

机密★启用前



高三数学考试(理科)

(考试时间:120分钟 试卷满分:150分)

注意事项:

- 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。
- 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | \frac{x}{2} < 1\}$, $B = \{x | y = \sqrt{x}\}$, 则 $A \cap B =$

A. $[-1, 2)$ B. $[0, 2)$ C. $[1, 2)$ D. $[0, 3)$

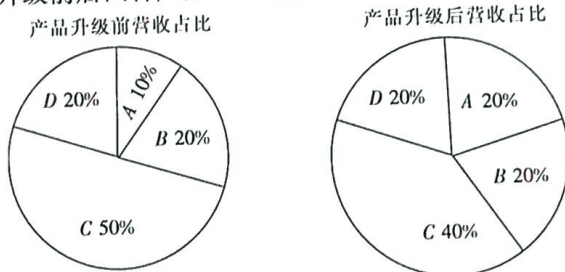
2. 设 $z = \frac{1}{1+i}$, 则 $z - \bar{z} =$

A. $-i$ B. i C. $1 - \frac{4}{3}i$ D. 0

3. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x - y + 1 \geq 0, \\ x + y - 2 \leq 0, \\ x - 2y - 2 \leq 0, \end{cases}$ 则 $z = 4x + y$ 的最大值为

A. 2 B. 5 C. 8 D. 10

4. 某企业对目前销售的 A, B, C, D 四种产品进行改造升级, 经过改造升级后, 企业营收实现翻倍。现统计了该企业升级前后四种产品的营收占比, 得到如下饼图:

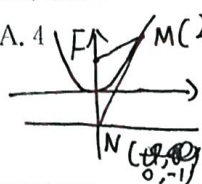


下列说法不正确的是

- 产品升级后, 产品 A 的营收是升级前的 4 倍 ✓
- 产品升级后, 产品 B 的营收是升级前的 2 倍 ✓
- 产品升级后, 产品 C 的营收减少 ✓
- 产品升级后, 产品 B, D 营收的总和占总营收的比例不变

5. 已知抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点为 F, 准线 l 与坐标轴交于点 N, M 是抛物线上一点, 若 $|FN| = |FM|$, 则 $\triangle FMN$ 的面积为

- A. 4 B. $2\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{2}$ D. 2



高三数学 第 1 页 (共 4 页) 理科

578C-乙卷

考号

姓名

班级

学校

题
答
要
不
内
线
封
密

B 6. 已知

A 7. 已知

C 8. 第

D 9.

D 11

P

6. 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx$ 在 $x=1$ 处取得极大值 4, 则 $a-b =$
7. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_3 = 2(S_2 + S_1)$, $S_5 = 35$, 则 $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} =$

8. 第 19 届亚运会将于 2023 年 9 月 23 日至 10 月 8 日在杭州举行. 甲、乙等 4 名杭州亚运会志愿者到游泳、射击、体操三个场地进行志愿服务, 每名志愿者只去一个场地, 每个场地至少一名志愿者, 若甲不去游泳场地, 则不同的安排方法共有

9. 如图, 这是古希腊数学家特埃特图斯用来构造无理数 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots$ 的图形, 已知 P 是平面四边形的内一点, 则 $\vec{CB} \cdot \vec{CP}$ 的取值范围是

10. 已知直线 $l: 4x - 2y - 7 = 0$ 与双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线分别交于点 A, B (不重合), AB 的垂直平分线过点 $(3, 0)$, 则双曲线 C 的离心率为

11. 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为 AB_1 的中点, M 是截面 A_1ACC_1 上的一个动点 (不包含边界), $A_1M \perp AB_1$, 则 $AM + EM$ 的最小值为

12. 现有下列四个不等式:
- ① $\frac{1}{3} < \ln \frac{4}{3}$; ② $e - \log_2 e > 1$; ③ $0.9 > e^{0.1} - 0.1e$; ④ $(\sqrt{e} - 1) \ln \frac{3}{2} < \frac{1}{4}$.

- 其中所有正确结论的编号是
- 二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡的相应位置.

13. 如图, 三个相同的正方形相接 (在同一平面中), 则 $\tan \angle FAD =$

14. 已知函数 $f(x) = x^3 + x$. 若 $f(2x-1) + f(2-x) > 0$, 则 x 的取值范围是

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \quad R=1$$

15. 已知一个圆锥的内切球的体积为 $\frac{4}{3}\pi$, 则该圆锥体积的最小值为 $\triangle 3\pi$.

