高三数学参考答案

1. B　因为 $A=\{x|-3\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{0,1,2,3,4\}$，所以 $A\cap B=\{0,1,2,3\}$.

2. A　设 $z=a+bi$，$a,b\in\mathbf{R}$，因为 $2z-3\bar{z}=2-5i$，所以 $-a+5bi=2-5i$，解得 $a=-2$，$b=-1$，则 $z=-2-i$.

3. D　因为 $20\times70\%=14$，所以这个学习小组成员该次数学测试成绩的第 70 百分位数是 $\frac{90+95}{2}=92.5$.

4. C　对于 A，$f(x)$为非奇非偶函数，故不满足题意.

对于 B，$f(x)$为$(-2,2)$上的奇函数，且 $f(x)$为减函数，故不满足题意.

对于 C，因为 $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}=1-\frac{2}{2^x+1}$，所以 $f(x)$在定义域 $\mathbf{R}$ 内单调递增.

又 $f(-x)=\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\frac{1-2^x}{1+2^x}=-f(x)$，所以 $f(x)$是奇函数，故满足题意.

对于 D，因为 $f(-x)=\frac{e^{-x}+e^x}{2}=f(x)$，所以 $f(x)$为偶函数，故不满足题意.

5. B　因为 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=6$，得 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{2}{\sin 2\theta}=6$，所以 $\sin 2\theta=\frac{1}{3}$.

6. A　依题意得 50 以内的质数有 2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47，共 15 个数，50 以内的梅森数有 $2^2-1=3$，$2^3-1=7$，$2^5-1=31$，共 3 个数，所以从 50 以内的质数中任取两个数，则这两个数都为梅森数的概率 $P=\frac{C_3^2}{C_{15}^2}=\frac{1}{35}$，故选 A.

7. C　易知 $f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$. 当 $x\in(0,+\infty)$时，$f(x)=\ln(x+1)+\frac{2}{x+1}$，则 $f'(x)=\frac{x-1}{(x+1)^2}$，故 $f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增.

当 $x\in(-1,0]$时，$f(x)=-\ln(x+1)+\frac{2}{x+1}$，因为 $y=-\ln(x+1)$，$y=\frac{2}{x+1}$在$(-1,0]$上都是单调递减函数，所以 $y=f(x)$也在$(-1,0]$上单调递减，故 $f(x)$在$(-1,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增.

所以 $x=0$ 不是 $f(x)$的极小值点，A 错误，$x=1$ 是 $f(x)$的极小值点，B 错误，$f(x)_{\min}=f(1)=\ln 2+1$，C 正确，当 $x\to+\infty$时，$f(x)\to+\infty$，所以 $f(x)$没有最大值，故 D 错误.

8. D　因为 $MN\perp FN$，所以$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=|\overrightarrow{FN}|^2=|\overrightarrow{FM}|^2-1$，又 $|\overrightarrow{FM}|\geqslant|\overrightarrow{FO}|=3$，$O$ 为原点，所以$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}\geqslant 3^2-1=8$.

9. AC　若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $2m+2=m-1$，解得 $m=-3$，A 正确；

因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-m^2-1=0$ 无解，所以不存在 $m\in\mathbf{R}$，使得 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，B 错误；

因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,1)$，所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{5}$，C 正确；

设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=-\frac{m^2+1}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}<0$，所以 θ 不可能为锐角，D 错误.

10. BCD　因为圆 C 的标准方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=9$，所以它的圆心坐标为$(2,1)$，半径为 3，A 错误，B 正确；

因为直线 l 的方程可化为 $\lambda(x-1)+3x+y-3=0$，所以直线 l 恒过点$(1,0)$，易知点$(1,0)$在圆 C 内，所以直线 l 与圆 C 有两个交点，C 正确；

当 $\lambda=-2$ 时，直线 l 的方程为 $x+y-1=0$，圆心$(2,1)$到 l 的距离 $d=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}<3$，所以所求弦长为 $2\sqrt{9-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{7}$，D 正确.

