

福建省漳州市 2023 届高三毕业班第四次教学质量检测

数学试题

本试卷共 4 页。满分 150 分。

考生注意：

1. 答题前，考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名。考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名”与考生本人准考证号、姓名是否一致。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束，考生必须将试题卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 U 是全集，集合 A, B 满足 $(\complement_U A) \cap B = \complement_U A$ ，则下列结论一定成立的是

- A. $A \subseteq B$ B. $B \subseteq A$ C. $\complement_U B \subseteq A$ D. $A \cap B = \emptyset$

2. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_3 + a_9 = 12$ ，则 $S_{11} =$

- A. 66 B. 72 C. 132 D. 144

3. 复数 z 满足 $|z| = |z - 1| = |z - i|$ ，则 $|z| =$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. 2

4. 函数 $f(x) = \begin{cases} x \sin x, & x \geq 0, \\ f(x + \pi), & x < 0 \end{cases}$ 的导函数为 $f'(x)$ ，则 $f'(-\frac{3\pi}{2}) =$

- A. 0 B. 1 C. $\frac{\pi}{2}$ D. $1 + \frac{\pi}{2}$

5. 已知 $(x + 2 + \frac{1}{x})^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 的展开式中常数项为 20，则 $n =$

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

6. 漳州某校为加强校园安全管理，欲安排 12 名教师志愿者(含甲、乙、丙三名教师志愿者)在南门、北门、西门三个校门加强值班，每个校门随机安排 4 名，则甲、乙、丙安排在同一个校门值的概率为

- A. $\frac{1}{3^{12}}$ B. $\frac{1}{3^{11}}$ C. $\frac{1}{5^5}$ D. $\frac{3}{5^5}$

数学第四次教学质量检测 第 1 页 (共 4 页)

7. 已知 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 O , 且 $2\vec{AO} = \vec{AB} + \vec{AC}$, $|\vec{AB}| = \sqrt{3}|\vec{OA}|$, 则向量 \vec{BA} 在向量 \vec{BC} 上的投影向量为

- A. $\frac{1}{4}\vec{BC}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}\vec{BC}$ C. $-\frac{1}{4}\vec{BC}$ D. $-\frac{3}{4}\vec{BC}$

8. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 以 F_2 为圆心的圆与 x 轴交于 F_1, B 两点, 与 y 轴正半轴交于点 A , 线段 AF_1 与 C 交于点 M . 若 $|BM|$ 与 C 的焦距的比值为 $\frac{\sqrt{31}}{3}$, 则 C 的离心率为

- A. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$ D. $\frac{\sqrt{7}-1}{2}$

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 在每小题给出的四个选项中, 有多个选项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 选对但不全的得 2 分, 有选错的得 0 分.

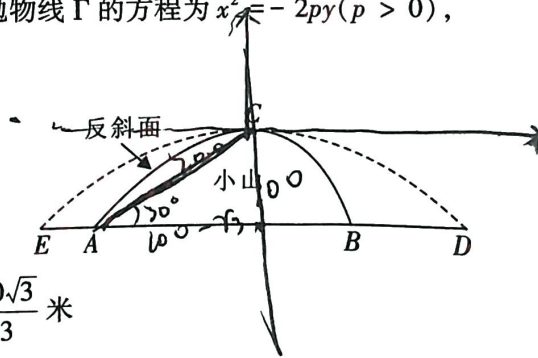
9. 把函数 $y = \sin x$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把所得曲线向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到函数 $y = g(x)$ 的图象, 则

- A. $g(x)$ 在 $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6})$ 上单调递减 \times B. $g(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上有 2 个零点 \times

- C. $y = g(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{12}$ 对称 \checkmark D. $g(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ 上的值域为 $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ \checkmark

10. 上甘岭战役是抗美援朝中中国人民志愿军进行的最著名的山地防御战役. 在这场战役中, 我军使用了反斜面阵地防御战术. 反斜面是山地攻防战斗中背向敌方、面向我方的—侧山坡. 反斜面阵地的构建, 是为了规避敌方重火力输出. 某反斜面阵地如图所示, 山脚 A, B 两点 and 敌方阵地 D 点在同一条直线上, 某炮弹的弹道 DCE 是抛物线 Γ 的一部分, 其中 E 在直线 AB 上, 抛物线的顶点 C 到直线 AB 的距离为 100 米, DE 长为 400 米, $CD = CE$, $\angle CAB = 30^\circ$, 建立适当的坐标系使得抛物线 Γ 的方程为 $x^2 = -2py (p > 0)$, 则

- A. $p = 200$ \checkmark
 B. Γ 的准线方程为 $y = 100$ \checkmark
 C. Γ 的焦点坐标为 $(0, -50)$ \checkmark
 D. 弹道 CE 上的点到直线 AC 的距离的最大值为 $\frac{50\sqrt{3}}{3}$ 米 \checkmark



11. 在棱长为1的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E 为 BC 的中点, 点 P, Q 分别为线段 BD_1, AD 上的动点, 则

A. $AC \perp DP$

B. 平面 DEP 可能经过顶点 C_1

C. PQ 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\angle APC$ 的最大值为 $\frac{2\pi}{3}$

12. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 其导函数为 $f'(x)$, 且 $f(x) + f'(x) = x \ln x$,

$f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$, 则

A. $f\left(\frac{1}{e}\right) \cdot e^{\frac{1}{e}-1} > f(1)$

B. $f(e) \cdot e^{e-1} > f(1)$

C. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数

D. $f(x)$ 存在最小值

三、填空题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分.

