin(x+\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4})=\sin(x+\dfrac{\pi}{12})$的图像；

再把图像上所有点的横坐标变为原来的 2 倍，纵坐标不变，

可得$f(x)=\sin(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{12})$的图像．

故选 B．

8．若 $a=\dfrac{ln2}{2}$，$b=\dfrac{ln3}{3}$，$c=\dfrac{ln5}{5}$，则 $a$，$b$，$c$ 的大小关系正确的是

A．$a<b<c$　　　　B．$c<a<b$　　　　C．$c<b<a$　　　　D．$b<a<c$

【答案】B

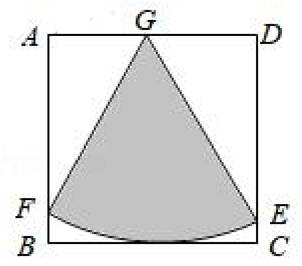
【解析】$\because \dfrac{ln3}{3}-\dfrac{ln2}{2}=\dfrac{2ln3-3ln2}{6}=\dfrac{ln9-ln8}{6}>0$，即 $a<b$，

$\dfrac{ln2}{2}-\dfrac{ln5}{5}=\dfrac{5ln2-2ln5}{10}=\dfrac{ln32-ln25}{10}>0$，即 $c<a$，

$\therefore c<a<b$，

故选 B．

9．如图，已知四边形 ABCD 为正方形，扇形 GEF 的弧 EF 与 BC 相切，点 $G$ 为 AD 的中点，在正方形 ABCD 中随机取一点，则该点落在扇形 GEF 内部的概率为




A．$\dfrac{\pi}{6}$　　　　B．$\dfrac{\pi}{4}$　　　　C．$\dfrac{\pi}{8}$　　　　D．$\dfrac{\pi}{12}$

【答案】A

【解析】不妨设正方形 $ABCD$ 的边长为 2，则扇形 $GEF$ 的半径为 2，

$\because GE=2, GD=1, \therefore \angle DGE=\dfrac{\pi}{3}$，

同理 $\angle AGF=\dfrac{\pi}{3}$，

$\therefore \angle EGF=\pi-\angle DGE-\angle AGF=\dfrac{\pi}{3}$，

$\therefore S_{扇形GEF}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{3}\times 2^2=\dfrac{2\pi}{3}$，而正方形 $ABCD$ 的面积 $S_{ABCD}=2\times 2=4$，

$\therefore$ 在正方形 $ABCD$ 中随机取一点，则该点落在扇形 $GEF$ 内部的概率 $P=\dfrac{S_{扇形GEF}}{S_{ABCD}}=\dfrac{\pi}{6}$．

故选 A．

10．在 $\Delta ABC$ 中，角 $A$，$B$，$C$ 的对边分别为 $a$，$b$，$c$，$A=2B$，角 $C$ 的平分线交对边 AB 于 $D$，且 CD 将三角形的面积分成 3:4 两部分，则 $\cos B=$

A．$\dfrac{1}{3}$　　　　B．$\dfrac{1}{2}$　　　　C．$\dfrac{2}{3}$　　　　D．$\dfrac{3}{4}$

【答案】C

【解析】因为 $CD$ 为 $\angle ACB$ 的平分线，由角平分线的性质定理可得 $\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{AC}{BC}$，

而 $\dfrac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta BCD}}=\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{3}{4}$，

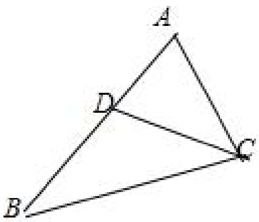
可得 $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{3}{4}$，

在 $\Delta ABC$ 中，由正弦定理可得 $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{BC}{\sin A}$，

又 $A=2B$，可得 $\dfrac{\sin A}{\sin B}=\dfrac{\sin 2B}{\sin B}=\dfrac{2\sin B\cos B}{\sin B}=2\cos B$，

所以 $2\cos B=\dfrac{4}{3}$，可得 $\cos B=\dfrac{2}{3}$，

故选 C.




