高三文科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分.满分 150 分,考试时间 120 分钟.
2. 答题前,考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚.
3. 考生作答时,请将答案答在答题卡上.选择题每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答,**超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上作答无效.**
4. 本试卷主要命题范围:高考范围.

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{-6,-3,-1,0,2,4,5\}$,$B=\{x|x^2-2x-8<0\}$,则 $A\cap B=$

A. $\{-6,-1,0,2\}$　　B. $\{-3,-1,0,2,4\}$　　C. $\{-1,0,2\}$　　D. $\{-1,0,2,4\}$

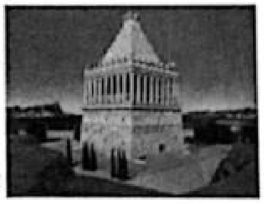
2. 已知复数 z 满足 $z-i=iz+3$(i 为虚数单位),则复数 $z=$

A. $-1-2i$　　B. $-1+2i$　　C. $1-2i$　　D. $1+2i$

3. 某校拟从 1 200 名高一新生中采用系统抽样的方式抽取 48 人参加市"抗疫表彰大会",如果编号为 237 的同学参加该表彰大会,那么下列编号中不能被抽到的是

A. 327　　B. 937　　C. 387　　D. 1 087

4. 摩索拉斯陵墓位于哈利卡纳素斯,在土耳其(TURKEY)的西南方,陵墓由下至上分别是墩座墙、柱子构成的拱廊、四棱锥金字塔以及由四匹马拉着的一架古代战车的雕像,总高度 45 米,其中墩座墙和柱子围成长、宽、高分别是 40 米、30 米、32 米的长方体,长方体的上底面与四棱锥的底面重合,顶点在底面的射影是长方形对角线交点,最顶部的马车雕像高 6 米,则陵墓的高与金字塔的侧棱长之比大约为(注:$\sqrt{674}\approx 25.962$)

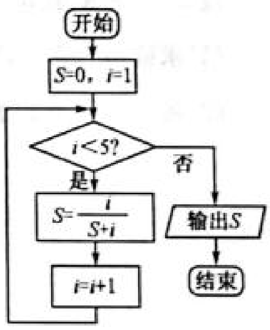


A. 2.77　　B. 2.43　　C. 1.73　　D. 1.35

5. 已知 $a=\log_2 3\cdot\log_3 5$,$b=\log_{\sqrt{2}}\frac{9}{4}$,$c=2^{0.99}$,则

A. $a<c<b$　　B. $c<a<b$　　C. $a<b<c$　　D. $c<b<a$

6. 执行如图所示的程序框图,则输出 S 的值为



A. $\frac{44}{53}$　　B. $\frac{9}{11}$

C. $\frac{11}{13}$　　D. $\frac{265}{309}$

7. 长征路公共汽车 10 分钟一班准时到达红旗车站,假设公共汽车到站后每人都能上车,则任一人在红旗车站等车少于 6 分钟的概率是

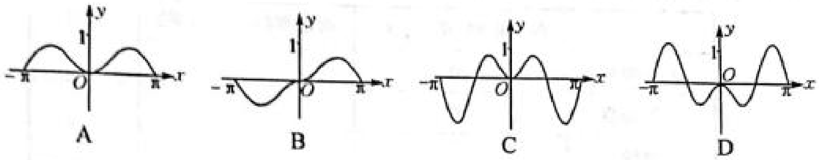
A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{3}{5}$

8. 已知正项等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1+a_2=\frac{5}{2}$，$a_3+a_4=\frac{45}{8}$，则$S_5=$

A. $\frac{105}{8}$　　B. $\frac{211}{16}$　　C. $\frac{53}{4}$　　D. $\frac{27}{2}$

9. 函数$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}\cdot\sin x$在$[-\pi,\pi]$上的图象大致为



10. 已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(0<\omega<4,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$，$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=0$，则$f(x)=$