16. 为激发大家学习数学的兴趣, 在一次数学活动课上, 老师设计了有序实数组 $A = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$, $a_i \in \{-1, 0, 1\} (i=1, 2, 3, \dots, n)$, $f(A)$ 表示把 A 中每个 -1 都变为 $-1, 0$, 每个 0 都变为 $-1, 1$, 每个 1 都变为 $0, 1$ 所得到的新的有序实数组, 例如: $A = (-1, 0, 1)$, 则 $f(A) = (-1, 0, -1, 1, 0, 1)$. 定义 $A_{k+1} = f(A_k), k=1, 2, 3, \dots$. 若 $A_1 = (-1, 1)$, 则 A_{2023} 中有 \triangle 个 1 . $f(A_{2022})$

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤. 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22, 23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 $a, b, c, \sqrt{3}b = 2c \sin(\frac{\pi}{3} - A)$.

(1) 求 C 的大小;

(2) 若点 D 满足 $\vec{AD} = \vec{CA}, |\vec{CD}| = |\vec{CB}|, |\vec{BD}| = 2\sqrt{3}$, 求 c .

18. (12 分)

“绿色出行, 低碳环保”已成为新的时尚. 近几年, 国家相继出台了一系列的环保政策, 在汽车行业提出了重点扶持新能源汽车的政策, 为新能源汽车行业的发展开辟了广阔的前景. 某公司对 A 充电桩进行生产投资, 所获得的利润有如下统计数据表, 并计算得 $\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 30$.

A 充电桩投资金额 x /百万元	30	40	60	71	92	102
所获利润 y /百万元	1.5	2	3	4.5	6	7

(1) 已知可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系, 求其线性回归方程;

(2) 若规定所获利润 y 与投资金额 x 的比值不低于 $\frac{2}{3}$, 则称对应的投入额为“优秀投资额”,

记 2 分, 所获利润 y 与投资金额 x 的比值低于 $\frac{2}{3}$ 且大于 $\frac{1}{2}$, 则称对应的投入额为“良好投资额”,

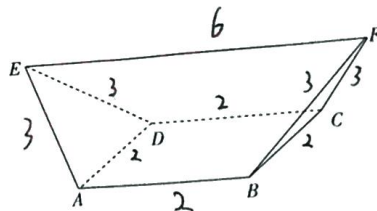
记 1 分, 所获利润 y 与投资金额 x 的比值不超过 $\frac{1}{2}$, 则称对应的投入额为“不合格投资额”,

记 0 分, 现从表中 6 个投资金额中任意选 2 个, 用 X 表示记分之和, 求 X 的分布列及数学期望.

附: 对于一组数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, 其回归直线方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 的斜率和截

$$\text{距的最小二乘法估计公式分别为 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

19. (12分)
《九章算术》中记录的“羡除”是算学和建筑学术语,指的是一个类似隧道形状的几何体.如图,在羡除 $ABCDEF$ 中,底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, $EF \parallel AB$, $EF=6$, $EA=ED=FB=FC=3$.



- (1) 证明: 平面 $ADE \perp$ 平面 FBC .
(2) 求平面 $ABFE$ 与平面 FBC 夹角的余弦值.

20. (12分)
已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(2, 0)$, 且 $P(-2, \sqrt{2})$ 是椭圆 C 上一点.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
(2) 若过 F 的直线 l_1 (与 x 轴不重合) 与椭圆 C 相交于 A, B 两点, 过 F 的直线 l_2 与 y 轴交于点 M , 与直线 $x=4$ 交于点 N (l_1 与 l_2 不重合), 记 $\triangle MFB, \triangle NFB, \triangle NFA, \triangle AFM$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3, S_4 , 若 $\sqrt{S_2 S_4} = \frac{\sqrt{3}}{4} (S_1 + S_3)$, 求直线 l_1 的方程.

21. (12分)
已知函数 $f(x) = xe^{x-a} - \ln x - \ln a (a > 0)$.

- (1) 若 $f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线 l 与直线 $x+y+1=0$ 垂直, 求直线 l 的方程;

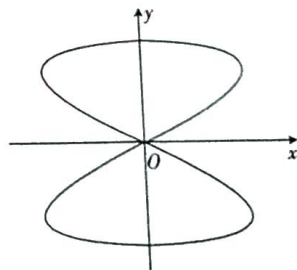
- (2) 已知 $0 < a < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 证明: $f(x) > \frac{a}{a+1}$.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生从第 22, 23 两题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一个题目计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

数学中有许多美丽的曲线, 例如曲线 $E: \begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \cos t \end{cases} (t \text{ 为参数})$ 的形状如数字 8 (如图), 动点 A, B 都在曲线 E 上, 对应参数分别为 $t = \alpha$ 与 $t = \frac{\pi}{2} - \alpha (0 < \alpha < 2\pi)$, 设 O 为坐标原点, $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$.

(1) 求 C 的轨迹的参数方程;
(2) 求 C 到坐标原点的距离 d 的最大值和最小值.



23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10分)

已知函数 $f(x) = |x-2| + 2|x-4|$.

- (1) 求不等式 $f(x) \geq 8$ 的解集;

- (2) 若关于 x 的不等式 $f(x) - |x-4| \geq -x^2 + 4x + m$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

