

数学试题

注意事项:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分. 考生做题时将答案答在答题卡的指定位上, 在本试卷上答题无效.
2. 答题前, 考生务必先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.
3. 选择题答案使用 2B 铅笔填涂, 非选择题答案使用 0.5 毫米的黑色中性(签字)笔或碳素笔书写, 字体工整, 笔迹清楚.
4. 请按照题号在各题的答题区域(黑色线框)内作答, 超出答题区域书写的答案无效.
5. 保持卷面清洁, 不折叠、不破损.

第 I 卷 选择题(共 60 分)

一、选择题(本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.)

1. 直线 a, b, c 的斜率分别为 $2, 1, -2$, 倾斜角分别为 α, β, γ , 则

A. $\alpha > \beta > \gamma$	B. $\gamma > \alpha > \beta$	C. $\gamma > \beta > \alpha$	D. $\alpha > \gamma > \beta$
------------------------------	------------------------------	------------------------------	------------------------------
2. 函数 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 6$ 在 $[-2, 2]$ 上的最小值为

A. $\frac{130}{27}$	B. 6	C. -10	D. -11
---------------------	------	--------	--------
3. 某市农科所实验基地现有并排的 10 块试验田, 选择其中的两块分别种植 A, B 两种作物, 每块种植一种作物, 要求 A, B 两种作物的间隔不小于 6 块试验田, 则不同的种植方法共有

A. 12 种	B. 18 种	C. 24 种	D. 36 种
---------	---------	---------	---------
4. 设数列 $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列, 且 $a_1 a_2 a_3 \cdots a_{30} = 2^{30}$, 则 $a_2 a_5 a_8 \cdots a_{29} =$

A. 2^{25}	B. 2^{20}	C. 2^{15}	D. 2^{10}
-------------	-------------	-------------	-------------
5. 在单位正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为 C_1D_1 的中点, 则点 M 到平面 A_1BD 的距离为

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$	B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$	C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$	D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
-------------------------	-------------------------	-------------------------	--------------------------
6. 过坐标原点 O 作圆 $C: x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ 的两条切线, 切点分别为 M, N , 则 $|MN| =$

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$	B. $\frac{3}{2}$	C. $\sqrt{3}$	D. 2
-------------------------	------------------	---------------	------
7. 若 $f(x) = \log_{0.5}(x^3 - 3x^2 + ax + 6)$ 在区间 $(1, 2)$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围为

A. $(-\infty, 0]$	B. $[-1, +\infty)$	C. $[-1, 0]$	D. $(-1, 0)$
-------------------	--------------------	--------------	--------------
8. 设 $a = -\ln 0.9, b = 0.1, c = \sin 0.1$, 则

A. $a > b > c$	B. $c > b > a$	C. $b > a > c$	D. $c > a > b$
----------------	----------------	----------------	----------------

二、选择题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.)

9. 若椭圆 $\frac{x^2}{k+8} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 则实数 k 的值可能为
- A. $-\frac{5}{4}$ B. $\frac{5}{4}$ C. -4 D. 4
10. 设等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n, T_n , 若 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{7n+51}{n+3}$, 则满足 $\frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{Z}$ 的 n 的值可能为
- A. 2 B. 4 C. 12 D. 14
11. 设 $(2x-1)^{2023} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2023}x^{2023}$, 则
- A. $a_2 = 2023 \times 4044$ B. $a_2 = -2023 \times 4044$
- C. $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 2023a_{2023} = 2023$ D. $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 2023a_{2023} = 4046$
12. 定义在 $(0, \pi)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) < \frac{\cos x f(x)}{\sin x}$ 恒成立, 则
- A. $f(\frac{\pi}{3}) > f(\frac{2\pi}{3})$ B. $f(\frac{\pi}{3}) < f(\frac{2\pi}{3})$
- C. $\sqrt{2}f(\frac{\pi}{4}) > f(\frac{\pi}{2})$ D. $\sqrt{2}f(\frac{\pi}{4}) < f(\frac{\pi}{2})$

第 II 卷 非选择题(共 90 分)

三、填空题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.)