11．设 $P(x,y)$ 是椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上的一个动点，定点 $M(1,0)$，则 $|PM|^2$ 的最大值是

A．$\dfrac{2}{3}$　　　　B．1　　　　C．3　　　　D．9

【答案】D

【解析】根据题意，$P(x,y)$ 是椭圆 $x^2+4y^2=4$ 即 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上的一个动点，则 $-2\quad x\quad 2$，且 $y^2=1-\dfrac{x^2}{4}$，

而定点 $M(1,0)$，则 $|PM|^2=(x-1)^2+y^2=(x^2-2x+1)+1-\dfrac{x^2}{4}=\dfrac{3}{4}x^2-2x+2=\dfrac{3}{4}(x-\dfrac{4}{3})^2+\dfrac{2}{3}$，

函数 $y=\dfrac{3}{4}(x-\dfrac{4}{3})^2+\dfrac{2}{3}$ 是开口向上的二次函数，其对称轴为 $x=\dfrac{4}{3}$，

当 $x=-2$ 时，$|PM|^2=\dfrac{3}{4}(x-\dfrac{4}{3})^2+\dfrac{2}{3}$ 取得最大值，且其最大值为 9，

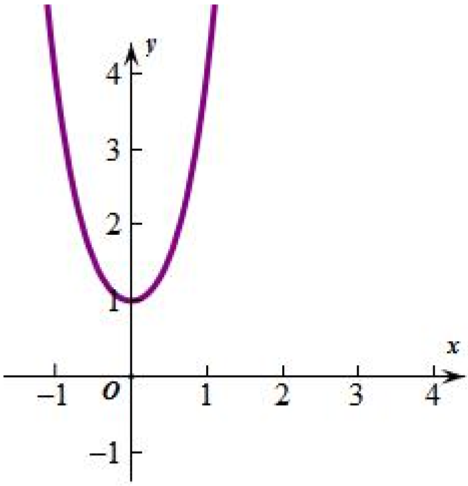
故选 D.

12．已知函数 $f(x)=ax^4+bx^2+c(abc\neq 0)$．记 $f(x)$ 零点个数为 $p$，极大值点个数为 $q$，若 $p=q$，则

A．$b<0$　　　　B．$b>0$　　　　C．$ac<0$　　　　D．$ac>0$

【答案】B

【解析】取 $a=1$， $b=2$， $c=1$，则 $f(x)=x^4+2x^2+1=(x^2+1)^2\ \ 1$，其图象如下，



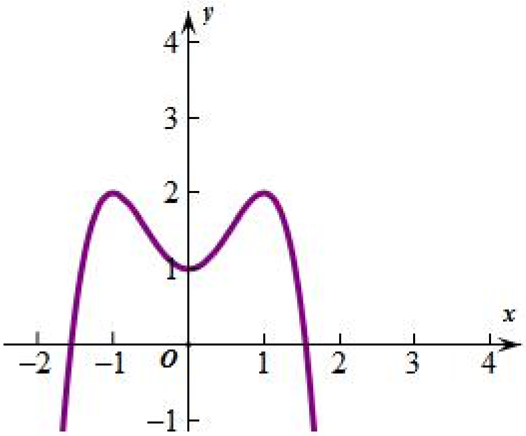

由图易知， $p=q=0$，符合题意，故排除选项 $A$， $C$；

取 $a=-1$， $b=2$， $c=1$，则 $f(x)=-x^4+2x^2+1$，

则 $f'(x)=-4x^3+4x=-4x(x+1)(x-1)$，

易知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$， $(0,1)$ 单调递增，

在 $(-1,0)$， $(1,+\infty)$ 单调递减，其图象如下，




由图象易知， $p=q=2$，符合题意，故排除选项 $D$；

故选 B.