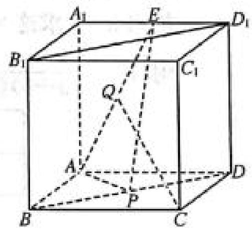
A. $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$　　B. $\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$　　C. $\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$　　D. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

11. 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，P为底面$ABCD$的中心，E为线段A_1D_1上的动点(不包括两个端点)，Q为线段AE的中点．现有以下结论：

①PE与QC是异面直线；②过A，P，E三点的正方体的截面是等腰梯形；

③平面$APE\perp$平面BDD_1B_1；④PE//平面CDD_1C_1．

其中正确结论的序号是



A. ①④　　B. ②③

C. ②④　　D. ①③

12. 点F为抛物线C：$y^2=4x$的焦点，横坐标为$m(m>0)$的点P为抛物线C上一点，过点P且与抛物线C相切的直线l与y轴相交于点Q，则$\tan\angle FPQ=$

A. $\sqrt{m}$　　B. $\frac{1}{\sqrt{m}}$　　C. $\frac{\sqrt{m+1}}{2}$　　D. $\frac{2}{\sqrt{m+1}}$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知实数x,y满足$\begin{cases}x-2y\geqslant 0,\\x-y-2\leqslant 0,\\y\geqslant 0,\end{cases}$则$z=x+y$的最大值是________.

14. 若单位向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为________.

15. 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=9-2n$，则数列$\{a_n\}$中最大项的数值为________.

16. 已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为$F$，$A$为双曲线$C$的右顶点，过点$F$作$x$轴的垂线，与双曲线$C$交于$P$，若直线$AP$的斜率是双曲线$C$的一条渐近线斜率的$\sqrt{3}$倍，则双曲线$C$的离心率为________.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共60分。

17. (本小题满分12分)

在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，$a\sin B=\sqrt{3}b\cos A$.

(1)求角A的大小；

(2)若$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6$，$a=\sqrt{13}$，求$\sin B+\sin C$.

18.(本小题满分 12 分)

西瓜堪称"盛夏之王",清爽解渴,味甘多汁,是盛夏佳果,西瓜除不含脂肪和胆固醇外,含有大量葡萄糖、苹果酸、果糖、蛋白氨基酸、番茄素及丰富的维生素 C 等物质,是一种营养丰富、纯净、食用安全的食品.炎热的夏季里,人们都会吃西瓜来消暑解渴,某西瓜种植户统计了 2020 年 6 月、7 月、8 月、9 月共计 120 天天气"炎热"还是"凉爽"使得西瓜销售"畅销"还是"滞销"的列联表如下:

	西瓜畅销(单位:天)	西瓜滞销(单位:天)	总计
天气炎热	70	20	
天气凉爽	20	a	
总计			

(1)求实数 a 的值;

(2)完成上述列联表,并判断能否有 85%的把握认为西瓜的销量好坏与天气因素有关?

(3)若利用分层抽样的方法在西瓜滞销的天数里,按天气炎热、天气凉爽抽取 6 天,再从这 6 天中随机抽出 2 天,求这 2 天天气情况不同的概率.

附:$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,其中 $n=a+b+c+d$.

k	1.323	2.072	2.701	3.841
$P(K^2\geqslant k)$	0.25	0.15	0.10	0.05

19.(本小题满分 12 分)

如图 1 中,多边形 $ABCDE$ 为平面图形,其中 $AB=AE=\sqrt{3}$,$BE=BC=2$,$CD=4$,$BE\parallel CD$,$BC\perp CD$,将$\triangle ABE$沿 BE 边折起,得到如图 2 所示四棱锥 $P\text{-}BCDE$,其中点 P 与点 A 重合.

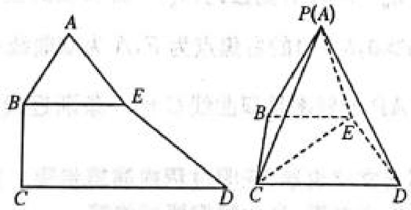


图 1　　图 2

(1)当 $PD=\sqrt{11}$时,求证:$DE\perp$平面 PCE;

(2)当平面 $PBE\perp$平面 $BCDE$ 时,求三棱锥 $P\text{-}CDE$ 的体积.