13. 已知 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_{2023} = 119$, 则 $a_{1012} =$ _____.
14. 曲线 $y = 2x - \frac{1}{x} + 1$ 在 $x = 1$ 处的切线方程为 _____.
15. 已知 F 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点, P 为双曲线 C 右支上的一点, 且 $Rt\triangle OPF$ 的三个内角 $\angle PFO, \angle POF, \angle OPF$ 成等差数列(公差 $d > 0$), 则双曲线 C 的离心率 $e =$ _____.
16. 记 $f(n)$ 为正整数 n 的最大奇因数, 如 $f(2023) = 2023, f(2022) = 1011$, 设 $a_n = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2^n)$, 则 $a_3 =$ _____ (本空 2 分); $a_n =$ _____ (本空 3 分)

四、解答题(本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17.(本小题满分 10 分)

某收费 APP(手机应用程序)自上架以来,凭借简洁的界面设计、方便的操作方式和强大的实用功能深得用户的喜爱.该 APP 所在公司统计了用户一个月月租减免的费用 x (单位:元)及该月对应的用户数量 y (单位:万人),得到如下数据表格:

x	3	4	5	6	7
y	1	1.1	1.5	1.9	2.2

已知 x 与 y 线性相关

(1)求 y 关于 x 的线性回归方程($\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 135, \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 41.7$);

(2)据此预测,当月租减免费用为 10 元时,该月用户数量为多少?

附:

参考公式:对于一组具有线性相关关系的数据 $(x_i, y_i) (i=1, 2, 3, \dots, n)$, 其回归直线

$$\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$$

的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}$.

18.(本小题满分 12 分)

为了解同学们对数学感兴趣程度,现对某校高二年级不同分数段(满分 150 分)的学生对数学感兴趣程度进行调查(只有感兴趣和不感兴趣两个选项且每人必须选择其中一项),随机抽调了 50 人,各分数段频数(单位:人)及对数学感兴趣人数如下表:

成绩	[0, 90)	[90, 100)	[100, 110)	[110, 120)	[120, 130)	[130, 150]
频数	5	10	15	10	5	5
感兴趣人数	1	3	5	7	4	5

(1)根据以上统计数据完成下面的 2×2 列联表,并判断能否有 99.9% 的把握认为“该校高二年级学生对数学的感兴趣程度与成绩不低于 110 分有关”?

成绩	低于 110 分	不低于 110 分	合计
感兴趣			
不感兴趣			
合计			50

(2)若在成绩为 $[90, 110)$ 分数段并且对数学感兴趣的同学中随机抽取4人,求成绩来自 $[90, 100)$ 这一分数段的人数 X 的分布列及数学期望.

$$\text{附: } \chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, n=a+b+c+d$$

P	0.050	0.025	0.01	0.005	0.001
χ^2	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19. (本小题满分12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,且 $S_n=2a_n-1(n \in \mathbf{N}^*)$,

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)设 $b_n=a_n \log_2 a_n$,求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

20. (本小题满分12分)

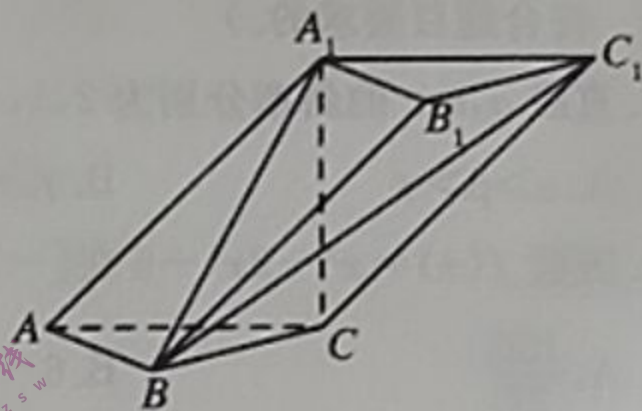
三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,平面 $ACC_1A_1 \perp$ 平面 ABC ,

$\triangle ABC$ 是等边三角形, $\angle A_1AC=45^\circ$, $AA_1=2\sqrt{2}$,

$AC=2$.

(1)证明:平面 $A_1BC \perp$ 平面 ABC ;

(2)求二面角 $A_1-BC_1-B_1$ 的平面角的余弦值.



21. (本小题满分12分)

已知抛物线 $E: y^2=x$ 的焦点为 F ,过 x 轴正半轴上一点 M 的直线 l 与抛物线 E 交于 A, B 两点, O 为坐标原点,且 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}=6$.

(1)求点 M 的坐标;

(2)设点 F 关于直线 OB 的对称点为 C ,求四边形 $OABC$ 面积的最小值.

22. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x)=\ln x - kx^2 (k \in \mathbf{R})$ 有两个零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$.

(1)求实数 k 的取值范围;

(2)证明: $\ln x_1 + \ln x_2 > 1$.