**二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.**

13．曲线 $y=\frac{1}{3}x^3-2$ 在点 $(-1,-\frac{7}{3})$ 处的切线的倾斜角为____.

【答案】 $45°$

【解析】 $\because$ 点 $(-1,-\frac{7}{3})$ 满足曲线 $y=\frac{1}{3}x^3-2$ 的方程，

$\therefore$ 点 $(-1,-\frac{7}{3})$ 为切点．

$\because y'=x^2$，

$\therefore$ 当 $x=-1$ 时， $y'=1$

$\therefore$ 曲线 $y=\frac{1}{3}x^3-2$ 在点 $(-1,-\frac{7}{3})$ 处的切线的斜率为 1，倾斜角为 $45°$

故答案为 $45°$．

14．已知双曲线 $C:\frac{x^2}{m}-y^2=1(m>0)$ 的一条渐近线为 $\sqrt{3}x+my=0$，则 $C$ 的焦距为____．

【答案】4

【解析】根据题意，双曲线 $C:\frac{x^2}{m}-y^2=1(m>0)$ 的一条渐近线为 $\sqrt{3}x+my=0$，

则有 $\frac{m}{\sqrt{3}}=\sqrt{m}$，解可得 $m=3$，

则双曲线的方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$，则 $c=\sqrt{3+1}=2$，

其焦距 $2c=4$；

故答案为：4．

15．已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 $60°$，且 $|\overrightarrow{AB}|=2$，$|\overrightarrow{AC}|=1$，若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，且 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{AC}$，则实数 $\lambda$ 的值是____．

【答案】$-1$

【解析】$\because$ 向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 $60°$，且 $|\overrightarrow{AB}|=2$，$|\overrightarrow{AC}|=1$，

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times1\times\cos60°=1$．

若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，且 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{AC}$，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=(\lambda\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2=\lambda+1=0$，

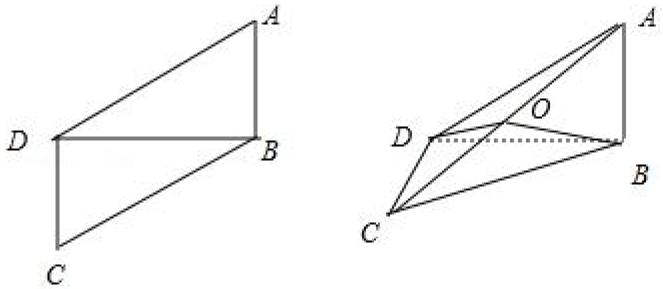
则实数 $\lambda=-1$，

故答案为：$-1$．

16．在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp BD$，$2AB^2+BD^2=1$，将此平行四边形沿对角线 $BD$ 折叠，使平面 $ABD\perp$ 平面 $CBD$，则三棱锥 $A-BCD$ 外接球的体积是 ____．

【答案】$\frac{\pi}{6}$

【解析】解：如图，




$\because$ 平面 $ABD \perp$ 平面 $CBD$，平面 $ABD \cap$ 平面 $CBD = BD$， $AB \perp BD$， $AB \subset$ 平面 $ABD$，

$\therefore AB \perp$ 平面 $CBD$，

$\because BC \subset$ 平面 $CBD$，

$\therefore AB \perp BC$，

同理可证 $CD \perp AD$，

在 Rt$\Delta$ABC 中， $AC^2 = BC^2 + AB^2 = CD^2 + BD^2 + AB^2 = 2AB^2 + BD^2 = 1$，所以 $AC = 1$，

取 $AC$ 中点为 $O$，连接 $OB$， $OD$，

由直角三角形的性质可知， $OB = \frac{1}{2}AC$， $OD = \frac{1}{2}AC$，

又 $\because OA = OC = \frac{1}{2}AC$，即 $O$ 到 $A$， $B$， $C$， $D$ 四点的距离相等，

$\therefore O$ 为三棱锥 $A-BCD$ 外接球的球心，

$\therefore R = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}$，

$\therefore$ 球的体积 $V = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot(\frac{1}{2})^3 = \frac{\pi}{6}$，

