

赣州市 2023 年高三适应性考试

理科数学试卷

2023 年 5 月

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 150 分，考试时间 120 分钟

第 I 卷

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- 已知集合 $P = \{x | 1 < 2^x < 18, x \in \mathbf{Z}\}$, $Q = \{y | y = -x^2 + 4x - 1\}$, 则 $P \cap Q =$
 A. $\{x | 0 < x \leq 3\}$ B. $\{x | 0 < x < \log_2 18\}$ C. $\{1, 2, 3, 4\}$ D. $\{1, 2, 3\}$
- 等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 = -14, a_{12} = -4$, 则 $a_{23} =$
 A. 5 B. 7 C. 9 D. 11
- 已知复数 z 满足 $|z + i| = 1$ (i 为虚数单位), 则 $|z - i|$ 的最大值为
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 给出下列四个结论: ①曲线 $2y^2 = x$ 的焦点为 $(\frac{1}{2}, 0)$; ②“若 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点, 则 $f'(x_0) = 0$ ”的逆命题为真命题; ③若命题 $p: \frac{x}{2x-1} < 0$, 则 $\neg p: \frac{x}{2x-1} \geq 0$; ④若命题 $p: \exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - x_0 + 1 < 0$, 则 $\neg p: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 \geq 0$. 其中正确的个数为
 A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
- 设实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x - y - 2 \leq 0 \\ x + 2y - 11 \leq 0 \\ 3x + y - 8 \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = x^2 + y^2 - 6y + 9$ 的最小值为
 A. $\sqrt{5}$ B. $\frac{5}{2}$ C. 5 D. $\frac{25}{4}$
- 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $a_1 = \frac{1}{32}, a_{n+1} = S_n$, 则 $a_9 =$
 A. 1 B. 2 C. 4 D. 8
- 已知曲线 $y = e^{x-m}$ 在 $x = 2$ 处的切线与坐标轴围成的面积为 $\frac{e}{2}$, 则 $m =$
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 把正整数集合排列成如图所示的三角阵, 在第 3 列与第 5 列中各任取一个数, 则取到的两个数之积是 6 的倍数的概率为
 A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{19}{45}$ C. $\frac{4}{9}$ D. $\frac{7}{15}$

9. 《九章算术》是中国古代数学专著, 承先秦数学发展的源流, 进入汉朝后又经许多学者的删补才最后成书. 在《九章算术》中, 将四个面都为直角三角形的四面体称之为鳖臑. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 面 ABC , $\triangle ABC$ 是以 AC 为斜边的直角三角形, 过点 A 作 PC 的垂面分别交 PB, PC 于 D, E , 则在 P, A, B, C, D, E 中任选四点, 能构成鳖臑的有

- A. 4 种 B. 3 种 C. 2 种 D. 1 种

10. 若函数 $f(x) = 2 \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 在 $[\frac{\pi}{12}, \frac{2\pi}{3}]$ 上单调, 且满足 $f(-\frac{\pi}{3}) = f(\frac{\pi}{6}) = -f(\frac{2\pi}{3})$, 则 $\varphi =$

- A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{5\pi}{12}$ D. $\frac{7\pi}{12}$

11. 在棱长为 4 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 满足 $\overline{AA_1} = 4\overline{AP}$, E, F 分别为棱 BC, CD 的中点, 点 Q 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的表面上运动, 满足 $A_1Q \parallel$ 面 EFP , 则点 Q 的轨迹所构成的周长为

- A. $\frac{5\sqrt{37}}{3}$ B. $2\sqrt{37}$ C. $\frac{7\sqrt{37}}{3}$ D. $\frac{8\sqrt{37}}{3}$

12. 已知函数 $f(x)$ 的图像既关于点 $(-1, 1)$ 对称, 又关于直线 $y = x$ 对称, 且当 $x \in [-1, 0]$ 时,

$$f(x) = x^2, \text{ 则 } f(\frac{17}{4}) =$$

- A. $-\frac{19}{4}$ B. $-\frac{9}{2}$ C. $-\frac{7}{2}$ D. $-\frac{17}{4}$

第 II 卷

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 下表是甲同学在某学期前四次考试中某科的的考试成绩 x 与其所在班级该科平均分 y 的情况:

x	87	85	91	97
y	77	74	79	84

已知 y 与 x 呈线性相关, 若甲同学在第五次考试中该科的考试成绩为 90, 根据回归分析, 预计其所在班级该科平均分为_____ (用数字作答).

14. 已知 θ 为锐角, 满足 $\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta - 3 \cos^2 \theta = \frac{3}{5}$, 则 $\tan \theta =$ _____.

15. 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E, F 分别满足 $\overline{DC} = 2\overline{DE} = 4\overline{EF}$, $\overline{BC} = 2\overline{BG}$, 若 $\overline{AF} = \lambda \overline{AE} + \mu \overline{AG}$, 则 $\lambda + \mu =$ _____.

16. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 在 E 上, 满足 $\triangle F_1PF_2$ 为直角三角形, 作 $OM \perp PF_1$ 于点 M (其中 O 为坐标原点), 且有 $\overline{PM} = 2\overline{MF_1}$, 则 E 的离心率为_____.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

17. (本小题满分 12 分)

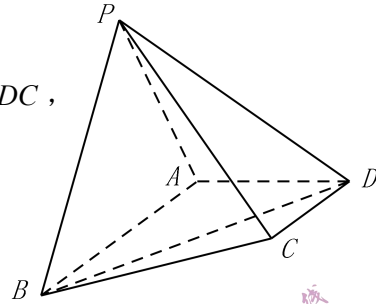
设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边长分别为 a, b, c ，且 $3b \cos C = a + 3c \cos B$.

(1) 求 $\frac{\tan B}{\tan C}$ 的值;

(2) 若 $\cos A = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ，且 $\triangle ABC$ 的面积为 2，求 a 的值.

18. (本小题满分 12 分)

在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $AB \perp AD$ ， $\triangle PAB$ 是以 AB 为斜边的等腰直角三角形，且平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AB = 2$ ， $AD = DC$ ，二面角 $D-PB-A$ 的正切值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



(1) 证明：平面 $PBC \perp$ 平面 PAD ;

(2) 求直线 CD 与平面 PBD 所成角的正弦值.

19. (本小题满分 12 分) 公众号：网课来了

3D 打印即快速成型技术的一种，又称增材制造，它是一种以数字模型文件为基础，运用粉末状金属或塑料等可粘合材料，通过逐层打印的方式来构造物体的技术. 中国的 3D 打印技术在飞机上的应用已达到规模化、工程化，处于世界领先地位. 我国某企业利用 3D 打印技术生产飞机的某种零件，8 月 1 日质检组从当天生产的零件中抽取了部分零件作为样本，检测每个零件的某项质量指标，得到下面的检测结果：

质量指标	[6,7)	[7,8)	[8,9)	[9,10)	[10,11)	[11,12)	[12,13]
频率	0.02	0.09	0.22	0.33	0.24	0.08	0.02

(1) 根据频率分布表，估计 8 月 1 日生产的该种零件的质量指标的平均值 \bar{x} 和方差 s^2 (同一组的数据用该组区间的中点值作代表);

(2) 由频率分布表可以认为，该种零件的质量指标 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，其中 μ 近似为样本平均数 \bar{x} ， σ^2 近似为样本方差 s^2 . 公众号：网课来了

① 若 $P(X \geq a) = 0.9772$ ，求 a 的值;

② 若 8 月 1 日该企业共生产了 500 件该种零件，问这 500 件零件中质量指标不少于 7.06 的件数最有可能是多少?

附参考数据： $\sqrt{6} \approx 2.44$ ，若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.6827$ ，

$P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9544$ ， $P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$.

20. (本小题满分 12 分) 公众号：网课来了

已知函数 $f(x) = e^{x-1} + bx \ln x + ax^2$.

(1) 当 $b = 1, a = -1$ 时，讨论 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 的单调性;

(2) 当 $b = -1$ 时，是否存在实数 a ，使 $f(x) \geq ax + 1$ 恒成立? 若存在，求 a 的值; 若不存在，说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中， $F_1(-1,0), F_2(1,0)$ ，点 P 为平面内的动点，且满足 $\angle F_1PF_2 = 2\theta$ ， $|PF_1| \cdot |PF_2| \cos^2 \theta = 2$.

(1) 求 $|PF_1| + |PF_2|$ 的值，并求出点 P 的轨迹 E 的方程;

(2) 过 F_1 作直线 l 与 E 交于 A, B 两点， B 关于原点 O 的对称点为点 C ，直线 AF_2 与直线 CF_1 的交点为 T . 当直线 l 的斜率和直线 OT 的斜率的倒数之和的绝对值取得值最小值时，求直线 l 的方程.

请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分) [选修 4-4: 坐标系与参数方程]

在直角坐标系 xOy 中，曲线 $C: \begin{cases} x = \cos \alpha \\ y = 1 + \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数，且 $0 \leq \alpha \leq \pi$). 以坐标原点为极点， x 轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求 C 的普通方程和极坐标方程;

(2) 设点 P 是 C 上一动点，点 M 在射线 OP 上，且满足 $|OP| \cdot |OM| = 4$ ，求点 M 的轨迹方程.

23. (本小题满分 10 分) [选修 4-5: 不等式选讲]

设函数 $f(x) = |x-1| + 2|x+5|$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小值;

(2) 若 $|a| < 3, |b| < 3$ ，求证： $|a+b| + |a-b| < f(x)$.