2017年浙江省高中数学竞赛

一、填空题：本大题共10个小题,每小题8分,共80分.

1. 在多项式$(x-1)^3(x+2)^{10}$的展开式中x^6的系数为__________.

2. 已知$\log_{\sqrt{7}}(5a-3)=\log_{\sqrt{a^2+1}}5$, 则实数$a=$__________.

3. 设$f(x)=x^2+ax+b$在$[0,1]$中有两个实数根, 则a^2-2b的取值范围为__________.

4. 设x，$y\in R$, 且$\dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x+\cos^2 x\cos^2 y-\sin^2 x\sin^2 y}{\sin(x+y)}=1$, 则

$x-y=$__________.

5. 已知两个命题, 命题p:函数$f(x)=\log_a x$（$x>0$）单调递增；命题q：函数

$g(x)=x^2+ax+1$（$x\in R$）. 若$p\vee q$为真命题，$p\wedge q$为假命题，则实数a的取值范围

为__________.

6. 设S是$(0,\dfrac{5}{8})$中所有有理数的集合,对简分数$\dfrac{q}{p}\in S$，$(p,q)=1$,定义函数$f(\dfrac{q}{p})=\dfrac{q+1}{p}$，

则$f(x)=\dfrac{2}{3}$在S中根的个数为__________.

7. 已知动点P，M，N分别在x轴上，圆$(x-1)^2+(y-2)^2=1$和圆$(x-3)^2+(y-4)^2=3$

上，则$|PM|+|PN|$的最小值为__________.

8. 已知棱长为1的正四面体$P-ABC$，PC的中点为D，动点E在线段AD上，则直线BE

与平面ABC所成的角的取值范围为__________.

9. 已知平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，满足$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=3$，$0<\lambda<1$，若$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$，则

$|\vec{a}-\lambda\vec{b}-(1-\lambda)\vec{c}|$所有取不到的值的集合为__________.

10. 已知$f(x)=\begin{cases}-2x, x<0,\\ x^2-1, x\ge 0,\end{cases}$ 方程$f(x)+2\sqrt{1-x^2}+|f(x)-2\sqrt{1-x^2}|-2a*4=0$有三个

根$x_1<x_2<x_3$. 若$x_3-x_2=2(x_2-x_1)$，则实数$a=$__________.

二、解答题：本大题共5个小题，满分120分，将答案填在答题纸上）

11. 设 $f_1(x)=\sqrt{x^2+32}$，$f_{n+1}(x)=\sqrt{x^2+\frac{16}{3}f_n(x)}$，$n=1$，2，…. 对每个 n，求 $f_n(x)=3x$ 的实数解.

12. 已知椭圆 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ 的右焦点为 F，过 F 的直线 $y=k(x-2)$ 交椭圆于 P，Q 两点 $(k\neq 0)$. 若 PQ 的中点为原点，直线 ON 交直线 $x=3$ 于 M.

（1）求 $\angle MFQ$ 的大小；

（2）求 $\frac{PQ}{MF}$ 的最大值.

13. 设数列 $\{a_n\}$ 满足：$|a_{n+1}-2a_n|=2$，$|a_n|\le 2$，$n=1, 2, 3$，….

证明：如果 a_1 为有理数，则从某项后 $\{a_n\}$ 为周期数列.

14. 设 a_1，a_2，a_3；b_1，b_2，$b_3\in Z^+$，证明：存在不全为零的数 λ_1，λ_2，$\lambda_3\in\{0,1,2\}$，使得 $\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\lambda_3a_3$ 和 $\lambda_1b_1+\lambda_2b_2+\lambda_3b_3$ 同时被 3 整除.

15. 设 $\sigma=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 为 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个排列，记 $F(\sigma)=\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}$，$a_{n+1}=a_1$，求 $\min F(\sigma)$.

2017年浙江省高中数学竞赛答案

一、填空题

1. -4128　　2. 2　　3. $[0,2]$　　4. $2k\pi+\frac{\pi}{2}$（$k\in Z$）　5. $(-2,1]\cup[2,+\infty)$

6. 5　　7. $2\sqrt{10}-\sqrt{3}-1$　　8. $\left[0,\arctan\frac{\sqrt{14}}{7}\right]$

9. $(-\infty,\frac{6}{13}\sqrt{13}-1)\cup(4,+\infty)$　　10. $\frac{\sqrt{17}-3}{2}$

三、解答题

11. 证明：利用数学归纳法.

（1）$x=2$ 是 $f_n(x)=3x$ 的解.

当 $n=1$ 时，$x=2$ 是 $f_1(x)=\sqrt{x^2+32}=3x$ 的解.

当 $n=k$ 时，设 $f_k(2)=6$，则 $f_{k+1}(2)=\sqrt{4+\frac{16}{3}f_k(2)}=6$.

由此可得 $x=2$ 是 $f_n(x)=3x$ 的解（对于所有的 n）.

