

1. C

【分析】

利用空间向量平行的性质即可.

【详解】

因为空间向量 $\vec{a} = (2, -3, 4)$, $\vec{b} = (-4, m, n)$, $m, n \in \mathbb{R}$,如果 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$,

$$\text{所以 } \begin{cases} 2 = -4\lambda \\ -3 = m\lambda \\ 4 = n\lambda \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ m = 6 \\ n = -8 \end{cases},$$

所以 $m - n = 6 - (-8) = 14$,

故选: C.

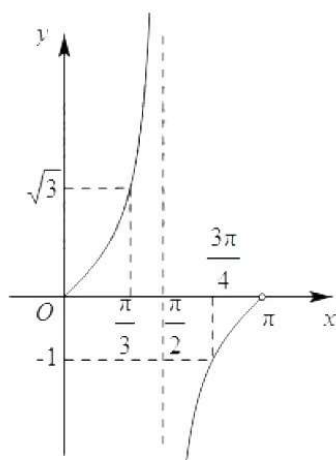
2. D

【分析】

根据倾斜角与斜率的关系得到 $-1 \leq \tan \alpha < \sqrt{3}$, 结合正切函数的图象及 $\alpha \in [0, \pi)$, 数形结合得到直线 l 的倾斜角 α 的取值范围.

【详解】

由题意得: $-1 \leq \tan \alpha < \sqrt{3}$,因为 $\alpha \in [0, \pi)$, 且 $\tan \frac{3\pi}{4} = -1$, $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$,画出 $y = \tan x$ 的图象如下:



所以 $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$

故选：D

3. C

【分析】

先求得抛物线的标准方程，可得其准线方程，根据题意，列出方程，即可得答案.

【详解】

由题意得抛物线的标准方程为 $x^2 = \frac{1}{a}y$ ，准线方程为 $y = -\frac{1}{4a}$ ，

又准线方程是 $y = 1$ ，所以 $-\frac{1}{4a} = 1$ ，

所以 $a = -\frac{1}{4}$.

故选：C

4. C

【分析】

利用等比数列通项的性质，由 $\frac{T_7}{T_2} = 32$ 可求得 a_5 ，再由 $T_9 = a_5^9$ 可求值

【详解】

等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积 T_n ， $\frac{T_7}{T_2} = a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 = a_5^5 = 32$ ， $a_5 = 2$ ，

$T_9 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 \cdot a_9 = a_5^9 = 2^9 = 512$.

故选：C

5. B

答案第 2 页，共 15 页

【分析】

首先根据题意得到 $\begin{cases} b=2 \\ \frac{c}{a}=2 \\ c^2=a^2+b^2 \end{cases}$, 再解方程组即可.

【详解】

设双曲线的一个焦点为 $(0, c)$, 一条渐近线方程为 $y = \frac{a}{b}x$,

则焦点到渐近线的距离 $d = \frac{|-bc|}{\sqrt{a^2+b^2}} = b = 2$,

所以 $\begin{cases} b=2 \\ \frac{c}{a}=2 \\ c^2=a^2+b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=\frac{4}{3} \\ b^2=4 \end{cases}$, 即双曲线方程为: $\frac{3y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$.

故选: B

6. C

【分析】

根据等差数列的单调性以及等差数列的性质即可判断 $a_{2012} < 0, a_{1013} > 0$, 由 $a_{1012} > 0, a_{1013} < 0$

时, 即可说明不必要性.

【详解】

由 $S_{2024} < 0, S_{2025} > 0$ 可得 $\{a_n\}$ 单调递增, 且公差大于 0,

故 $S_{2023} < 0, S_{2023} = \frac{(a_1 + a_{2023}) \times 2023}{2} < 0, S_{2025} = \frac{(a_1 + a_{2025}) \times 2025}{2} > 0$,

即 $a_1 + a_{2023} = 2a_{1012} < 0, a_1 + a_{2025} = 2a_{1013} > 0$, 即 $a_{1012} < 0, a_{1013} > 0$, 因此 $a_{1012} \cdot a_{1013} < 0$,

当 $a_{1012} > 0, a_{1013} < 0$ 时, 此时 $\{a_n\}$ 单调递减, 则不可能满足 $S_{2024} < 0, S_{2025} > 0$,

因此“ $S_{2024} < 0, S_{2025} > 0$ ”是“ $a_{1012} \cdot a_{1013} < 0$ ”的充分不必要条件,

故选: C

7. B

【分析】

根据题意画出图像, 将 d 转化为抛物线上点到准线的距离再加 1, 也即是抛物线上点到焦点的距离加 1, 若求 $d + |PM|$ 的最小值, 转化为抛物线上点到焦点距离和到圆上点的距离再加 1 即可, 根据三角形两边之和大于第三边, 即当 F, P, M_1, C_2 共线时, $d + |PM|$ 取最小值为

答案第 3 页, 共 15 页

$1 + |FC_2| - r$, 算出结果即可.

