文科数学参考解答及评分参考

1.C　2.A　3.C　4.B　5.B　6.A　7.D　8.D　9.B　10.C　11.C　12.A

13. $\frac{\sqrt{10}}{3}$　14. 2　15. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$　16. $3+2\sqrt{2}$

17. 解析：(1)由题，

得 $K^2=\frac{200\times(20\times50-30\times100)^2}{50\times150\times120\times80}=\frac{100}{9}\approx11.11>6.635$，…………………………… 4分

因此，有 99% 的把握认为客户对该产品的评价结果与性别有关系. …………………… 6分

(2)这 6 名客户中男性有 4 人，记为 A_1,A_2,A_3,A_4，女性有 2 名，记为 B_1,B_2. ………… 8分

从这 6 名客户中选取 2 名客户的所有基本事件有：(A_1,A_2)，(A_1,A_3)，(A_1,A_4)，(A_1,B_1)，(A_1,B_2)，(A_2,A_3)，(A_2,A_4)，(A_2,B_1)，(A_2,B_2)，(A_3,A_4)，(A_3,B_1)，(A_3,B_2)，(A_4,B_1)，(A_4,B_2)，(B_1,B_2)，共 15 个. ………………………………………… 10分

其中，至少有一名女性客户的基本事件有 9 个. ………………………………………… 11分

所以，抽取的 2 名客户中至少有 1 名女性客户的概率为 $\frac{9}{15}$，即 $\frac{3}{5}$. ………………………… 12分

18. 解析：(1)由已知 $a_1+a_1+2+a_1+4=12$，所以 $a_1=2$，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n$. ………………………………………………… 2分

设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，由 $b_1=3$，$b_3-b_2=18$

则 $3q^2-3q=18$，即 $q^2-q-6=0$，

解得 $q=3$，$q=-2$（舍去），

所以数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=3^n$. ………………………………………………… 6分

(2)由(1)得 $c_n=\frac{4}{2n\cdot2(n+1)}+3^n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+3^n$. ………………………………… 8分

所以 $T_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+(3+3^2+\cdots+3^n)$

$=1-\frac{1}{n+1}+\frac{3(1-3^n)}{1-3}$

$=\frac{n}{n+1}+\frac{3^{n+1}-3}{2}$.

所以 $T_n=\frac{n}{n+1}+\frac{3^{n+1}-3}{2}$. ………………………………………………… 12分

19. 解析：(1)证明：设 $PN\perp$ 平面 ABC 于点 N，

过 N 作 $NE\perp AB$ 于 E，$NF\perp AC$ 于 F，连接 PE，PF.

因为 $PN\perp$平面 ABC，$AB\subset$平面 ABC，所以 $PN\perp AB$.

又因为 $NE\perp AB$，所以 $AB\perp$平面 PNE，所以 $AB\perp PE$，同理 $AC\perp PF$. ……………… 2 分

在 Rt$\triangle PAE$，Rt$\triangle PAF$ 中，$\angle PAE=\angle PAF$，$PA=PA$，

故$\triangle PAE\cong\triangle PAF$，所以 $AF=AE$.

在 Rt$\triangle ANE$，Rt$\triangle ANF$ 中，$AF=AE$，$AN=AN$，

故$\triangle ANE\cong\triangle ANF$，所以 $NE=NF$. ……………………………………………………………… 4 分

即 N 到 AB，AC 的距离相等，同理 N 到 BC，AC 的距离相等，

故 N 为$\triangle ABC$ 的内心，N 与 H 重合.

所以 $PH\perp$平面 ABC.

又因为 $PH\subset$平面 APM，所以平面 $PAM\perp$平面 ABC. …………………………………… 6 分

(2)设$\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times4\times3=\frac{1}{2}r(3+4+5)$，故 $r=1$.

所以 $AH=\sqrt{r^2+AE^2}=\sqrt{5}$，$PH=\sqrt{AP^2-AH^2}=2$. ……………………………………… 8 分

因为 H 为$\triangle ABC$ 的内心，所以 AH 平分$\angle BAC$，

所以$\frac{BM}{CM}=\frac{AB}{AC}=\frac{3}{5}$，$BM+CM=4$，所以 $CM=\frac{5}{2}$，

故$\triangle AMC$ 的面积为$\frac{1}{2}CM\cdot AB=\frac{15}{4}$. …………………………………………………… 10 分

由于点 P 到平面 ABC 的距离为 $PH=2$，

故三棱锥 $M-PAC$ 的体积为$\frac{1}{3}S_{\triangle AMC}\cdot PH=\frac{5}{2}$. ………………………………… 12 分

20. 解析：(1)椭圆经过点 A，T，代入椭圆 E 的方程，得$\begin{cases}b^2=1,\\ \frac{64}{25a^2}+\frac{9}{25b^2}=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=1.\end{cases}$