13. 写出一个定义域为 \mathbf{R} 且图象不经过第二象限的幂函数 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 某企业统计中级技术人员和高级技术人员的年龄, 中级技术人员的人数为40, 其年龄的平均数为35岁, 方差为18, 高级技术人员的人数为10, 其年龄的平均数为45岁, 方差为73, 则该企业中级技术人员和高级技术人员的年龄的平均数为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 方差为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
(第一空2分, 第二空3分)

15. 由 $\sin 108^\circ = 3\sin 36^\circ - 4\sin^3 36^\circ$, 可求得 $\cos 36^\circ = \underline{\frac{\sqrt{5}+1}{4}}$.

16. 已知正四棱台 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的上底面的边长为 $\sqrt{2}$, 下底面的边长为 $2\sqrt{2}$, 记该正四棱台的侧面积为 S_1 , 其外接球表面积为 S_2 , 则当 S_2 取得最小值时, $\frac{S_1}{S_2}$ 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题: 本题共6小题, 共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1 = 1, \frac{2S_n}{a_n} = n + 1$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记数列 $\left\{\log_2 \frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求集合 $\{k | T_k \leq 10, k \in \mathbf{N}^*\}$ 中元素的个数.

18. (12分)

在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 90^\circ, \angle C = 135^\circ, BD = \sqrt{5}, CD = \sqrt{2}$.

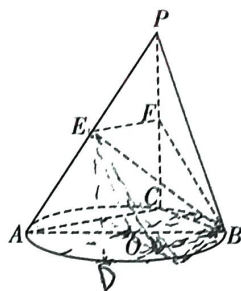
(1) 求 $\cos \angle CBD$;

(2) 若 $\triangle ABD$ 为锐角三角形, 求 $\triangle ABD$ 的面积取值范围.

数学第四次教学质量检测 第3页 (共4页)

19. (12分)

如图, AB 是圆 O 的直径, 点 C 是圆 O 上异于 A, B 的点, $PC \perp$ 平面 ABC , $AC = \sqrt{3}$, $PC = 2BC = 2$, E, F 分别为 PA, PC 的中点, 平面 BEF 与平面 ABC 的交线为 BD , D 在圆 O 上.



(1) 在图中作出交线 BD (说明画法, 不必证明), 并求三棱锥 $D-ACE$ 的体积;

(2) 若点 M 满足 $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \lambda\overrightarrow{BP} (\lambda \in \mathbf{R})$, 且 CM 与平面 PBD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$, 求 λ 的值.

20. (12分)

某科研单位研制出某型号科考飞艇, 一艘该型号飞艇最多只能执行 n 次 ($n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2$) 科考任务, 一艘该型号飞艇第 1 次执行科考任务, 能成功返航的概率为 p ($0 < p < 1$), 若第 k 次 ($k = 1, 2, \dots, n-1$) 执行科考任务能成功返航, 则执行第 $k+1$ 次科考任务且能成功返航的概率也为 p , 否则此飞艇结束科考任务. 一艘该型号飞艇每次执行科考任务, 若能成功返航, 则可获得价值为 X 万元的科考数据, 且“ $X=0$ ”的概率为 0.8, “ $X=200$ ”的概率为 0.2; 若不能成功返航, 则此次科考任务不能获得任何科考数据. 记一艘该型号飞艇共可获得的科考数据的总价值为 Y 万元.

(1) 若 $p = 0.5, n = 2$, 求 Y 的分布列;

(2) 求 $E(Y)$ (用 n 和 p 表示).

0.5×0.8

Handwritten calculations for the distribution of Y:
 0.5×0.8
 0.5×0.1
 $0.5 \times 0.5 \times 0.8$
 $0.5 \times 0.5 \times 0.2$
 $0.5 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.8$
 $0.5 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.2$

21. (12分)

已知 R 是圆 $M: (x + \sqrt{3})^2 + y^2 = 8$ 上的动点, 点 $N(\sqrt{3}, 0)$, 直线 NR 与圆 M 的另一个交点为 S , 点 L 在直线 MR 上, $MS \parallel NL$, 动点 L 的轨迹为曲线 C .

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 若过点 $P(-2, 0)$ 的直线 l 与曲线 C 相交于 A, B 两点, 且 A, B 都在 x 轴上方, 问: 在 x 轴上是否存在定点 Q , 使得 $\triangle QAB$ 的内心在一条定直线上? 请你给出结论并证明.

$m(x-a) = y-b$

22. (12分)

已知函数 $f(x) = e^x + 2e^{-x} + a$ 与 $g(x) = x^2 - x + 1$ 的图象有公切线 $y = mx + 1$.

(1) 求实数 m 和 a 的值;

(2) 若 $e^{x_1} + e^{x_2} = 3$, 且 $f(x_1) \cdot f(x_2) \geq 3(x_1 + x_2 + k)$, 求实数 k 的最大值.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



自主选拔在线
微信号: zizzsw



自主选拔在线
微信号: zizzsw



自主选拔在线
微信号: zizzsw