遂宁市高中 2023 届三诊考试

数学（理科）试题参考答案及评分意见

一、选择题（12×5=60 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	D	C	B	A	C	B	A	D	C	D	A

二、填空题（4×5=20 分）

13. -7　　14. $\frac{1}{2}$　15. 41π　　16. 1

三、解答题

17.（12 分）

解：（1）在ΔABC中因为 $bcosA+acosB=2ccosA$.

由正弦定理得$\sin B\cos A+\sin A\cos B=2\sin C\cos A$，

所以 $\sin(A+B)=2\sin C\cos A$………………………………………2 分

因为 $A+B+C=\pi$， 所以 $\sin(A+B)=\sin C$. 故 $\sin C=2\sin C\cos A$…4 分

又C是ΔABC的内角，所以$\sin C\neq 0$. 从而$\cos A=\frac{1}{2}$.

而 A 为 ΔABC的内角，所以 $A=\frac{\pi}{3}$………………………………………6 分

（2）因为 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{DC}$所以 $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=3(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})$所以 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$…8 分

从而 $9=\frac{1}{16}\overrightarrow{AB}^2+\frac{9}{16}\overrightarrow{AC}^2+\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\Rightarrow 9=\frac{1}{16}c^2+\frac{9}{16}b^2+\frac{3}{16}bc$………10 分

由基本不等式可得：$9\geq\frac{3}{8}bc+\frac{3}{16}bc=\frac{9}{16}bc$，当且仅当 $b=\frac{4\sqrt{3}}{3},c=4\sqrt{3}$ 时等号成立

故 ΔABC 的面积的最大值为 $\frac{1}{2}\times16\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$ ……………………………12 分

18. （12 分）

（1）因为学生初试成绩 X 服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^{2}\right)$，其中 $\mu=65$，$\sigma^{2}=15^{2}$，

则 $\mu+\sigma=65+15=80$，

所以 $P\left(X\geq80\right)=P\left(X\geq\mu+\sigma\right)=\frac{1}{2}\times\left(1-0.6827\right)=0.15865$， ………………3 分

所以估计初试成绩不低于 80 分的人数为 $0.15865\times1000=158.65\approx159$ 人………5 分

（3）Y 的取值分别为 0，10，20，30，………………6 分

则 $P\left(Y=0\right)=\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\left(1-\frac{3}{5}\right)^{2}=\frac{1}{25}$，………………7 分

$P\left(Y=10\right)=\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)^{2}+\left(1-\frac{3}{4}\right)\times C_{2}^{1}\times\frac{3}{5}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{6}{25}$， ………………8 分

$P\left(Y=20\right)=\frac{3}{4}\times C_{2}^{1}\times\frac{3}{5}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)+\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{3}{5}\right)^{2}=\frac{9}{20}$， ………………9 分

$P\left(Y=30\right)=\frac{3}{4}\times\left(\frac{3}{5}\right)^{2}=\frac{27}{100}$， ………………10 分

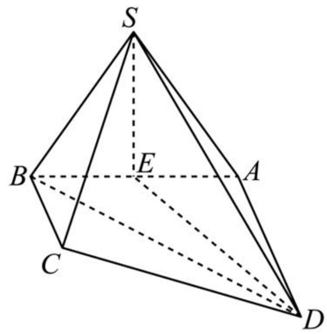
故 Y 的分布列为：

Y	0	10	20	25
P	$\frac{1}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{27}{100}$

所以数学期望为
$E(Y)=0\times\frac{1}{25}+10\times\frac{6}{25}+20\times\frac{9}{20}+30\times\frac{27}{100}=19.5$……………12 分

19（12 分）

（1）取 AB 得中点 E，连接 SE,DE，如图所示：



因为 $\angle DAB=\angle ABC=2\angle ABD=90^\circ$，所以 $AB=AD$，因为 $\triangle SAB$ 的面积为 $\sqrt{3}$ 的等边三角形，所以 $AB=AD=2$.