所以椭圆 E 的方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………………………………… 2 分

由$\angle MAT=\angle NAT$ 知 AM 与 AN 关于直线 AT：$y=x+1$ 对称，

在 AM 上任取一点 $P_0(x_0,y_0)$，

则 P_0关于直线 $y=x+1$ 对称的点为 $P'_0(y_0-1,x_0+1)$，……………………………………… 4 分

从而 $k_1=k_{AP_0}=\frac{y_0-1}{x_0}$，$k_2=k_{AP'_0}=\frac{(x_0+1)-1}{y_0-1}$，

于是 $k_1k_2=1$. ……………………………………………………………………………………………… 5 分

(2)设点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，AM：$y=k_1x+1$，

由$\begin{cases}y=k_1x+1,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$得$(4k_1^2+1)x^2+8k_1x=0$，所以 $x_1=-\frac{8k_1}{4k_1^2+1}$，

从而 $y_1=k_1x_1+1=\dfrac{1-4k_1^2}{4k_1^2+1}$.

同理 $x_2=-\dfrac{8k_2}{4k_2^2+1}, y_2=\dfrac{1-4k_2^2}{4k_2^2+1}$.

由(1)有 $k_1k_2=1$,故 $x_2=-\dfrac{8k_1}{4+k_1^2}, y_2=\dfrac{k_1^2-4}{4+k_1^2}$, ………………………………………………………… 7 分

为方便,记 $k_1=k$,则 $k_{MN}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{\dfrac{1-4k^2}{4k^2+1}-\dfrac{k^2-4}{4+k^2}}{\dfrac{-8k}{4k^2+1}-\dfrac{-8k}{4+k^2}}=\dfrac{8-8k^4}{8k(3k^2-3)}=-\dfrac{k^2+1}{3k}$ ………… 9 分

$MN: y-y_1=k_{MN}(x-x_1)$,

所以 $y-\dfrac{1-4k^2}{4k^2+1}=-\dfrac{k^2+1}{3k}\left(x-\dfrac{-8k}{4k^2+1}\right)$,

即 $y=-\dfrac{k^2+1}{3k}x-\dfrac{8(k^2+1)}{3(4k^2+1)}+\dfrac{1-4k^2}{4k^2+1}=-\dfrac{k^2+1}{3k}x-\dfrac{5}{3}$ ………………………………………… 11 分

由此可知,当 k 变化时,直线 MN 过定点 $\left(0,-\dfrac{5}{3}\right)$. ………………………………………………… 12 分

21. 解析:(1)由题 $f(x)=ae^x-x^2$ 得 $f'(x)=ae^x-2x$,

因为函数 $f(x)$ 有两个极值点,

所以方程 $f'(x)=0$ 有两个不同实数根,即方程 $a=\dfrac{2x}{e^x}$ 有两个不同实数根, ……………… 2 分

设 $u(x)=\dfrac{2x}{e^x}$,则 $u'(x)=\dfrac{2-2x}{e^x}$,

知 $x<1$ 时,$u'(x)>0$,则 $u(x)$ 单调递增,$x>1$ 时,$u'(x)<0$,则 $u(x)$ 单调递减,

所以,$x=1$ 时,$u(x)$ 取得极大值 $u(1)=\dfrac{2}{e}$,

又 $x<0$ 时,$u(x)<0$;$x>0$ 时,$u(x)>0$,且 $x\to+\infty$ 时,$u(x)\to 0$,

所以,方程 $a=\dfrac{2x}{e^x}$ 有两个不同实数根时,有 $0<a<\dfrac{2}{e}$.

即 $f(x)$ 有两个极值点时,a 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{2}{e}\right)$. ………………………………………………… 5 分

(2)由(1)可知,$f(x)$ 的两个极值点 x_1,x_2 是方程 $ae^x-2x=0$ 的两根,

且 $0<a<\dfrac{2}{e}$,$0<x_1<1<x_2$,则有 $ae^{x_1}=2x_1>0$,$ae^{x_2}=2x_2>0$,

两式相除,得 $e^{x_2-x_1}=\dfrac{x_2}{x_1}$,即有 $x_2-x_1=\ln\dfrac{x_2}{x_1}>0$,

由 $x_1+\lambda x_2\geqslant 2x_1x_2$ 得,$(x_2-x_1)(x_1+\lambda x_2)\geqslant 2x_1x_2\ln\dfrac{x_2}{x_1}$, ………………………………… 7 分

所以 $\lambda \geqslant \dfrac{2\ln t+\dfrac{1}{t}-1}{t-1}$，令 $t=\dfrac{x_2}{x_1}\geqslant 3$，

令 $h(t)=\dfrac{2\ln t+\dfrac{1}{t}-1}{t-1}(t\geqslant 3)$，则 $h'(t)=\dfrac{3-\dfrac{4}{t}+\dfrac{1}{t^2}-2\ln t}{(t-1)^2}(t\geqslant 3)$，