（2）当 $x>2$ 时，$f_n(x)<3x<\frac{3}{2}x^2$.

当 $n=1$ 时，$f_1(x)=\sqrt{x^2+32}<3x<\frac{3}{2}x^2(x>2)$.

当 $n=k$ 时，设 $f_k(x)<3x<\frac{3}{2}x^2$，则 $f_{k+1}(x)=\sqrt{x^2+\frac{16}{3}f_k(x)}<\sqrt{x^2+8x^2}=3x$.

由此可得 $x>2$ 都不是 $f_n(x)=3x$ 的解（对于所有的 n）.

（3）当 $0<x<2$ 时，$f_n(x)>3x$.

当 $n=1$ 时，$f_1(x)=\sqrt{x^2+32}>\sqrt{x^2+8x^2}=3x$（$0<x<2$）.

当 $n=k$ 时，设 $f_k(x)>3x$，则 $f_{k+1}(x)=\sqrt{x^2+\frac{16}{3}f_k(x)}>\sqrt{x^2+1}>3x$.

由此可得 $0<x<2$ 都不是 $f_n(x)=3x$ 的解（对于所有的 n）.

因此，对每个 n，$f_n(x)=3x$ 的实数解为 $x=2$.

12. 解：（1）联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1,\\ y=k(x-2),\end{cases}$ 可得 $(3k^2+1)x^2-12k^2x+12k^2-6=0$.

设 P 点的坐标为 (x_p,y_p)，Q 点的坐标为 (x_q,y_q)，

则 $x_p+x_q=\frac{12k^2}{3k^2+1}$，$x_px_q=\frac{12k^2-6}{3k^2+1}$.

于是有 $y_p+y_q=k(x_p+x_q)-4k=\frac{-4k}{3k^2+1}$.

因为 PQ 的中点为 N，所以 $N(\frac{6k^2}{3k^2+1},\frac{-2k}{3k^2+1})$，因此 ON 的斜率 $k_{ON}=-\frac{1}{3k}$，

因为直线 ON 交直线 $x=3$ 于 M，所以 $M(3,-\frac{1}{k})$，故 MF 的斜率为 $k_{MF}=-\frac{1}{k}$，

即得 $k_{MF}\cdot k_{PQ}=-1$，因此 MF 与 PQ 垂直，$\angle MFQ=\frac{\pi}{2}$.

（2）$I=(\frac{PQ}{MF})^2=\frac{(x_p-x_q)^2+k^2(x_p-x_q)^2}{1+\frac{1}{k^2}}=k^2(x_p-x_q)^2=k^2\left[(x_p+x_q)^2-4x_px_q\right]$

$=k^2\left[\frac{144k^4}{(3k^2+1)^2}-24\frac{2k^2-1}{3k^2+1}\right]=24k^2\frac{k^2+1}{(3k^2+1)^2}$.

令 $u=3k^2+1$，则 $I=8\frac{(u-1)(u+2)}{3u^2}=-\frac{16}{3}(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{2u}-\frac{1}{2})=-\frac{16}{3}\left[(\frac{1}{u}-\frac{1}{4})^2-\frac{9}{16}\right]$，

由于 $u=3k^2+1>1$，故 $0\le\frac{1}{u}<1$.

因此 $I_{\max}=3$（当 $u=4$ 时取到最大值，也即 $k=\pm1$）.

综上所述，$\frac{PQ}{MF}$ 的最大值为 $\sqrt{3}$.

13. 证明：（1）若 a_1 为有理数，则 $\{a_n\}$ 为一个有理数数列.

（2）对于任意的 n，设 $a_n=\frac{y}{x}$，$(y,x)=1$，由已知条件，有且仅有下述一个等式成立：

$a_{n+1}=2a_n+2=\frac{2y+2x}{x}$ 或 $a_{n+1}=2a_n-2=\frac{2y-2x}{x}$.　　(*)

a_n 与 a_{n+1} 有相同的分母（不进行约分）.

（3）设 $a_1=\frac{q}{p}$，$(p,q)=1$，则 $a_n=\frac{b_n}{p}$，b_n 为整数，由于 $|a_n|\le 2$，$n=1$，2, 3，…，因此 $-2p\le b_n\le 2p$.

（4）若存在两个自然数 $k<l$，使得 $a_k=a_l$，则由（2）中得到的（*）递推公式以及 $|a_n|\le 2$，$n=1, 2, 3$，…，可得 $\{a_n\}$ 从第 k 项开始是一个周期数列，周期为 $l-k$.

（5）由（3）可知对于任意的 n，b_n 的值只有 $4p+1$（有限个），故总能找到 $k<l$，使得 $b_k=b_l$，从而有 $a_k=a_l$.

综上所述，如果 a_1 为有理数，则从某项后 $\{a_n\}$ 为周期数列.