20.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{a+2}{2}x^2+2ax+1(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 的极大值和极小值；

(2)当 $a\leqslant 6$ 时判断 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内零点的个数，并说明理由.

21.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，过 F_2 且垂直于 x 轴的直线与 C 交于 M,N 两点，且 M 的坐标为 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)过 F_2 作与直线 MN 不重合的直线 l 与 C 相交于 P,Q 两点，若直线 PM 和直线 QN 相交于点 T，求证：点 T 在定直线上.

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.（本小题满分 10 分）选修 4-4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-\frac{1}{2}t,\\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\cos\alpha,\\ y=\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）. 以原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴，建立极坐标系.

(1)求直线 l 和曲线 C 的极坐标方程；

(2)已知 A 是曲线 C 上一点，B 是直线 l 上位于极轴所在直线上方的一点，若 $|OB|=2$，求 $\triangle AOB$ 面积的最大值.

23.（本小题满分 10 分）选修 4-5：不等式选讲

设 $a,b,c\in\mathbf{R}$，且 $a+b+c=1$.

(1)求证：$a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}$；

(2)用 $\max\{a,b,c\}$ 表示 a,b,c 的最大值，求 $\max\{a+b,b+c,c+a\}$ 的最小值.

高三文科数学参考答案、提示及评分细则

1. C　由 $B=\{x|-2<x<4\}$，所以 $A\cap B=\{-1,0,2\}$. 故选 C.

2. D　$z=\frac{3+i}{1-i}=\frac{(3+i)(1+i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2+4i}{2}=1+2i$. 故选 D.

3. A　依据题意，抽样间隔为 25，又 237 除以 25 的余数为 12，故所抽取的编号为 $12+25k(k=0,1,\cdots,47)$，所以 327 不符合. 故选 A.

4. C　根据长、宽分别是 40 米、30 米得金字塔的底面对角线长 50 米，可算出四棱锥高 7 米，所以侧棱长为 $\sqrt{7^2+25^2}=\sqrt{674}$，则陵墓的高与金字塔的侧棱长之比大约为 $\frac{45}{\sqrt{674}}\approx1.73$. 故选 C.

5. B　$a=\log_2 5>2$，$b=\log_2\frac{81}{16}>\log_2\frac{80}{16}=\log_2 5=a$，$c<2$，有 $c<a<b$. 故选 B.

6. A　$i=1$ 时，$S=1$；$i=2$ 时，$S=\frac{2}{3}$；$i=3$ 时，$S=\frac{3}{\frac{2}{3}+3}=\frac{9}{11}$；$i=4$ 时，$S=\frac{4}{\frac{9}{11}+4}=\frac{44}{53}$，$i=5$ 不满足条件，退出循环，输出 $\frac{44}{53}$. 故选 A.

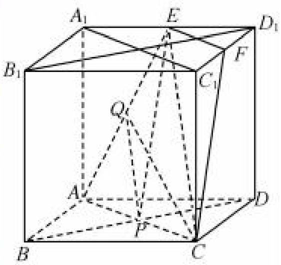
7. D　设上一班车离站时刻为 t，则该人到站的时刻的一切可能为 $(t,t+10)$，若在该站等车少于 6 分钟，则到站的时刻为 $(t+4,t+10)$，所以所求概率为 $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$. 故选 D.

8. B　设公比为 $q(q>0)$，有 $q=\sqrt{\frac{a_3+a_4}{a_1+a_2}}=\sqrt{\frac{\frac{45}{8}}{\frac{5}{2}}}=\frac{3}{2}$，$a_1+\frac{3}{2}a_1=\frac{5}{2}$，可得 $a_1=1$，所以 $S_5=\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^5}{1-\frac{3}{2}}=\frac{211}{16}$. 故选 B.