令 $\varphi(t)=3-\dfrac{4}{t}+\dfrac{1}{t^2}-2\ln t(t\geqslant 3)$，

则 $\varphi'(t)=-\dfrac{2}{t}+\dfrac{4}{t^2}-\dfrac{2}{t^3}=\dfrac{-2t^2+4t-2}{t^3}=\dfrac{-2(t-1)^2}{t^3}<0$， ………………………………… 9 分

所以 $\varphi(t)$ 单调递减，又 $\varphi(3)=3-\dfrac{4}{3}+\dfrac{1}{3^2}-2\ln 3=\dfrac{16-18\ln 3}{9}<0$，

故 $t\geqslant 3$ 时，$\varphi(t)<0$，则 $h(t)=\dfrac{2\ln t+\dfrac{1}{t}-1}{t-1}$ 单调递减，

则 $h(t)\leqslant h(3)=\ln 3-\dfrac{1}{3}$，故 $\lambda\geqslant \ln 3-\dfrac{1}{3}$.

所以 λ 的最小值为 $\ln 3-\dfrac{1}{3}$. ……………………………………………………… 12 分

22. 解析：(1)将 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 代入 $4\rho^2\sin^2\theta=3(\rho^2-1)$，得

$4y^2=3(x^2+y^2)-3$，

即曲线 C 的直角坐标方程为：$3x^2-y^2-3=0$. ……………………………………… 5 分

(2)直线 l 的参数方程可改写为 $\begin{cases}x=2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=\dfrac{1}{2}t\end{cases}$ (t 为参数)，……………………………… 6 分

代入曲线 C 的方程，有 $3\left(2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}t\right)^2=3$，

整理得 $2t^2+6\sqrt{3}t+9=0$. ……………………………………………………………… 7 分

从而 $t_1+t_2=-3\sqrt{3}$，$t_1t_2=\dfrac{9}{2}$，…………………………………………………………… 8 分

所以 $|AB|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=3$. ……………………………………… 10 分

23. 解析：(1)当 $x<-\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)=-2x+3-2x-1\leqslant 6-x$，解得 $-\dfrac{4}{3}\leqslant x<-\dfrac{1}{2}$；

当 $-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2}$ 时，$f(x)=-2x+3+2x+1\leqslant 6-x$，解得 $-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2}$；

当 $x>\dfrac{3}{2}$ 时，$f(x)=2x-3+2x+1\leqslant 6-x$，解得 $\dfrac{3}{2}<x\leqslant\dfrac{8}{5}$，

综上所述,原不等式的解集为$\left\{x \,\middle|\, -\frac{4}{3}\leqslant x\leqslant\frac{8}{5}\right\}$. …………………………………………… 5 分

(2)由题 $f(x)=|2x-3|+|2x+1|\geqslant|2x-3-(2x+1)|=4$,当且仅当$(2x-3)(2x+1)\leqslant 0$

即$-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$时取"等号",故 $f(x)$的最小值 $T=4$,即 $x+y+2z=4$.

证法 1:

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{2}{z+2}=\frac{1}{10}[(x+1)+(y+1)+2(z+2)]\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{2}{z+2}\right)$$

$$\geqslant\frac{1}{10}\left[\sqrt{(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}}+\sqrt{(y+1)\cdot\frac{1}{y+1}}+\sqrt{2(z+2)\cdot\frac{2}{z+2}}\right]^2=\frac{16}{10}=\frac{8}{5},$$

当且仅当$(x+1)^2=(y+1)^2=(z+2)^2$,即 $x=y=\frac{3}{2}$,$z=\frac{1}{2}$时取等号.

所以,$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{2}{z+2}\geqslant\frac{8}{5}$. …………………………………………… 10 分

证法 2:

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{2}{z+2}=\frac{1}{10}[(x+1)+(y+1)+2(z+2)]\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{2}{z+2}\right)$$

$$=\frac{1}{10}\left[6+\frac{y+1}{x+1}+\frac{x+1}{y+1}+\frac{2(z+2)}{x+1}+\frac{2(x+1)}{z+2}+\frac{2(z+2)}{y+1}+\frac{2(y+1)}{z+2}\right]$$

$$\geqslant\frac{1}{10}\left[6+2\sqrt{\frac{y+1}{x+1}\cdot\frac{x+1}{y+1}}+2\sqrt{\frac{2(z+2)}{x+1}\cdot\frac{2(x+1)}{z+2}}+2\sqrt{\frac{2(z+2)}{y+1}\cdot\frac{2(y+1)}{z+2}}\right]=\frac{8}{5}.$$

当且仅当$\frac{y+1}{x+1}=\frac{x+1}{y+1}$,$\frac{2(z+2)}{x+1}=\frac{2(x+1)}{z+2}$,$\frac{2(z+2)}{y+1}=\frac{2(y+1)}{z+2}$取等号,

即 $x=y=\frac{3}{2}$,$z=\frac{1}{2}$时取等号.

所以,$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{2}{z+2}\geqslant\frac{8}{5}$. …………………………………………… 10 分