故答案为： $\frac{\pi}{6}$．

**三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．（一）必考题：共 60 分．**

17．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$， $2a_{n+1} = (1+\frac{1}{n})a_n (n \in N^*)$．

（1）求证：数列 $\{\frac{a_n}{n}\}$ 是等比数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$．

【答案】（1） $a_n = \frac{n}{2^{n-1}}$；（2） $S_n = \frac{2^{n+1}-n-2}{2^{n-1}}$．

【解析】（1）证明：因为 $2a_{n+1} = \frac{n+1}{n}a_n, n \in N^*$，所以 $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{2}\times\frac{a_n}{n}$，

又 $\frac{a_1}{1} = 1 \neq 0$，故数列 $\{\frac{a_n}{n}\}$ 为首项为 1，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列．

所以 $\dfrac{a_n}{n}=1\times(\dfrac{1}{2})^{n-1}=\dfrac{1}{2^{n-1}}$，故 $a_n=\dfrac{n}{2^{n-1}}$．

（2）因为 $S_n=\dfrac{1}{2^0}+\dfrac{2}{2^1}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^{n-2}}+\dfrac{n}{2^{n-1}}$ ①，

$\dfrac{1}{2}S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^{n-1}}+\dfrac{n}{2^n}$ ②，

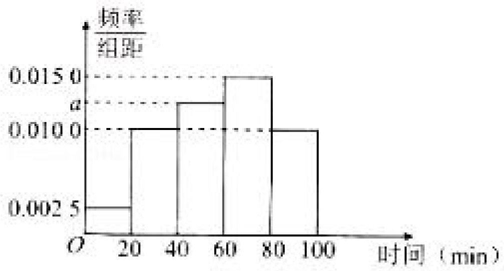
①、②式错位相减得：$\dfrac{1}{2}S_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}++\dfrac{1}{2^{n-1}}-\dfrac{n}{2^n}=\dfrac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}-\dfrac{n}{2^n}=\dfrac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$

化简整理得 $S_n=\dfrac{2^{n+1}-n-2}{2^{n-1}}$．

18．4 月 23 日是世界读书日，其设立的目的是推动更多的人去阅读和写作，某市教育部门为了解全市中学生课外阅读的情况，从全市随机抽取 1000 名中学生进行调查，统计他们每日课外阅读的时长，如图是根据调查结果绘制的频率分布直方图．

（1）求频率分布直方图中 $a$ 的值，并估计 1000 名学生每日的平均阅读时间（同一组中的数据用该组区间的中点值代表该组数据平均值）；

（2）若采用分层抽样的方法，从样本在 $[60，80)[80，100]$ 内的学生中共抽取 5 人来进一步了解阅读情况，再从中选取 2 人进行跟踪分析，求抽取的这 2 名学生来自不同组的概率．




【答案】（1）58；（2）$\dfrac{3}{5}$．

【解析】（1）由频率分布直方图可得，$(0.0025+0.01+a+0.015+0.01)\times 20=1$，即 $a=0.0125$，

这 1000 名学生每日的平均阅读时间 $\bar{x}=10\times 0.05+30\times 0.2+50\times 0.25+70\times 0.3+90\times 0.2=58$ 分钟．

（2）$\because$ 由频率分布直方图，可知样本在 $[60，80)[80，100]$ 内的学生频率分布为 0.3，0.2，

$\therefore$ 样本在 $[60，80)[80，100]$ 采用分层抽样的比例为 $3:2$，

$\therefore [60，80)$ 抽取了 3 人 $a$，$b$，$c$，$[80，100]$ 抽取了 2 人 $d$，$e$，

则再从 5 人中抽取 2 人共有 $\{ab，ac，ad，ae，bc，bd，be，cd，ce，de\}$10 种不同的抽取方法，

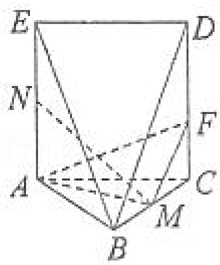
抽取的 2 人来自不同组共有$\{ae, bc, bd, be, cd, ce\}$6 种，