在 ΔSDE 中，$SE=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3},SD=2\sqrt{2},DE=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，因为

$SE^2+DE^2=SD^2$，所以 $SE\perp DE$，………………2 分

因为 $\triangle SAB$ 是等边三角形，E 为线段 AB 的中点，所以 $SE\perp AB$，又因为 $AB\bigcap DE=E$，$AB,DE\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $SE\perp$ 平面 $ABCD$，………………4 分

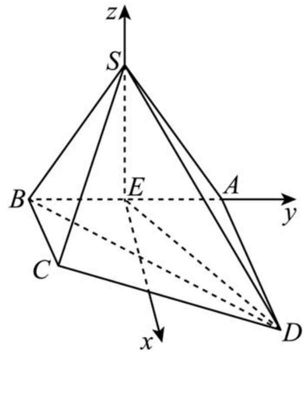
$AD\subset$ 平面$ABCD,\therefore SE\perp AD,$

又

$AD\perp AB,SE\cap AB=E,\therefore AD\perp$ 平面SAB,又$\because SB\subset$ 平面SAB,

$\therefore$ 直线$AD\perp SB$………………6 分

（2）以 E 为原点，EA,ES 分别为 y,z 轴，平行 AD 的直线为 x 轴，建立空间直角坐标系，



则 $E(0,0,0),S(0,0,\sqrt{3}),D(2,1,0),A(0,1,0),C(1,-1,0)$,

$\overline{SA}=(0,1,-\sqrt{3})$，$\overline{SD}=(2,1,-\sqrt{3})$，$\overline{SC}=(1,-1,-\sqrt{3})$，设

$\vec{n}=(x,y,z)$ 为平面 SCD 的法向量，则 $\begin{cases}2x+y-\sqrt{3}z=0\\x-y-\sqrt{3}z=0\end{cases}$，取平面

SCD 的一个法向量为 $\vec{n}=\left(2,-1,\sqrt{3}\right)$，………………9 分

取 平 面 SAB 法 向 量 $\vec{m}=\left(1,0,0\right)$，………………………………………………10 分

平面 SAB 与平面 SCD 所成的角为 α，则

$\cos\alpha=\left|\cos<\vec{m},\vec{n}>\right|=\left|\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}\right|=\left|\dfrac{2}{2\sqrt{2}}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以平面 SAB 与平面 SCD 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.………12 分

20（12 分）

解：（1）由题设 l_{A_1G} 方程为 $bx+ax-ab=0$ 因为 l_{A_2G} 与圆 $x^2+y^2=\dfrac{8}{3}$ 相切，

所以：$d^2=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\dfrac{8}{3}$,………………2 分

$\because\dfrac{a}{c}=\sqrt{2}\Rightarrow\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{1}{2}$，所以 $a^2=8,b^2=4$,

所以椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$………………5 分

（2）由（1）知 F_1 的坐标为 $\left(-2,0\right)$,

① 当直线 l 的斜率不存在时，$\left|AB\right|=2\sqrt{2}$，$|OQ|^2=8$，则 $\dfrac{2\sqrt{2}\,|AB|}{|OQ|^2}=1$；…………6 分

②当直线 l 的斜率存在且不为 0 时，设直线 l 的方程为 $y=k\left(x+2\right)$

且 $k \neq 0$，

联立 $\begin{cases} y=k(x+2) \\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$，得 $\left(2k^2+1\right)x^2+8k^2x+8k^2-8=0$，

设 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{-8k^2}{2k^2+1}$，

$x_1x_2=\dfrac{8k^2-8}{2k^2+1}$，………………7 分

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(\dfrac{8k^2}{2k^2+1}\right)^2-4\times\dfrac{8k^2-8}{2k^2+1}}=\dfrac{4\sqrt{2}\left(k^2+1\right)}{2k^2+1}$，………………

8 分

设点 $Q(x_0,y_0)$，则 $\dfrac{y_0}{x_0}=-\dfrac{1}{k}$，即 $x_0=-ky_0$，代入椭圆方程得

$\dfrac{\left(-ky_0\right)^2}{8}+\dfrac{y_0^2}{4}=1$，

解得 $y_0^2=\dfrac{8}{k^2+2}$，$x_0^2=\dfrac{8k^2}{k^2+2}$，所以

$|OQ|^2=x_0^2+y_0^2=\dfrac{8\left(k^2+1\right)}{k^2+2}$，………………9 分

所以

$\dfrac{2\sqrt{2}|AB|}{|OQ|^2}=\dfrac{\dfrac{16\left(k^2+1\right)}{2k^2+1}}{\dfrac{8\left(k^2+1\right)}{k^2+2}}=\dfrac{2k^2+4}{2k^2+1}=\dfrac{3}{2k^2+1}+1$，……………………………