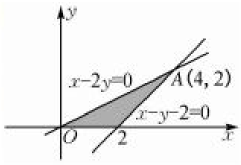
9. A　由 $f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\cdot\sin(-x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}\cdot\sin x=f(x)$，可知 $f(x)$ 为偶函数，又由当 $x\in[0,\pi]$ 时，$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}\cdot\sin x\geqslant0$. 故选 A.

10. A　由题意有 $\begin{cases}\frac{\pi\omega}{12}+\varphi=k_1\pi,\\ \frac{7\pi\omega}{12}+\varphi=k_2\pi\end{cases}(k_1,k_2\in\mathbf{Z})$，两式作差得 $\frac{\pi\omega}{2}=(k_2-k_1)\pi(k_1,k_2\in\mathbf{Z})$，有 $\omega=2(k_2-k_1)(k_1,k_2\in\mathbf{Z})$，又由 $0<\omega<4$，可得 $\omega=2$，$\varphi=k\pi-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$. 又由 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，可得 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$，故有 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$. 故选 A.

11. B　连接 PC，因为 P 为正方形 $ABCD$ 的中心，所以 P 是 AC 的中点，又 Q 为线段 AE 的中点，所以 $PQ\parallel CE$，从而 P、Q、E、C 四点共面，即 PE 与 QC 共面，则①错误；连接 A_1C_1，过 E 作 $EF\parallel A_1C_1$ 交 C_1D_1 于点 F，连接 CF，则四边形 $ACFE$ 是正方体过 A、P、E 三点的截面（因为 $EF\parallel A_1C_1\parallel AC$，且 $EF<A_1C_1=AC$），易证四边形 $ACFE$ 为等腰梯形，故②正确；可证 $AP\perp$ 平面 BDD_1B_1，结合 $AP\subset$ 平面 APE，可得平面 $APE\perp$ 平面 BDD_1B_1，则③正确；假设 $PE\parallel$ 平面 CDD_1C_1，又 $PE\subset$ 平面 $ACFE$，平面 $CDD_1C_1\cap$ 平面 $ACFE=CF$，所以 $PE\parallel CF$，又 $EF\parallel PC$，所以四边形 $PCFE$ 为平行四边形，从而 $EF=PC=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}A_1C_1$，所以 EF 是 $\triangle A_1C_1D_1$ 的中位线，即 E 是 A_1D_1 的中点，这与"E 为线段 A_1D_1 上的动点"矛盾，故④错误.



12. B　由抛物线的对称性，不妨设点 P 位于第一象限，可得点 P 的坐标为 $(m,2\sqrt{m})$，设直线 l 的方程为 $y=k(x-m)+2\sqrt{m}$，联立方程 $\begin{cases}y^2=4x,\\ y=k(x-m)+2\sqrt{m},\end{cases}$ 消去 x 后整理为 $ky^2-4y+8\sqrt{m}-4km=0$，有 $\Delta=16-4k(8\sqrt{m}-4km)=0$，有 $mk^2-2\sqrt{m}k+1=0$，解得 $k=\frac{1}{\sqrt{m}}$，可得直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{\sqrt{m}}x+\sqrt{m}$，令 $y=0$，得 $x=-m$，直线 l 与 x 轴的交点 D 的坐标为 $(-m,0)$，所以 $|DF|=1+m$. 又 $|PF|=m+1$，所以 $|PF|=|DF|$，所以 $\angle FPQ=\angle FDP$，所以 $\tan\angle FPQ=\tan\angle FDP=k=\frac{1}{\sqrt{m}}$. 故选 B.



13. 6　画出可行域，如图所示，当直线 $x+y-z=0$ 过点 $A(4,2)$ 时，z 取得最大值，故 $z_{\max}=4+2=6$.

14. $\frac{\pi}{3}$　由 $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，得 $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}$，又 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$，所以 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$.

15. 17　当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=(11-2n)+(13-2n)+\cdots+7+1=9(n-1)-2\times\frac{(n-1)n}{2}+1=-n^2+10n-8=-(n-5)^2+17$，所以数列 $\{a_n\}$ 中最大项的数值为 17.