$\therefore$抽取的 2 人来自不同组的概率$P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

19．如图，在四棱锥 $B-ACDE$ 中，正方形 $ACDE$ 所在的平面与正三角形 $ABC$ 所在的平面垂直，点 $M$，$N$ 分别为 $BC$，$AE$ 的中点，点 $F$ 在棱 $CD$ 上．

（1）证明：$MN\parallel$平面 $BDE$；

（2）若 $AB=2$，点 $M$ 到 $AF$ 的距离为$\frac{\sqrt{30}}{5}$，求 $CF$ 的长．




【答案】（1）证明见解析；（2）1.

【解析】（1）证明：取 $BD$ 的中点 $G$，连接 $EG$，$MG$，

$\because M$ 为棱 $BC$ 的中点，

$\therefore MG\parallel CD$，且 $MG=CD$．

又 $N$ 为棱 $AE$ 的中点，四边形 $ACDE$ 为正方形，

$\therefore EN\parallel CD$，且 $EN=CD$．

从而 $EN\parallel MG$，且 $EN=MG$，于是四边形 $EGMN$ 为平行四边形，

则 $MN\parallel EG$．

$\because MN\not\subset$平面 $BDE$，$EG\subset$平面 $BDE$，

$\therefore MN\parallel$平面 $BDE$．

（2）解：过 $M$ 作 $MI\perp AC$ 于 $I$，

$\because$平面 $ACDE\perp$平面 $ABC$，$\therefore MI\perp$平面 $ACDE$，

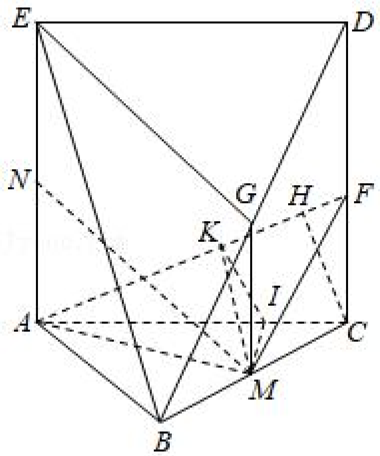
过 $I$ 作 $IK\perp AF$ 于 $K$，连接 $MK$，则 $MK\perp AF$．

$\because AB=2$，$\therefore MI=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore MK=\sqrt{MI^2+IK^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+IK^2}=\frac{\sqrt{30}}{5}$，

$\therefore IK=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$，过 $C$ 作 $CH\perp AF$ 于 $H$，易知 $\dfrac{IK}{CH}=\dfrac{AI}{AC}=\dfrac{3}{4}$，则 $CH=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\because CH=\dfrac{AC\times CF}{AF}=\dfrac{2CF}{\sqrt{CF^2+4}}$，

$\therefore CF=1$.




20．已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，点 $M(1,\dfrac{3}{2})$ 为椭圆 $C$ 上一点.

（1）求椭圆 $C$ 的方程;

（2）过点 $F_1(-1,0)$ 作动直线 $l$ 与椭圆交于 $A$，$B$ 两点，过点 $A$ 作直线 $x=-4$ 的垂线垂足为 $N$，求证：直线 $BN$ 过定点.

【答案】（1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$；（2）证明见解析.