11. BC　由题意得 $f'(x)=A\omega\cos(\omega x-\varphi)$，则 $f(2\pi)=f'(2\pi)$，即 $A\sin\varphi=A\omega\cos\varphi$，故 $\tan\varphi=\omega$. 因为 $\omega\in\mathbf{N}^*$，$|\varphi|<\frac{\pi}{3}$，所以 $\tan\varphi=\omega<\sqrt{3}$，所以 $\omega=1$，$\varphi=\frac{\pi}{4}$，则 A 错误；因为破碎的涌潮的波谷为 -4，所以 $f'(x)$的最

小值为-4，即$-A\omega=-4$，所以$A=4$，所以$f(x)=4\sin(x+\frac{\pi}{4})$，则$f(\frac{\pi}{3})=4\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=4(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，故B正确；因为$f(x)=4\sin(x+\frac{\pi}{4})$，所以$f'(x)=4\cos(x+\frac{\pi}{4})$，所以$f'(x-\frac{\pi}{4})=4\cos x$，则C正确；由$-\frac{\pi}{3}<x<0$，得$-\frac{\pi}{12}<x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$，因为$y=4\cos x$在$(-\frac{\pi}{12},0)$上单调递增，在$(0,\frac{\pi}{4})$上单调递减，所以$f'(x)$在区间$(-\frac{\pi}{3},0)$上不单调，则D错误.

12. ABC　如图1，将三棱柱补成正方体，J为对应边的中点，易知$\angle CPJ$为异面直线AC_1与CP所成角或补角. 在$\triangle PCJ$中，$CP=CJ=\sqrt{5}$，$PJ=\sqrt{2}$，则$\cos\angle CPJ=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，故A正确. 由题意可得三棱锥$C_1-ACP$的体积$V_{C_1-ACP}=V_{P-C_1CA}=\frac{1}{3}S_{\triangle C_1CA}\times2=\frac{4}{3}$，该“堑堵”的体积$V_{ABC-A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}\times2\times2\times2=4$，则B正确. 如图2，分别取$AA_1$，$A_1C_1$，$B_1C_1$的中点$E$，$F$，$G$，易知四边形$PEFG$是等腰梯形，且高为$\frac{\sqrt{6}}{2}$.
当E不是AA_1的中点时，PE不平行于平面$A_1B_1C_1$，则四边形$PEFG$不是梯形，从而等腰梯形有且仅有一个，其面积$S_{PEFG}=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2}+2\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，故C正确. 如图3，向下作截面，满足题意的梯形是直角梯形，同理，直角梯形有且仅有一个，其面积$S=\frac{1}{2}\times(1+2)\times\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，则D错误.

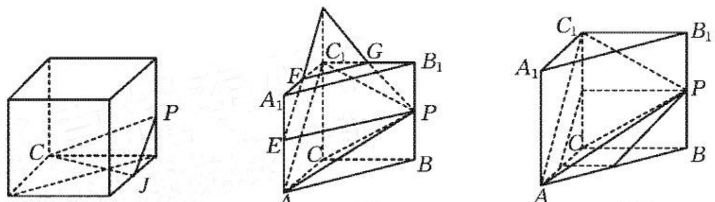
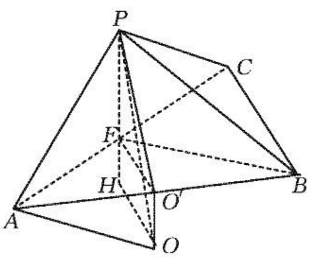


图1　图2　图3

13. $\frac{1}{4}$　因为$6=4a+9b\geqslant2\sqrt{36ab}=12\sqrt{ab}$，所以$\sqrt{ab}\leqslant\frac{1}{2}$，从而$ab\leqslant\frac{1}{4}$，当且仅当$a=\frac{3}{4}$，$b=\frac{1}{3}$时，等号成立.

14. $(-\infty,\frac{1}{2})$　因为$f(x)=2^x-\frac{1}{x+1}$在$[0,+\infty)$上单调递增，所以$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增. 因为$f(3x-1)<f(1-x)$，所以$3x-1<1-x$，解得$x<\frac{1}{2}$.