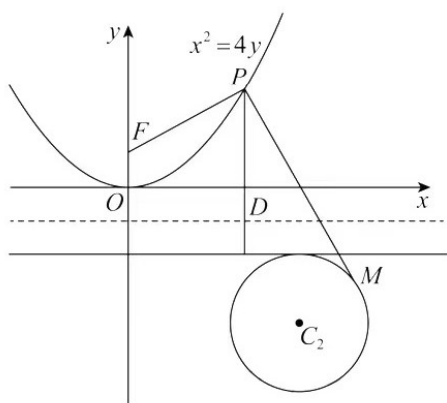
【详解】

解: 由题知圆 $C_2: (x-5)^2 + (y+4)^2 = 4$,

$$\therefore C_2(5, -4), r = 2$$

$F(0, 1)$ 为抛物线焦点, $y = -1$ 为抛物线准线.

则过点 P 向 $y = -1$ 作垂线垂足为 D , 如图所示:



则 $d = 1 + |PD|$,

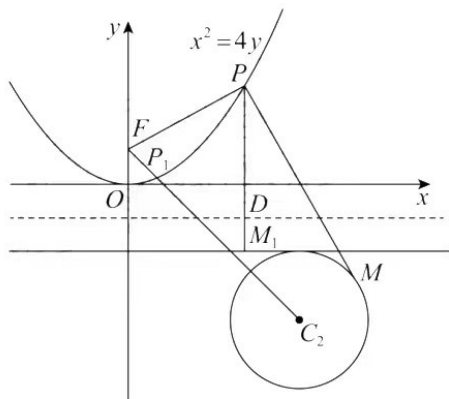
根据抛物线定义可知 $|PD| = |PF|$,

$$\therefore d = 1 + |PF|,$$

$$\therefore d + |PM| = 1 + |PF| + |PM|,$$

若求 $d + |PM|$ 的最小值, 只需求 $|PF| + |PM|$ 的最小值即可,

连接 FC_2 与抛物线交于点 P_1 , 与圆交于点 M_1 , 如图所示,



此时 $|PF| + |PM|$ 最小, 为 $|FC_2| - r$,

$$(d + |PM|)_{\min} = 1 + |FC_2| - r,$$

$$\because F(0,1), C_2(5,-4), \therefore |FC_2| = 5\sqrt{2},$$

$$\therefore (d + |PM|)_{\min} = 1 + |FC_2| - r = 5\sqrt{2} - 1.$$

故选: B

8. B

【分析】

由椭圆和双曲线的定义以及余弦定理得 $\frac{1}{e_1^2} + \frac{3}{e_2^2} = 4$, 再由“1”的代换和基本不等式求得结果.

【详解】

设 P 为第一象限的交点, $|PF_1| = s, |PF_2| = t$,

$$\text{则由椭圆和双曲线的定义可知, } \begin{cases} s+t=2a \\ s-t=2m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s=a+m \\ t=a-m \end{cases}$$

$$\therefore \text{在 } \triangle PF_1F_2 \text{ 中由余弦定理得: } 4c^2 = s^2 + t^2 - 2st \cos \frac{\pi}{3} = (a+m)^2 + (a-m)^2 - (a+m)(a-m)$$

$$\text{即: } a^2 + 3m^2 = 4c^2$$

$$\therefore \frac{a^2}{c^2} + \frac{3m^2}{c^2} = 4, \text{ 即: } \frac{1}{e_1^2} + \frac{3}{e_2^2} = 4$$

$$\therefore 3e_1^2 + e_2^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{e_1^2} + \frac{3}{e_2^2} \right) (3e_1^2 + e_2^2) = \frac{1}{4} \left(6 + \frac{e_2^2}{e_1^2} + \frac{9e_1^2}{e_2^2} \right) \geq \frac{1}{4} (6 + 2\sqrt{9}) = 3$$

答案第 5 页, 共 15 页

当且仅当 $\frac{e_2^2}{e_1^2} + \frac{9e_1^2}{e_2^2}$, 即 $e_2^2 = 3e_1^2$ 时, 取得最小值为 3.