【解析】（1）$\because F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，点 $M(1,\dfrac{3}{2})$ 为椭圆 $C$ 上一点，

$\therefore$ 由椭圆定义可得 $2a=|MF_1|+|MF_2|=\sqrt{[1-(-1)]^2+(\dfrac{3}{2}-0)^2}+\sqrt{(1-1)^2+(\dfrac{3}{2}-0)^2}=4$，

$\therefore a=2$，

$\because c=1$，

$\therefore b^2=a^2-c^2=4-1=3$，

$\therefore$ 椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

（2）证明：设直线 $l$ 的方程为 $x=my-1$，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$N(-4,y_1)$，

联立直线 $l$ 与椭圆方程 $\begin{cases} x=my-1 \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，可得 $(4+3m^2)y^2-6my-9=0$，

$\therefore$ 运用韦达定理，可得 $y_1+y_2=\dfrac{6m}{4+3m^2}$ ①，$y_1y_2=\dfrac{-9}{4+3m^2}$ ②，

$\because N(-4,y_1)$，

$\therefore$ 直线 $BN$ 的方程为 $y-y_1=k_{BN}(x+4)$，即 $y=k_{BN}(x+4+\dfrac{y_1}{k_{BN}})$ ③，

又 $\because k_{BN}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2+4}=\dfrac{y_2-y_1}{(my_2-1)+4}=\dfrac{y_2-y_1}{my_2+3}$，

$\therefore \dfrac{y_1}{k_{BN}}=\dfrac{y_1(my_2+3)}{y_2-y_1}=\dfrac{my_1y_2+3y_1}{y_1+y_2-2y_1}$ ④，

将①、②式代入④式化简得 $\dfrac{y_1}{k_{BN}}=-\dfrac{3}{2}$ ⑤，

⑤代入③化简得直线 $BN$ 的方程为 $y=k_{BN}(x+\dfrac{5}{2})$，

故直线 $BN$ 过定 $D(-\dfrac{5}{2},0)$，即得证.

21．已知 $x=0$ 为函数 $f(x)=e^x-kx$ 的极值点.

（Ⅰ）求 $k$ 的值；

（Ⅱ）若 $\forall x\in(0,+\infty)$，$f(x)>-x^2+(a-1)x+1$，求实数 $a$ 的取值范围.

【答案】（Ⅰ）1；（Ⅱ）$a \quad 1$.

【解析】（Ⅰ）$f'(x)=e^x-k$，$f'(0)=e^0-k=0$，解得 $k=1$，

经检验，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 递减，在 $(0,+\infty)$ 递增，$x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点，符合题意，因此，$k=1$.

（Ⅱ）$\forall x\in(0,+\infty)$，$e^x+x^2-ax-1>0$，

设 $g(x)=e^x+x^2-ax-1$，其中 $g(0)=0$，$g'(x)=e^x+2x-a$，$h(x)=e^x+2x-a$，$h'(x)=e^x+2>0$，

$\therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，$h(x)>h(0)=1-a$.

（1）当 $1-a \quad 0$ 时，即 $a \quad 1$，$g'(x) \quad 0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，$g(x)>g(0)=0$ 符合题意，所以 $a \quad 1$；

（2）当 $1-a<0$ 时，即 $a>1$，$\exists x_0\in(0,+\infty)$，$g'(x_0)=0$，

在 $(0,x_0)$ 上，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 递减，

所以 $x\in(0,x_0)$ 时，$g(x)<g(0)=0$ 不符合题意；

综上，实数 $a$ 的取值范围为 $a \quad 1$.

**（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）**

22．在直角坐标系 $xOy$ 中，曲线 $C$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos\alpha \\ y = 2 + 2\sin\alpha \end{cases}$（$\alpha$ 为参数），以原点 $O$ 为极点，轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 $l$ 的极坐标方程为 $\rho\cos(\theta + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$．

（1）求曲线 $C$ 的极坐标方程和直线 $l$ 的直角坐标方程；

（2）设射线 $\theta = -\frac{\pi}{6}(\rho > 0)$ 与直线 $l$ 交于点 $A$，点 $B$ 在曲线 $C$ 上，且 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$，求 $|AB|$．

【答案】（1）$\rho = 4\sin\theta$；$x - \sqrt{3}y - 2\sqrt{3} = 0$．（2）2.