15. 20π　分别取AB，AC的中点O'，F，连接$O'F$，PF，BF. 由题意可知O'为直角三角形ABC斜边的中点. 因为$O'P=\sqrt{2}<O'A$，所以三棱锥$P-ABC$外接球的球心O在平面ABC的下方. 设三棱锥$P-ABC$外接球的球心为O，连接OO'，作$OH\perp PF$，垂足为H. 由题中数据可得$PF=1$，$OH=O'F=1$，$O'A=2$，$HF=OO'$. 设三棱锥$P-ABC$外接球的半径为R，则$R^2=O'A^2+O'O^2=OH^2+(PF+O'O)^2$，解得$R^2=5$，故三棱锥$P-ABC$外接球的表面积是$4\pi R^2=20\pi$.



16. $y=2x-\frac{25}{6}$　易知$B(0,1)$，$F(2,0)$，直线BF的斜率为$-\frac{1}{2}$，从而直线l的斜率为2.
设直线l的方程为$y=2x+m$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，
由$\begin{cases}x^2+5y^2=5,\\y=2x+m,\end{cases}$得$21x^2+20mx+5(m^2-1)=0$.

由 $\Delta=400m^2-20(m^2-1)\times21>0$，得 $m^2<21$，则 $x_1+x_2=-\frac{20}{21}m$，$x_1x_2=\frac{5m^2-5}{21}$.

由于右焦点 F 恰好为$\triangle BMN$ 的垂心，故$\overrightarrow{FN}\cdot\overrightarrow{BM}=0$.

而$\overrightarrow{FN}\cdot\overrightarrow{BM}=(x_2-2)x_1+y_2(y_1-1)=x_1x_2-2x_1+y_1y_2-y_2=5x_1x_2+(2m-2)(x_1+x_2)+m^2-m=\frac{25m^2-25}{21}-\frac{20m(2m-2)}{21}+m^2-m=\frac{6m^2+19m-25}{21}$，所以$\frac{6m^2+19m-25}{21}=0$，解得 $m=1$ 或 $m=-\frac{25}{6}$.

当 $m=1$ 时，点 B 即为直线 l 与椭圆的交点，不合题意；

当 $m=-\frac{25}{6}$时，经检验知 l 和椭圆相交，符合题意. 故直线 l 的方程为 $y=2x-\frac{25}{6}$.

17.(1)证明：因为当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=4a_{n-1}-3$，所以 $a_n-1=4a_{n-1}-4=4(a_{n-1}-1)$， …… 2分

所以$\frac{a_n-1}{a_{n-1}-1}=4$，即$\{a_n-1\}$是首项为$-2$，公比为 4 的等比数列. …… 4分

(2)解：由(1)知 $a_n-1=-2\times4^{n-1}=-2^{2n-1}$，

所以 $b_n=\log_4(1-a_n)=\frac{2n-1}{2}$， …… 6分

所以$\frac{1}{b_nb_{n+1}}=\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}=2(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$， …… 8分

所以 $S_n=2[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})]=2(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{4n}{2n+1}$. …… 10分

18.解：(1)因为 $a(\sin A-\sin C)+c\sin C=b\sin B$，

所以 $a(a-c)+c^2=b^2$， …… 2分

整理得 $a^2+c^2-b^2=ac$， …… 3分

所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$. …… 5分

又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$. …… 6分

(2)由(1)知 $B=\frac{\pi}{3}$，因为 $b=5$，所以 $25=a^2+c^2-2ac\times\frac{1}{2}=(a+c)^2-3ac$. …… 8分

又 $ac\leqslant(\frac{a+c}{2})^2=\frac{(a+c)^2}{4}$，所以 $25\geqslant\frac{(a+c)^2}{4}$， …… 10分

即 $a+c\leqslant10$，当且仅当 $a=c=5$ 时，等号成立， …… 11分

所以 $a+c+b\leqslant15$，即$\triangle ABC$ 周长的最大值为 15. …… 12分

19.解：(1)设抽取的 3 天生产的零件个数都不高于 39 为事件 A，甲公司记录的 30 天中，有 $5+9=14$ 天生产的零件个数不高于 39， …… 2分

则 $P(A)=\frac{C_{14}^3}{C_{30}^3}=\frac{13}{145}$. …… 4分

(2)依题意，甲公司员工的日平均生产零件个数为 $38\times\frac{1}{6}+39\times\frac{3}{10}+40\times\frac{1}{6}+41\times\frac{1}{5}+42\times\frac{1}{6}=39.9$，
…… 5分