16. 2　设焦点 F 的坐标为 $(c,0)$，双曲线 C 的离心率为 e，不妨设点 P 位于第一象限，可求得点 P 的坐标为 $\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$，点 A 的坐标为 $(a,0)$，直线 AP 的斜率为 $\frac{\frac{b^2}{a}}{c-a}=\frac{c^2-a^2}{a(c-a)}=\frac{c+a}{a}=e+1$，又由 $\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{c^2-a^2}{a^2}}=\sqrt{e^2-1}$，有 $e+1=\sqrt{3(e^2-1)}$，整理为 $e^2-e-2=0$，解得 $e=2$ 或 $e=-1$(舍).

17. 解：(1)由正弦定理，得 $\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B\cos A$，……………………………… 2 分

因为 $\sin B>0$，所以 $\sin A=\sqrt{3}\cos A$，即 $\tan A=\sqrt{3}$.……………………………… 4 分

由 $0<A<\pi$，得 $A=\frac{\pi}{3}$.……………………………… 6 分

(2)由题意，得 $cb\cos\frac{\pi}{3}=6$，即 $bc=12$，……………………………… 8 分

由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-bc$，即 $a^2=(b+c)^2-3bc$，

由 $a=\sqrt{13}$ 及 $bc=12$，解得 $b+c=7$，……………………………… 10 分

由正弦定理，得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$，即 $\frac{b+c}{\sin B+\sin C}=\frac{a}{\sin A}$，

所以 $\sin B+\sin C=\frac{(b+c)\sin A}{a}=\frac{7\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{13}}=\frac{7\sqrt{39}}{26}$.……………………………… 12 分

18. 解：(1) $a=120-70-20-20=10$.……………………………… 1 分

(2)填写列联表如下：

	西瓜畅销(单位:天)	西瓜滞销(单位:天)	总计
天气炎热	70	20	90
天气凉爽	20	10	30
总计	90	30	120

……………………………… 3 分

$K^2=\frac{120\times(70\times10-20\times20)^2}{90\times30\times90\times30}\approx1.481<2.072$，

故没有 85% 的把握认为西瓜的销量好坏与天气因素有关.……………………………… 7 分

(3)天气炎热的天数为 $20\times\frac{6}{30}=4$ 天，分别记作 a、b、c、d，

天气凉爽的天数为 $10\times\frac{6}{30}=2$ 天，分别记作 x、y，

从这 6 天中随机抽取两天包括的基本事件为 (a,b)、(a,c)、(a,d)、(a,x)、(a,y)、(b,c)、(b,d)、(b,x)、(b,y)、(c,d)、(c,x)、(c,y)、(d,x)、(d,y)、(x,y)，共 15 个，……………………………… 9 分

这 2 天天气不同的基本事件为 (a,x)、(a,y)、(b,x)、(b,y)、(c,x)、(c,y)、(d,x)、(d,y)，共 8 个，……………… 11 分

故这 2 天天气情况不同的概率为 $\frac{8}{15}$.……………………………… 12 分

19. (1)证明：由 $BE/\!/CD$，$BC\perp CD$，$BE=BC=2$，$CD=4$，易求 $CE=DE=2\sqrt{2}$，

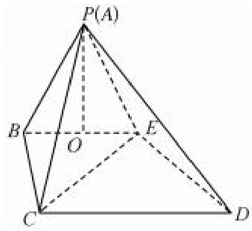
所以 $CE^2+DE^2=CD^2$，所以 $DE\perp CE$.……………………………… 2 分

因为 $PE=\sqrt{3}$，$PD=\sqrt{11}$，所以 $DE^2+PE^2=11=PD^2$，所以 $DE\perp PE$.……………………………… 3 分

又 $PE\cap CE=E$，PE，$CE\subset$ 平面 PCE，

所以 $DE\perp$ 平面 PCE.……………………………… 6 分

(2)解：如图，取 BE 的中点 O，连 OP.