14. 证明：不妨设 $a_i\equiv k_k(\bmod 3)$，$b_i\equiv l_i(\bmod 3)$，k_i，$l_i\in\{0,1,2\}$，$i=1,2,3$. 则要证明结论正确，只要证明存在不全为零的数 λ_1，λ_2，$\lambda_3\in\{0,1,2\}$，使得

$\lambda_1k_1+\lambda_2k_2+\lambda_3k_3\equiv\lambda_1l_1+\lambda_2l_2+\lambda_3l_3(\bmod 3)\equiv 0(\bmod 3)$.（*）

记 $k_1l_2-k_2l_1=c(\bmod 3)$，这里 $c\in\{0,1,2\}$.

情形（1）当 $c=0$ 时，则 $k_1=l_1=0$，或者 k_1，l_1 不全为零.

若 $k_1=l_1=0$，则取 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=\lambda_3=0$，有（*）式成立.

若 k_1，l_1 不全为零，不妨设 $k_1\ne 0$，则取 $\lambda_1=k_2$，$\lambda_2=-k_1$，$\lambda_3=0$，且

$\begin{cases}\lambda_1k_1+\lambda_2k_2+\lambda_3k_3=k_2k_1-k_1k_2\equiv 0(\bmod 3),\\ \lambda_1l_1+\lambda_2l_2+\lambda_3l_3=k_2l_1-k_1l_2\equiv 0(\bmod 3),\end{cases}$ 即（*）式.

情形（2）当 $c=1$ 或 2 时，即 $c^2\equiv 1(\bmod 3)$.

记$c(k_2l_3-k_3l_2)\equiv c_1(\bmod 3)$，$c(k_3l_1-k_1l_3)\equiv c_2(\bmod 3)$，这里$c_1$，$c_2\in\{0,1,2\}$.

令$\lambda_1=c_1$，$\lambda_2=c_2$，$\lambda_3=1$，则λ_1，λ_2，$\lambda_3\in\{0,1,2\}$且不全为零，且

$$\lambda_1k_1+\lambda_2k_2+\lambda_3k_3=c_1k_1+c_2k_2+k_3\equiv c(k_2l_3-k_3l_2)k_1+c(k_3l_1-k_1l_3)k_2+k_3(\bmod 3)$$

$$\equiv ck_3(k_2l_1-k_1l_2)+k_3(\bmod 3)\equiv(1-c^2)k_3(\bmod 3)\equiv 0(\bmod 3),$$

类似可以证明$\lambda_1l_1+\lambda_2l_2+\lambda_3l_3\equiv 0(\bmod 3)$.

综上所述，可以取到不全为零的数λ_1，λ_2，$\lambda_3\in\{0,1,2\}$，使得（*）式成立.

15. 解：问题等价于圆周上放置n个数，使得相邻数的乘积之和为最小，最小值记为T_n.

不妨设$a_1=n$，则数字 1 必与它相邻，否则设$a_j=1$（$j\neq 2$，n），则可将a_2，a_3，…，a_j的数字改变为a_j，a_{j-1}，…，a_2上的数字，则相邻数的乘积和的该变量为

$$a_1a_j+a_2a_{j+1}-a_1a_2-a_ja_{j+1}=(a_1-a_{j+1})(a_j-a_2)<0.$$

于是可确定$a_2=1$. 再说明数字 2 也必与数字n相邻，即$a_n=2$.

事实上，若$a_j=2$（$j\neq n$），则交换a_n，a_{n-1}，…，a_j为a_j，a_{j+1}，…，a_n，此时的目标改变值为

$$a_1a_j+a_na_{j-1}-a_1a_n-a_ja_{j-1}=(a_1-a_{j-1})(a_j-a_n)<0.$$

因此目标取到最小值时，$a_1=n$，$a_2=1$，$a_n=2$. 由此出发，依次可得$a_3=n-1$，$a_{n-1}=n-2$.　在已安排好的两端数字，若剩下的数比两端数字都小，则在剩下的数中找两个最小的数字，按小对大，大对小放置；若剩下的数比两端数字大，则在剩下的数字中找两个最大的数，按大对小，小对大放置. 由此规律即得$a_4=3$，$a_{n-2}=4$，$a_5=n-3$，$a_{n-3}=n-4$，….

下面用递推法计算T_n.

考虑$n+2$个数字，我们在T_n的数字排序中，将每个数字加 1，再放置 1，$n+2$这两个数字，

在2，$n+1$的中间插入$n+2$，1，即可得到T_{n+2}.

因此，$T_{n+2}=T_n'+(n+1)+(n+2)+2(n+2)-2(n+1)$，

其中$T_n'=\sum_{i=1}^{n}(a_i+1)(a_{i+1}+1)=T_n+n(n+2)$，

由此可得$T_{n+2}=T_n+n^2+4n+5$，

可以推出$T_n=\begin{cases}\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{5}{6}n-1, n=2m,\\ \frac{1}{6}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{5}{6}n-\frac{1}{2}, n=2m-1.\end{cases}$