故选: B.

9. BD

【分析】

根据空间向量夹角的定义、空间向量数量积的坐标表示公式, 结合空间向量数量积的运算性质、空间向量基底的定义逐一判断即可.

【详解】

A: 当 $\vec{a} = (1, 0, 0)$, $\vec{b} = (-1, 0, 0)$ 时, 显然 $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, 因为 $\vec{a} = -\vec{b}$, 所以 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角是平角, 故本选项命题是假命题;

B: 因为 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times (-1) + 2 \times (-1) + 3 \times 1 = 0$, 所以 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 因此本选项命题是真命题;

C: 当 $\vec{a} = (1, 0, 0)$, $\vec{b} = (0, 0, 0)$, $\vec{c} = (0, 0, 3)$ 时, 显然 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c}$, 但是 $\vec{a} \neq \vec{c}$, 因此本选项命题是假命题;

D: 假设 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 是共面向量,

$$\text{所以有 } \vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} \Rightarrow (0, 0, 3) = x(1, 0, 0) + y(0, 2, 0) \Rightarrow \begin{cases} 0 = x \\ 0 = 2y \\ 3 = 0 \end{cases}, \text{ 显然不可能, 所以 } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ 不}$$

是共面向量, 因此 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 可以作为空间中的一组基底, 所以本选项命题是真命题,

故选: BD

10. ACD

【分析】

结合选项进行逐项分析求解, $m > n > 0$ 时表示椭圆, $m = n > 0$ 时表示圆, $mn < 0$ 时表示双曲线, $m = 0, n > 0$ 时表示两条直线.

【详解】

$$\text{对于 A, 若 } m > n > 0, \text{ 则 } mx^2 + ny^2 = 1 \text{ 可化为 } \frac{x^2}{\frac{1}{m}} + \frac{y^2}{\frac{1}{n}} = 1,$$

$$\text{因为 } m > n > 0, \text{ 所以 } \frac{1}{m} < \frac{1}{n},$$

即曲线 C 表示焦点在 y 轴上的椭圆, 故 A 正确;

对于 B, 若 $m=n>0$, 则 $mx^2+ny^2=1$ 可化为 $x^2+y^2=\frac{1}{n}$,

此时曲线 C 表示圆心在原点, 半径为 $\frac{\sqrt{n}}{n}$ 的圆, 故 B 不正确;

对于 C, 若 $mn<0$, 则 $mx^2+ny^2=1$ 可化为 $\frac{x^2}{\frac{1}{m}}+\frac{y^2}{\frac{1}{n}}=1$,

此时曲线 C 表示双曲线,

由 $mx^2+ny^2=0$ 可得 $y=\pm\sqrt{-\frac{m}{n}}x$, 故 C 正确;

对于 D, 若 $m=0, n>0$, 则 $mx^2+ny^2=1$ 可化为 $y^2=\frac{1}{n}$,

$y=\pm\frac{\sqrt{n}}{n}$, 此时曲线 C 表示平行于 x 轴的两条直线, 故 D 正确;

故选: ACD.

【点睛】

本题主要考查曲线方程的特征, 熟知常见曲线方程之间的区别是求解的关键, 侧重考查数学运算的核心素养.

11. ACD

【分析】

根据 $a_n-a_{n-1}=n$ 由累加法可得 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$, 进而结合选项可判断 A.B.C.

根据裂项相消法则可判断 D.

【详解】

由题意得, $a_1=1$, $a_2-a_1=2$, $a_3-a_2=3$, ..., $a_n-a_{n-1}=n$,

以上个式子累加可得 $a_n=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}(n\geq 2)$,

又 $a_1=1$ 满足上式, 所以 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$,

由已知 $a_2=3$, $a_3=6$, $a_4=10$, $a_5=15$, $a_6=21$,

得 $S_6=a_1+a_2+\cdots+a_6=1+3+6+10+15+21=56$, 故 A 正确;

因为 $a_n-a_{n-1}=n$, 则 $a_{n+1}-a_n=n+1$, 故 B 错误;

由通项公式得 $a_{2023}=\frac{2023\times 2024}{2}=1012\times 2023$, 故 C 正确;

答案第 7 页, 共 15 页

$$\text{由 } \frac{1}{a_n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

$$\text{得 } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{2023}} = 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{2024}\right) = \frac{2023}{1012},$$

故 D 正确.