所以甲公司员工的日平均工资为 $140+2\times39.9=219.8$ 元. …… 6分

设乙公司员工一天生产的零件数为 a，日工资为 X(单位：元)，

当 $a=40$ 时，$X=40\times4=160$，

当 $a=41$ 时，$X=41\times4=164$， …… 7分

当 $a=42$ 时，$X=42\times4=168$，

当 $a=43$ 时，$X=42\times4+1\times5=173$， …… 8分

当 $a=44$ 时，$X=42\times4+2\times5=178$，

所以 X 的所有可能取值为 160，164，168，173，178. …… 9分

故 X 的分布列为

X	160	164	168	173	178
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

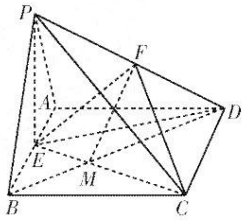
………………………………………………………………………… 10 分

所以 $E(X)=160\times\frac{1}{10}+164\times\frac{3}{10}+168\times\frac{1}{5}+173\times\frac{3}{10}+178\times\frac{1}{10}=168.5$.

乙公司员工的日平均工资为 168.5 元. ……………………………………………… 11 分

因为 $168.5<219.8$,所以推荐小明去甲公司应聘. ………………………………… 12 分

20. 解:(1)在线段 PD 上取一点 F,使得 $PF=\frac{1}{3}PD$,F 就是满足条件的点. …… 1 分



证明如下:设 BD 与 EC 交于点 M,连接 FM,

因为 $BE/\!/CD$,$BE=\frac{1}{2}CD$,所以 $\frac{BM}{BD}=\frac{1}{3}=\frac{PF}{PD}$,

所以 $PB/\!/MF$. ……………………………………………………… 2 分

又 $MF\subset$平面 EFC,$PB\not\subset$平面 EFC,所以 $PB/\!/$平面 EFC. …………………… 3 分

在$\triangle PAB$ 中,因为 $PA=PB=\sqrt{2}$,$AB=2$,所以 $PA^2+PB^2=AB^2$,即$\triangle PAB$ 为等腰直角三角形. …… 4 分

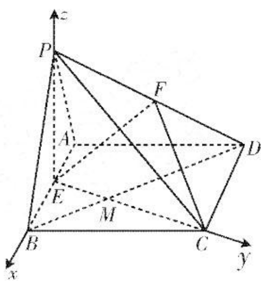
因为 E 为 AB 的中点,所以 $PE\perp AB$. 又平面 $PAB\perp$平面 $ABCD$,AB 为平面 PAB 与平面 $ABCD$ 的交线,所以 $PE\perp$平面 $ABCD$. ……………………………………………………… 5 分

连接 DE,在$\triangle ADE$ 中,由余弦定理可得 $DE^2=1^2+2^2-2\times1\times2\cos120^\circ=7$, ……………… 6 分

在直角$\triangle PED$ 中,由勾股定理可得 $PD=2\sqrt{2}$,此时 $PF=\frac{1}{3}PD=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. ……………………… 7 分

(2)以 E 为坐标原点,$\overrightarrow{EB}$,$\overrightarrow{EC}$,$\overrightarrow{EP}$的方向分别为 x 轴,y 轴,z 轴的正方向建立空间直角坐标系. 由 $AB=2$,$PA=PB=\sqrt{2}$,可得 $EP=EA=EB=1$,$EC=\sqrt{3}$.