【解析】（1）曲线 $C$ 的普通方程 $x^2 + (y-2)^2 = 4$，将 $x = \rho\cos\theta$，$y = \rho\sin\theta$ 代入，

整理得 $\rho = 4\sin\theta$，即为曲线 $C$ 的极坐标方程．

对于直线 $l$，$\rho(\cos\theta \cdot \frac{1}{2} - \sin\theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) = \sqrt{3}$，将 $x = \rho\cos\theta$，$y = \rho\sin\theta$ 代入，

整理得 $x - \sqrt{3}y - 2\sqrt{3} = 0$，即为直线 $l$ 的直角坐标方程．

（2）把 $\theta = -\frac{\pi}{6}$ 代入直线 $l$ 的极坐标方程得 $A(2, -\frac{\pi}{6})$，

射线 $OB$ 的极坐标方程为 $\theta = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}$，即 $\theta = \frac{\pi}{6}$．

把 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 代入曲线 $C$ 的极坐标方程，得 $B(2, \frac{\pi}{6})$，

$\because \angle AOB = \frac{\pi}{3}$，$\therefore \Delta AOB$ 为等边三角形，

$\therefore |AB| = 2$．

23．已知函数 $f(x) = |x - \frac{1}{2}| - \frac{x}{2}$，$g(x) = -|x + \frac{a}{2}| + \frac{3}{2}$．

（1）当 $a = -2$ 时，求不等式 $f(x) < g(x)$ 的解集；

（2）设 $a > -1$，且当 $x \in [-\frac{a}{2}, \frac{1}{2})$ 时，$f(x)\ \ g(x)$，求 $a$ 的取值范围．

【答案】（1）$\{x | 0 < x < 2\}$；（2）$(-1, \frac{4}{3}]$．

【解析】（1）$\because$ 函数 $f(x) = |x - \frac{1}{2}| - \frac{x}{2}$，$g(x) = -|x + \frac{a}{2}| + \frac{3}{2}$，

当 $a = -2$ 时，不等式 $f(x) < g(x)$，即 $|x - \frac{1}{2}| - \frac{x}{2} + |x - 1| - \frac{3}{2} < 0$，

设 $y=|x-\frac{1}{2}|-\frac{x}{2}+|x-1|-\frac{3}{2}$，

当 $x<\frac{1}{2}$ 时，$y=\frac{1}{2}-x-\frac{x}{2}+1-x-\frac{3}{2}=-\frac{5x}{2}<0$，解得 $0<x<\frac{1}{2}$，

当 $\frac{1}{2}\quad x\quad 1$ 时，$y=x-\frac{1}{2}-\frac{x}{2}+1-x-\frac{3}{2}=-\frac{x}{2}-1<0$，解得 $\frac{1}{2}\quad x\quad 1$，

当 $x>1$ 时，$y=x-\frac{1}{2}-\frac{x}{2}+x-1-\frac{3}{2}=\frac{3x}{2}-3$，解得 $1<x<2$，

综上所述，$f(x)<g(x)$ 的解集为 $\{x\,|\,0<x<2\}$．

（2）设 $a>-1$，且当 $x\in[-\frac{a}{2},\frac{1}{2})$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}-x-\frac{x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{3x}{2}$，$g(x)=-x-\frac{a}{2}+\frac{3}{2}=-x-\frac{a-3}{2}$，

$\therefore f(x)<g(x)$，即 $\frac{1}{2}-\frac{3x}{2}\quad -x-\frac{a-3}{2}$，

$\therefore x\quad a-2$，对 $x\in[-\frac{a}{2},\frac{1}{2})$ 内恒成立，

$\therefore x_{min}\quad a-2$，

$\therefore -\frac{a}{2}\quad a-2$，解得 $a\quad \frac{4}{3}$，

$\therefore a$ 的取值范围为 $(-1,\frac{4}{3}]$．