故选: ACD.

12. BD

【分析】

证明 $MN \parallel CQ$ 可判断 A; 由等积法可判断 B; 建立坐标利用向量数量积可判断 C; 求出截面梯形的面积可判断 D

【详解】

连 AC, CQ , 则 M, N 分别为 AC, AQ 的中点, MN 为 $\triangle AQC$ 的中位线.

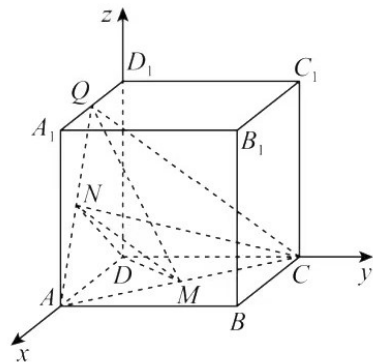
$\therefore MN \parallel CQ$, 则 CN, QM 共面, A 错.

$$V_{A-DMN} = V_{N-ADM} = \frac{1}{3} S_{\triangle ADM} \times 1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times 1 = \frac{1}{3} \text{ 为定值, B 对.}$$

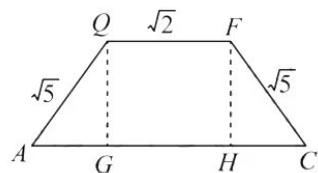
如图建系 $D_1(0,0,2), A_1(2,0,2), \overrightarrow{D_1Q} = \lambda \overrightarrow{D_1A_1}$, 则 $Q(2\lambda, 0, 2)$

$$\overrightarrow{AM} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{QM} = (1-2\lambda, 1, -2), \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{QM} = 2\lambda - 1 + 1 = 2\lambda,$$

$\lambda = 0$ 时, $AM \perp QM$, C 错.



截面如图所示, 图形 $ACFQ$, 过 Q 作 AC 的垂线, 垂足为 G .



答案第 8 页, 共 15 页

$$AG = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad QG = \sqrt{5 - \frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times (\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9}{2}, \quad \text{D 对.}$$

故选: BD

13. -1 或 $-\frac{9}{2}$

【分析】

根据 $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$, 再解方程即可得答案.

【详解】

解: 因为 $l_1: (m+2)x + (m+3)y - 5 = 0$, $l_2: 6x + (2m-1)y = 5$, 且 $l_1 \perp l_2$,

所以, $6(m+2) + (m+3)(2m-1) = 0$, 即 $2m^2 + 11m + 9 = (2m+9)(m+1) = 0$, 解得 $m = -1$ 或

$$m = -\frac{9}{2};$$

所以, 实数 $m = -1$ 或 $m = -\frac{9}{2}$

故答案为: -1 或 $-\frac{9}{2}$

14. 2

【分析】

先求不动点方程, 根据方程无解再逐项计算根据周期求解即可.

【详解】

求不动点, 设 $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, 令 $f(x) = x$ 得: $\frac{x-1}{x+2} = x$, 化简得: $x^2 + x + 1 = 0$,

显然该方程无解, 这种情况下 $\{a_n\}$ 一般是周期不人的周期数列, 我们只需算出前几项, 找规

律即可, 由题意, $a_1 = 2$, 所以 $a_2 = \frac{a_1 - 1}{a_1 + 2} = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{a_2 - 1}{a_2 + 2} = -\frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{a_3 - 1}{a_3 + 2} = -\frac{4}{5}$, $a_5 = \frac{a_4 - 1}{a_4 + 2} = -\frac{3}{2}$,

$$a_6 = \frac{a_5 - 1}{a_5 + 2} = -5, \quad a_7 = \frac{a_6 - 1}{a_6 + 2} = 2 = a_1,$$

从而 $\{a_n\}$ 是以 6 为周期的周期数列, 故 $a_{2023} = a_{337 \times 6 + 1} = a_1 = 2$.