因为 $BP=EP=\sqrt{3}$，$BE=2$，所以 $OP\perp BE$，$OP=\sqrt{2}$. ………………………………………… 8 分

因为平面 $PBE\perp$ 平面 $BCDE$，$OP\perp BE$，平面 $PBE\cap$ 平面 $BCDE=BE$，$OP\subset$ 平面 PBE，

所以 $OP\perp$ 平面 $BCDE$. ……………………………………………………………………… 10 分

所以 OP 为三棱锥 P-CDE 的高，

因为 $\triangle CDE$ 为直角三角形，$DE\perp CE$，

所以 $V_{P\text{-}CDE}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$. ………………………………………… 12 分

20. 解：(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x+1$，则 $f'(x)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$. ……………………………… 1 分

由 $f'(x)<0$，得 $1<x<2$；由 $f'(x)>0$ 得 $x<1$ 或 $x>2$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 和 $(2,+\infty)$ 上是增函数，在 $(1,2)$ 上是减函数. …………………………………………………… 2 分

所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极大值点，$x=2$ 是 $f(x)$ 的极小值点，

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(1)=\frac{11}{6}$，$f(x)$ 的极小值为 $f(2)=\frac{5}{3}$. ……………………………………………………… 4 分

(2) $f'(x)=x^2-(a+2)x+2a=(x-a)(x-2)(x>0)$， ……………………………………………………… 5 分

①当 $a\leqslant0$ 时，$x-a$ 恒正，于是，当 $0<x<2$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上是减函数，在 $(2,+\infty)$ 上是增函数，

所以 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极小值点，且 $f(2)=2a-\frac{1}{3}<0$，

又 $f(0)=1>0$，$f(4)=\frac{19}{3}>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 和 $(2,4)$ 内各有一个零点，

即当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有两个零点. ……………………………………………………………… 7 分

②当 $0<a<2$ 时，列表如下：

x	$(0,a)$	a	$(a,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	增函数	极大值	减函数	极小值	增函数

考虑到 $f(a)=\frac{a^3}{3}-\frac{a+2}{2}\cdot a^2+2a^2+1=\frac{1}{6}a^2(6-a)+1>0$，$f(0)=1>0$，

当 $f(2)=2a-\frac{1}{3}<0$，即 $0<a<\frac{1}{6}$ 时，因为 $f(4)=\frac{19}{3}>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有两个零点；

当 $f(2)=2a-\frac{1}{3}=0$，即 $a=\frac{1}{6}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有一个零点；

当 $f(2)=2a-\frac{1}{3}>0$，即 $\frac{1}{6}<a<2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内没有零点. ……………………………………… 9 分

③当 $a=2$ 时，$f'(x)=(x-2)^2\geqslant0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

所以 $f(x)>f(0)=1>0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内没有零点. ……………………………………………………… 10 分

④当 $2<a\leqslant6$ 时，列表如下：

x	$(0,2)$	2	$(2,a)$	a	$(a,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	增函数	极大值	减函数	极小值	增函数

考虑到 $f(0)=1>0$，$f(x)$ 的极大值 $f(2)=2a-\frac{1}{3}>0$，$f(x)$ 的极小值 $f(a)=\frac{1}{6}a^2(6-a)+1>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内没有零点. ……………………………………………………………………… 11 分

综上，当 $a<\frac{1}{6}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有两个零点；当 $a=\frac{1}{6}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有一个零点；

当 $\frac{1}{6}<a\leqslant6$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内没有零点. ……………………………………………………… 12 分

21. (1)解：由题意，得 $F_2(1,0)$，$F_1(-1,0)$，且 $c=1$， ……………………………………………………… 1 分

则 $2a=|MF_1|+|MF_2|=\sqrt{(-1-1)^2+\left(\frac{3}{2}-0\right)^2}+\frac{3}{2}=4$，即 $a=2$， ……………………………………… 2 分

所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$， ……………………………………………………………… 3 分

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………………………… 4 分

(2)证明：由(1)及 C 的对称性，得点 N 的坐标为 $\left(1,-\frac{3}{2}\right)$， ……………………………………… 5 分

设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$，点 P、Q 的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，