10 分

又 $2k^2+1>1$，所以 $\dfrac{2\sqrt{2}|AB|}{|OQ|^2}$ 的取值范围是

$(1,4)$．………………………………11 分

综　上　所　述　，　$\dfrac{2\sqrt{2}|AB|}{|OQ|^2}$ 的　取　值　范　围　是

$[1,4)$．………………………………………12 分

21．（12 分）

解：（1）因为 $f(x)=me^{x}-2x$，所以

$f^{'}(x)=me^{x}-2$ …………………1 分

当 $m\le 0$ 时，，$f^{'}(x)<0$，所以 f(x)在 R 上单调递减；…………………2 分

当 $m>0$ 时，令 $f^{'}(x)>0$，得 $x>1n\frac{2}{m}$，令 $f^{'}(x)<0$，得 $x>1n\frac{2}{m}$

综上所述，当 $m\le 0$ 在 R 上单调递减；

当 $m>0$ 时，$f(x)$ 在 $(1n\frac{2}{m},+\infty)$ 上单调递增，$f(x)$ 在，$(-\infty,\ln\frac{2}{m})$）上单调递减. 5 分

（2）因为 $f(x)=me^{x}-2x,g(x)=\cos x+\frac{3}{2}x^{2}$，

所以 $h(x)=me^{x}-2x-\cos x-\frac{3}{2}x^{2}$

则

$h^{'}(x)=me^{x}-2+\sin x-3x$.………………………………………………………6 分

令 $F(x)=h^{'}(x)=me^{x}-2+\sin x-3x$ ，则

$F^{'}(x)=me^{x}+\cos x-3$..

①当 $m\le 0$ 时，$F^{'}(x)<0$，则 $h^{'}(x)$ 在 R 上单调递减，$h(x)$ 不可能存在两个极值点；

②当 $m>0$ 时，因为函数 $h(x)$ 存在两个不同的极值点，所以

$h^{'}(x)$=0 有两个不同的实根，

因为 $h^{'}(x)=e^{x}(m+\frac{\sin x-2-3x}{e^{x}})$，即 $m+\frac{\sin x-2-3x}{e^{x}}$=0 有两个不同的实根.

令 $G(x)\frac{\sin x-2-3x}{e^{x}}+m$，则 $G^{'}(x)\frac{\cos x-\sin x+3x-1}{e^{x}}$，

令 $H(x)=\cos x-\sin x+3x-1$，则 $H'(x)=-\sin x-\cos x+3>0$

所以 $H(x)$ 单调递增.

因为 $H(0)=0$，所以 $G(x)$ 在 $(-\infty.0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $G(x)_{\min}=G(0)=m-2$ ··9 分

当 $m\geq 2$ 时，G(x)≥0,G(x)=0 不可能有两个不等实根.

当 $0<m<2$ 时，$G(x)_{\min}=G(0)=m-2<0,G(-\pi)=\dfrac{-2+3\pi}{e^{-\pi}}+m>0$

$G(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上连续且单调，所以存在唯一实数 $x_1\in(-\infty,0)$，使得 $G(x_1)=0$. 10 分

当 $x>0$ 时，易证 $e^x>x^2$, $F(x)=me^x-2+\sin x-3x>mx^2-3x-3$

取 $x_0=\dfrac{3+\sqrt{9+12m}}{2m}$，则 $F(x_0)>0$，即 $G(x_0)>0$

因为 $G(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续且单调

所以存在唯一实数 $x_2\in(0,+\infty)$，使得 $G(x_2)=0$, 则

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
h'(x)	+	0	-	0	+
h(x)	↑	极大值	↓	极小值	↑

所以函数 $h(x)$ 存在两个不同的极值点.