故答案为: 2

15. -2

【分析】

利用向量垂直列方程, 化简求得 m

【详解】

根据题意可得 $\overrightarrow{AB} = (m+1, 3, 2-m)$,

因为平面 α 的一个法向量 $\vec{n} = (-2, -2, 1)$,

所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = -2(m+1) - 6 + 2 - m = 0$, 解得 $m = -2$,

故答案为: -2

16. 3

【分析】

先利用切线长定理求得双曲线的半实轴长, 再由 $|F_1F_2| = 6$ 求得双曲线的半焦距长, 进而求得双曲线的离心率

【详解】

设 $\triangle APF_1$ 的内切圆在边 AF_1 , AP 上的切点分别为 M, N ,

则 $|AM| = |AN|$, $|F_1M| = |F_1Q|$, $|PQ| = |PN|$,

又由 $\triangle OAF_1 \cong \triangle OAF_2$, 可得 $|AF_1| = |AF_2|$, 则 $|F_1Q| = |F_1M| = |F_2N| = |F_2P| + |PN| = |F_2P| + |PQ|$,

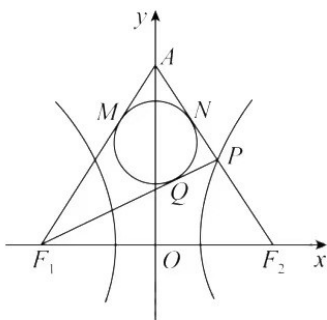
则 $|PF_1| - |PF_2| = |F_1Q| + |PQ| - |PF_2| = |F_2P| + 2|PQ| - |PF_2| = 2|PQ| = 2$,

又 $|PF_1| - |PF_2| = 2a$, 则 $2a = 2$, 即 $a = 1$,

由 $|F_1F_2| = 6$, 可得 $2c = 6$, 即 $c = 3$,

则双曲线的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{1} = 3$,

故答案为: 3



$$17. (1) \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}, \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} + \vec{c}$$

答案第 10 页, 共 15 页

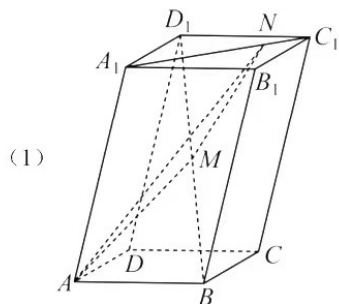
(2) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

【分析】

(1) 将 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 当作基底，按照向量线性运算的规则计算即可；

(2) 运用向量求模的方法计算.

【详解】



如图，连接 $AM, AN, \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1D} = \vec{b} + \vec{c} - \vec{a}$ ，

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD_1} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}，$$

$$\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \vec{a} + \vec{b}，\quad \overrightarrow{A_1N} = \frac{3}{4}\overrightarrow{A_1C_1} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}，\quad \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{A_1N} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} + \vec{c}；$$

(2) 由条件得： $\vec{a}\vec{b} = 2 \times 2 \times \cos 60^\circ = 2, \vec{a}\vec{c} = 2 \times 4 \times \cos 60^\circ = 4, \vec{b}\vec{c} = 2 \times 4 \times \cos 60^\circ = 4$ ，

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} + \vec{c} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}，$$

$$(\overrightarrow{MN})^2 = \left(\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)^2 = \frac{1}{16}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 4\vec{c}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + 4\vec{a}\vec{c} + 4\vec{b}\vec{c})$$

$$= \frac{1}{16}(2^2 + 2^2 + 4 \times 4^2 + 2 \times 2 + 4 \times 4 + 4 \times 4) = \frac{27}{4}，$$

$$\therefore MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}；$$

$$\text{综上，}\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}, \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} + \vec{c}, MN = \frac{3\sqrt{3}}{2}。$$

18. (1) $x - y - 1 = 0$

(2) $(x-3)^2 + y^2 = 4$

【分析】

答案第 11 页，共 15 页

(1) 由题意求出两直线的交点, 再求出所求直线的斜率, 用点斜式写出直线 l 的方程;

(2) 根据题意求出圆的半径, 由圆心写出圆的标准方程.