联立方程 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=k(x-1),\end{cases}$ 消去 y 后整理为 $(4k^2+3)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，

所以 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\frac{4k^2-12}{4k^2+3}$. ……………………………………………… 6 分

直线 PM 的斜率为 $\frac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}=\frac{k(x_1-1)-\frac{3}{2}}{x_1-1}=k-\frac{3}{2x_1-2}$，

直线 PM 的方程为 $y-\frac{3}{2}=\left(k-\frac{3}{2x_1-2}\right)(x-1)$，

直线 QN 的斜率为 $\frac{y_2+\frac{3}{2}}{x_2-1}=\frac{k(x_2-1)+\frac{3}{2}}{x_2-1}=k+\frac{3}{2x_2-2}$，

直线 QN 的方程为 $y+\frac{3}{2}=\left(k+\frac{3}{2x_2-2}\right)(x-1)$. ……………………………………………… 8 分

将直线 PM 和直线 QN 方程作差消去 y 后整理为 $\left(\frac{3}{2x_1-2}+\frac{3}{2x_2-2}\right)(x-1)=3$，

可得 $\left(\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}\right)(x-1)=2$， ……………………………………………………………… 9 分

而由 $\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}=\frac{x_1+x_2-2}{(x_1-1)(x_2-1)}=\frac{x_1+x_2-2}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}=\frac{\frac{8k^2}{4k^2+3}-2}{\frac{4k^2-12}{4k^2+3}-\frac{8k^2}{4k^2+3}+1}=\frac{2}{3}$.

可得 $\frac{2}{3}(x-1)=2$，解得 $x=4$，即直线 PM 和 QN 的交点 T 的横坐标恒为 4，……………………… 11 分

所以点 T 在定直线 $x=4$ 上. ……………………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1)由 l 的参数方程得 l 的普通方程为 $y=-\sqrt{3}x$，所以 l 的倾斜角为 $\frac{2\pi}{3}$，所以直线 l 的极坐标方程为 $\theta=\frac{2\pi}{3}(\rho\in\mathbf{R})$； ……………………………………………………………………… 2 分

由曲线 C 的参数方程得 C 的普通方程为 $(x-1)^2+y^2=1$，又 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\end{cases}$ 所以曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$. ……… 4 分

(2) 由 $|OB|=2$，则 B 的极坐标为 $\left(2,\frac{2\pi}{3}\right)$.

设 $A(\rho,\theta)\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，

则 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\sin\angle AOB=\frac{1}{2}\times2\times2\cos\theta\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)$

$=2\cos\theta\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)=\sqrt{3}\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta$

$=\sqrt{3}\times\frac{1+\cos2\theta}{2}+\frac{1}{2}\sin2\theta=\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………………… 8 分

当 $\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1$，即 $\theta=\frac{\pi}{12}$ 时，$(S_{\triangle AOB})_{\max}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………… 10 分

23. (1)证明：因为 $2ab\leqslant a^2+b^2$(当且仅当 $a=b$ 时等号成立)，$2bc\leqslant b^2+c^2$(当且仅当 $b=c$ 时等号成立)，$2ca\leqslant c^2+a^2$(当且仅当 $c=a$ 时等号成立)，

所以 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\leqslant a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)=3(a^2+b^2+c^2)$，

由 $a+b+c=1$，得 $a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}$(当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时等号成立). ……………………… 5 分

(2)解：设 $M=\max\{a+b,b+c,c+a\}$，则 $M\geqslant a+b$，$M\geqslant b+c$，$M\geqslant c+a$，

从而 $3M\geqslant2(a+b+c)=2$，即 $M\geqslant\frac{2}{3}$. ……………………………………………………… 8 分

当且仅当 $a+b=b+c=c+a$，$a+b+c=1$，即 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时，

$\min\{\max\{a+b,b+c,c+a\}\}=\frac{2}{3}$. ……………………………………………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 ‘’ 专业、专注、有态度 ‘’ 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网 “年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。