所以 $E(0,0,0)$,$B(1,0,0)$,$C(0,\sqrt{3},0)$,$P(0,0,1)$,$D(-2,\sqrt{3},0)$. ………… 8 分



由于 F 为线段 PD 的中点,可知$\overrightarrow{EF}=(-1,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$,$\overrightarrow{PB}=(1,0,-1)$,$\overrightarrow{PD}=(-2,\sqrt{3},-1)$. ……………………………………………………… 9 分

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$为平面 PBD 的法向量,

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x-z=0,\\ -2x+\sqrt{3}y-z=0.\end{cases}$令 $x=z=1$,得 $y=\sqrt{3}$,$\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},1)$. ……………………………………………………… 10 分

设直线 EF 与平面 PBD 所成的角为 θ,则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{EF},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{EF}||\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$,

即直线 EF 与平面 PBD 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{10}}{10}$. ……………………………………… 12 分

21. 解:(1)由题意得 $c=2$, ……………………………………………………… 1 分

将点$(\sqrt{2},\sqrt{3})$的坐标代入方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,得$\frac{2}{a^2}-\frac{3}{b^2}=1$. ……………………………… 2 分

又因为 $c^2=a^2+b^2$,所以$\frac{2}{4-b^2}-\frac{3}{b^2}=1$,整理得 $b^4+b^2-12=0$,解得 $b^2=3$. ………………… 4 分

所以 $a^2=1$,双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………………… 5 分

(2)假设存在 $P(n,0)$满足条件,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

由题意知，直线 AB 的斜率不为 0，设直线 AB：$x=my+2$，

联立 $\begin{cases} x=my+2, \\ x^2-\frac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 消去 x 得 $(3m^2-1)y^2+12my+9=0$， …………………… 6 分

则 $3m^2-1\neq0$，$\Delta=(12m)^2-4\times9\times(3m^2-1)=36(m^2+1)>0$，

且 $y_1+y_2=-\frac{12m}{3m^2-1}$，$y_1y_2=\frac{9}{3m^2-1}$． …………………… 7 分

因为点 F 到直线 PA，PB 的距离相等，所以 PF 是 $\angle APB$ 的角平分线，…………………… 8 分

则 $k_{PA}+k_{PB}=0$，即 $\frac{y_1}{x_1-n}+\frac{y_2}{x_2-n}=0$，所以 $y_1(my_2+2-n)+y_2(my_1+2-n)=0$，

整理得 $2my_1y_2+(2-n)(y_1+y_2)=0$． …………………… 9 分

所以 $\frac{2m\times9}{3m^2-1}-\frac{(2-n)\times12m}{3m^2-1}=0$，整理得 $m(2n-1)=0$． …………………… 10 分

因为对于任意的 $m\neq\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，$m(2n-1)=0$ 恒成立，所以 $n=\frac{1}{2}$，

故存在点 $P(\frac{1}{2},0)$，使得点 F 到直线 PA，PB 的距离相等． …………………… 12 分

22. 证明：(1) $f'(x)=ae^{ax}-ax-1$． …………………… 1 分

设 $g(x)=ae^{ax}-ax-1$，$g'(x)=a^2e^{ax}-a=a^2(e^{ax}-\frac{1}{a})$． …………………… 2 分

因为 $a\geqslant1$，$x\geqslant0$，所以 $e^{ax}\geqslant1$，$\frac{1}{a}\leqslant1$，所以 $e^{ax}-\frac{1}{a}\geqslant0$，

所以 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，…………………… 3 分

所以 $f'(x)\geqslant f'(0)=a-1\geqslant0$，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数． …………………… 4 分

又 $f(0)=0$，所以 $f(x)\geqslant0$． …………………… 5 分

(2) 由(1)知，当 $a=1$ 时，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，且 $f(0)=0$，

所以 $e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1\geqslant0$，…………………… 6 分

即 $e^x\geqslant\frac{1}{2}x^2+x+1=\frac{x^2+2x+2}{2}>\frac{(x+1)^2}{2}$，…………………… 8 分

所以 $x>2\ln(x+1)-\ln 2$． …………………… 9 分

设 $x=\frac{1}{n}$，得 $\frac{1}{n}>2\ln\frac{n+1}{n}-\ln 2=2\ln(n+1)-2\ln n-\ln 2$，…………………… 10 分

所以 $1>2\ln 2-\ln 2$，

$\frac{1}{2}>2\ln 3-2\ln 2-\ln 2$，

$\frac{1}{3}>2\ln 4-2\ln 3-\ln 2$，

…

$\frac{1}{n}>2\ln(n+1)-2\ln n-\ln 2$，

所以 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>2\ln(n+1)-n\ln 2$，即 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>2\ln(n+1)-n\ln 2$． …………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。