【详解】

$$(1) \text{ 解: 由题意知 } \begin{cases} 2x-y-3=0 \\ 4x-3y-5=0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 $2x-y-3=0$ 和 $4x-3y-5=0$ 的交点为 $(2,1)$;

设直线 l 的斜率为 k , $\because l$ 与直线 $x+y-2=0$ 垂直, $\therefore k=1$;

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y-1=(x-2)$, 化为一般形式为 $x-y-1=0$;

(2) 解: 设圆 C 的半径为 r , 则圆心为 $C(3,0)$ 到直线 $l: x-y-1=0$ 的距离为

$$d = \frac{|3-0-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2}, \text{ 由垂径定理得 } r^2 - d^2 + \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2 = (\sqrt{2})^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4,$$

解得 $r=2$,

$\therefore$ 圆 C 的标准方程为 $(x-3)^2 + y^2 = 4$.

$$19. (1) a_n = \frac{4}{3}n - \frac{1}{3};$$

(2) 7.

【分析】

(1) 利用等差数列的基本量, 结合已知条件, 求得公差, 即可写出通项公式;

(2) 根据等比数列的基本量, 求得 a_n, S_n , 再求解不等式即可.

【详解】

(1) 设数列 $\{a_n\}$ 为公差为 d 的等差数列, 由 $a_1=1$, $S_{10}=70$,

$$\text{可得 } 10 + \frac{1}{2} \times 10 \times 9d = 70, \text{ 解得 } d = \frac{4}{3},$$

$$\text{故 } a_n = 1 + \frac{4}{3}(n-1) = \frac{4}{3}n - \frac{1}{3}.$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ 为公比为 q 的等比数列, 由 $a_1=1$, $a_4=\frac{1}{8}$,

$$\text{可得 } q^3 = \frac{1}{8}, \text{ 即 } q = \frac{1}{2},$$

$$\text{则 } a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

答案第 12 页, 共 15 页

由 $S_n > 100a_n$, 即 $2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > 100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 可得: $2^n > 101$,

则 $n \geq 7$, 故 n 的最小值为 7.

20. (I) 证明见解析; (II) $\frac{\sqrt{30}}{6}$; (III) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【分析】

以 C 为原点, 分别以 $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CC_1}$ 的方向为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向建立空间直角坐标系.

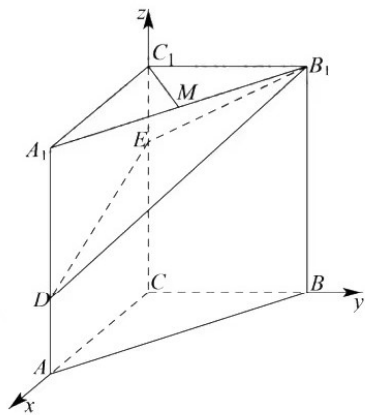
(I) 计算出向量 $\overrightarrow{C_1M}$ 和 $\overrightarrow{B_1D}$ 的坐标, 得出 $\overrightarrow{C_1M} \cdot \overrightarrow{B_1D} = 0$, 即可证明出 $C_1M \perp B_1D$;

(II) 可知平面 BB_1E 的一个法向量为 $\overrightarrow{CA}$, 计算出平面 B_1ED 的一个法向量为 $\vec{n}$, 利用空间向量法计算出二面角 $B-B_1E-D$ 的余弦值, 利用同角三角函数的基本关系可求解结果;

(III) 利用空间向量法可求得直线 AB 与平面 DB_1E 所成角的正弦值.

【详解】

依题意, 以 C 为原点, 分别以 $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CC_1}$ 的方向为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向建立空间直角坐标系 (如图),



可得 $C(0,0,0)$ 、 $A(2,0,0)$ 、 $B(0,2,0)$ 、 $C_1(0,0,3)$ 、

$A_1(2,0,3)$ 、 $B_1(0,2,3)$ 、 $D(2,0,1)$ 、 $E(0,0,2)$ 、 $M(1,1,3)$.

(I) 依题意, $\overrightarrow{C_1M} = (1,1,0)$, $\overrightarrow{B_1D} = (2,-2,-2)$,

从而 $\overrightarrow{C_1M} \cdot \overrightarrow{B_1D} = 2 - 2 + 0 = 0$, 所以 $C_1M \perp B_1D$;

(II) 依题意, $\overrightarrow{CA} = (2,0,0)$ 是平面 BB_1E 的一个法向量,

答案第 13 页, 共 15 页

$$\overrightarrow{EB_1} = (0, 2, 1), \quad \overrightarrow{ED} = (2, 0, -1).$$

设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 为平面 DB_1E 的法向量,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{EB_1} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{ED} = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} 2y + z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases},$$

不妨设 $x = 1$, 可得 $\vec{n} = (1, -1, 2)$.

$$\cos \langle \overrightarrow{CA}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{2}{2 \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6},$$

$$\therefore \sin \langle \overrightarrow{CA}, \vec{n} \rangle = \sqrt{1 - \cos^2 \langle \overrightarrow{CA}, \vec{n} \rangle} = \frac{\sqrt{30}}{6}.$$

所以, 二面角 $B-B_1E-D$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{6}$;

(III) 依题意, $\overrightarrow{AB} = (-2, 2, 0)$.