综上实数 m 的取值范围为

$0<m<2$. ··12 分

22.（**10 分**）

（1）由曲线 $C_1:\begin{cases}x=2+2\cos\theta\\ y=2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数, $\theta\in[0,\pi]$），

消去参数 θ，得 $(x-2)^2+y^2=4\cos^2\theta+4\sin^2\theta=4$ ··············2

分

所以曲线C_1的直角坐标方程为

$\left(x-2\right)^2+y^2=4(0\le y\le 2)$……………3 分

因为曲线C_2是以$\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$为圆心的圆，且过极点 O，所以圆心为

$\left(0,1\right)$，半径为 1，

故C_2的直角坐标方程为：$x^2+\left(y-1\right)^2=1$，

即$x^2+y^2-2y=0$，将$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$代入可得：圆$C_2$的极坐标方程为

$\rho=2\sin\theta$………5 分

（2）因为曲线C_1的直角坐标方程为$\left(x-2\right)^2+y^2=4(0\le y\le 2)$.即

$x^2+y^2-4x=0$，

将$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$代入化简可得$C_1$的极坐标方程为：$\rho=4\cos\theta$

（$\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$），

所以C_1的极坐标方程为$\rho=4\cos\theta\left(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$；$C_2$的极坐标方程为

$\rho=2\sin\theta$；…7 分

因为 M、N 是直线$l:\theta=\dfrac{\pi}{4}\left(\rho\in\mathrm{R}\right)$与曲线$C_1$、$C_2$的两个交点，

不妨设$M\left(\rho_1,\dfrac{\pi}{4}\right),N\left(\rho_2,\dfrac{\pi}{4}\right)$，由（1）得$C_1$：$\rho=4\cos\theta\left(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$，

C_2：$\rho=2\sin\theta$，

所以$\rho_1=4\cos\dfrac{\pi}{4}=2\sqrt{2},\rho_2=2\sin\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}$，从而

$\left|MN\right|=\left|\rho_1-\rho_2\right|=\sqrt{2}$，……………10 分

23．**（10 分）**

（1）解：当$t=1$时，$f(x)=|x-1|+|x+1|=\begin{cases}2x(x\geq 1)\\2(-1\leq x<1)\\-2x(x<-1)\end{cases}$，

$\because f\left(x\right)\leq 8-x^{2}$，

当$x\geq 1$时，即$\begin{cases}2x\leq 8-x^{2}\\x\geq 1\end{cases}$，$\therefore 1\leq x\leq 2$；

当$-1\leq x<1$时，即$\begin{cases}2\leq 8-x^{2}\\-1\leq x<1\end{cases}$，$\therefore -1\leq x<1$；

当$x<-1$时，即$\begin{cases}-2x\leq 8-x^{2}\\x<-1\end{cases}$，$\therefore -2\leq x<-1$，

综上可得不等式的解集为

$\left[-2,2\right]$……………………………………………………5 分

（2）解：$\because f\left(x\right)=|x-t|+|x+t|\geq|(x-t)-(x+t)|=2|t|$，当且仅当

$\left(x-t\right)\left(x+t\right)\leq 0$时取等号，

$\therefore f(x)_{\min}=2|t|$，……………………………………6 分

又$m>0$，$n>0$且$m+n=4$，

$\therefore \frac{4m^{2}+n}{mn}=\frac{4m}{n}+\frac{1}{m}=\frac{4m}{n}+\frac{m+n}{4m}\geq\frac{1}{4}+2\sqrt{\frac{4m}{n}\cdot\frac{n}{4m}}=\frac{9}{4}$

当且仅当$\frac{4m}{n}=\frac{n}{4m}$，即$m=\frac{4}{5}$，$n=\frac{16}{5}$时等号成立，

所以

$\frac{4m^{2}+n}{mn}\in\left[\frac{9}{4},+\infty\right)$ ……………………………………………………………8

分

根据题意可得$\frac{9}{4}\leq 2|t|$，解得$t\geq\frac{9}{8}$或$t\leq-\frac{9}{8}$，

$\therefore t$的取值范围是

$\left(-\infty,-\frac{9}{8}\right]\cup\left[\frac{9}{8},+\infty\right)$.……………………………………………10 分