由 (II) 知 $\vec{n} = (1, -1, 2)$ 为平面 DB_1E 的一个法向量, 于是

$$\cos \langle \overrightarrow{AB}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{-4}{2\sqrt{2} \times \sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

所以, 直线 AB 与平面 DB_1E 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【点睛】

本题考查利用空间向量法证明线线垂直, 求二面角和线面角的正弦值, 考查推理能力与计算能力, 属于中档题.

$$21. (1) a_n = 2^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

(2) 证明见解析

【分析】

(1) 将已知条件与 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n - a_{n+1} = -2$ 两式相减, 再结合等比数列的定义即可求解;

(2) 利用裂项相消求和法求出 T_n 即可证明.

【详解】

(1) 解: 因为 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} - a_n = -2$, 所以 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n - a_{n+1} = -2$,

两式相减得 $a_{n+1} = 2a_n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$,

答案第 14 页, 共 15 页

当 $n=2$ 时, $a_1 - a_2 = -2$, 又 $a_2 = 4$, 所以 $a_1 = 2, a_2 = 2a_1$,

所以 $a_{n+1} = 2a_n (n \in \mathbf{N}^*)$,

所以 $\{a_n\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列,

所以 $a_n = 2^n (n \in \mathbf{N}^*)$;

$$(2) \text{ 证明: } \frac{2^n}{(a_n-1)(a_{n+1}-1)} = \frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)} = \frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1},$$

所以 $T_n = \left(\frac{1}{2-1} - \frac{1}{2^2-1}\right) + \left(\frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{2^3-1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1}\right) = 1 - \frac{1}{2^{n+1}-1} < 1$, 由 $n \geq 1$, 得 $2^{n+1} \geq 4$,

$$\text{所以 } 1 - \frac{1}{2^{n+1}-1} \geq \frac{2}{3},$$

综上, $\frac{2}{3} \leq T_n < 1$.

$$22. (1) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \quad (2) \text{ 存在}$$

【详解】

$$(1) \text{ 由 } P(1, \frac{3}{2}) \text{ 在椭圆上得: } \frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1 \quad ① \quad \because a=2c, \therefore b^2=3c^2 \quad ②$$

$$(2) \text{ 代入 } ① \text{ 得 } c^2=1, a^2=4, b^2=3, \therefore \text{椭圆 } C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

$$(2) \text{ 设 } B(x_2, y_2) (x_2 \neq 1), \text{ 则直线 } BF \text{ 方程为: } y = \frac{y_2}{x_2-1}(x-1), \text{ 令 } x=4 \text{ 得 } M(4, \frac{3y_2}{x_2-1}),$$

$$\therefore PM \text{ 的斜率 } k_1 = \frac{2y_2 - x_2 + 1}{2(x_2 - 1)} \quad \text{联立} \begin{cases} y = \frac{y_2}{x_2-1}(x-1) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \quad \text{得: } A(\frac{5x_2-8}{2x_2-5}, \frac{3y_2}{2x_2-5}).$$

$$\therefore k_1 = \frac{2y_2 - 2x_2 + 5}{2(x_2 - 1)}, k_2 = \frac{2y_2 - 3}{2(x_2 - 1)}, \therefore k_1 + k_2 = \frac{2y_2 - 2x_2 + 5}{2(x_2 - 1)} + \frac{2y_2 - 3}{2(x_2 - 1)} = \frac{2y_2 - x_2 + 1}{x_2 - 1}.$$

故存在 $\lambda=2$ 符合题意.

考点: 本题主要考查圆锥曲线的定义、标准方程、几何性质, 直线与圆锥曲线的交点等基础知识, 考查分析问题、解决问题的能力, 考查逻辑推理能力, 推理论证能力和计算能力.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线