考号：________

姓名：________

班级：________

数学

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $A=\{x\mid\sqrt{x^2-3x}\leqslant 2\}$，$B=\{-1,0,1,2,3\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-1,0,3\}$　　B. $\{0,1,3\}$　　C. $\{-1,0,2,3\}$　　D. $\{-1,1,2\}$

2. 已知 $z=-1+2\mathrm{i}$，则 $\frac{\bar{z}}{z}=$

A. $\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\mathrm{i}$　　B. $-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\mathrm{i}$　　C. $-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\mathrm{i}$　　D. $\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\mathrm{i}$

3. 已知圆台的母线长为 4，上底面圆和下底面圆半径的比为 1∶3，其侧面展开图所在扇形的圆心角为 $\frac{\pi}{2}$，则圆台的高为

A. $2\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{15}$　　C. 4　　D. $3\sqrt{2}$

4. 下列区间中，函数 $f(x)=2\cos^2\frac{x}{2}-\sqrt{3}\sin x-2$ 单调递减的区间是

A. $\left(-\pi,-\frac{\pi}{3}\right)$　　B. $\left(-\pi,\frac{\pi}{3}\right)$　　C. $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

5. 已知 F_1,F_2 是双曲线 $C:\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的左、右焦点，点 M 在双曲线的右支上，设 M 到直线 $l:x=\frac{16}{5}$ 的距离为 d，则 $|MF_1|-d$ 的最小值为

A. 7　　B. $\frac{39}{5}$　　C. 8　　D. $\frac{41}{5}$

6. 已知角 α 的终边过点 $P(-3,4)$，则 $\frac{\sin\alpha}{(\cos\alpha-\sin\alpha)\tan 2\alpha}=$

A. $-\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

7. 若过点 (a,b) 可作曲线 $y=x^2-2x$ 的两条切线，则点 (a,b) 可以是

A. $(0,0)$　　B. $(1,1)$　　C. $(3,0)$　　D. $(3,4)$

8. 有 6 个大小相同的小球，其中 1 个黑色，2 个蓝色，3 个红色. 采用放回方式从中随机取 2 次球，每次取 1 个球，甲表示事件“第一次取红球”，乙表示事件“第二次取蓝球”，丙表示事件“两次取出不同颜色的球”，丁表示事件“两次取出相同颜色的球”，则

A. 甲与乙相互独立　　B. 甲与丙相互独立　　C. 乙与丙相互独立　　D. 乙与丁相互独立

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. 下列关于成对数据的统计说法正确的有

A. 若当一个变量的值增加时,另一个变量的相应值呈现减少的趋势,则称这两个变量负相关

B. 样本相关系数 r 的绝对值大小可以反映成对样本数据之间线性相关的程度

C. 通过对残差的分析可以判断模型刻画数据的效果,以及判断原始数据中是否存在可疑数据

D. 决定系数 R^2 越大,模型的拟合效果越差

10. 在$\triangle ABC$中,$AC=BC=2AB=4$,点 D 在边 BC 上,且 $BD=m$,$DC=n$,则下列结论中正确的有

A. $4\overrightarrow{AD}=n\overrightarrow{AC}+m\overrightarrow{AB}$

B. 当 $m=1$ 时,$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{11}{2}$

C. 当 AD 平分$\angle BAC$时,$|\overrightarrow{AD}|=\frac{2\sqrt{10}}{3}$

D. 存在点 D 使得$\triangle ADC$是等腰三角形

11. 已知 $A(1,-1)$,$B(4,1)$,点 P 满足$|PB|=2|PA|$,则

A. 点 P 在以 AB 为直径的圆上

B. $\triangle PAB$面积的最大值为$\frac{13}{3}$

C. 存在点 P 使得$\angle PBA=\frac{\pi}{6}$

D. $|PA||PB|$的最小值为$\frac{26}{9}$

12. 棱长为 4 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的中心为 O,球 O 的半径为 1,点 P 在球 O 球面上,记四棱锥 $P\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 V_1,四棱锥 $P\text{-}BCC_1B_1$ 的体积为 V_2,则

A. 存在点 P 使得 $V_1=V_2$

B. 不存在点 P 使得 $V_1=2V_2$

C. 存在点 P 使得 $V_1=3V_2$

D. $V_1+V_2\geqslant\frac{64+16\sqrt{2}}{3}$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{x^{-\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+a}$是奇函数,则 $a=$__________.

14. 已知抛物线 C:$x^2=2py(p>0)$的焦点为 F,斜率为 1 的直线 l 过 F 与 C 交于 A,B 两点,AB 的中点到抛物线准线的距离为 8,则 $p=$__________.

15. 点 P 在曲线 $y=e^x$ 上,点 Q 在曲线 $y=\begin{cases}\frac{1}{2}x-1, x\leqslant 2,\\ 3x-6, x>2\end{cases}$ 上,则$|PQ|$的最小值为__________.

16. 分形几何学的创立为解决传统科学众多领域的难题提供了全新的思路. 图 1 是边长为 1 的等边三角形,将图 1 中的线段三等分,以中间部分的线段为边,向外作等边三角形,再将中间部分的线段去掉得到图 2,称为“一次分形”;用同样的方法把图 2 中的每条线段重复上述操作,得到图 3,称为“二次分形”……依此进行“n 次分形”($n\in\mathbf{N}^*$). 规定:一个分形图中所有线段的长度之和为该分形图的长度,要得到一个长度不小于 30 的分形图,则 n 的最小整数值是________. (取 $\lg 3\approx 0.4771$, $\lg 2\approx 0.3010$)

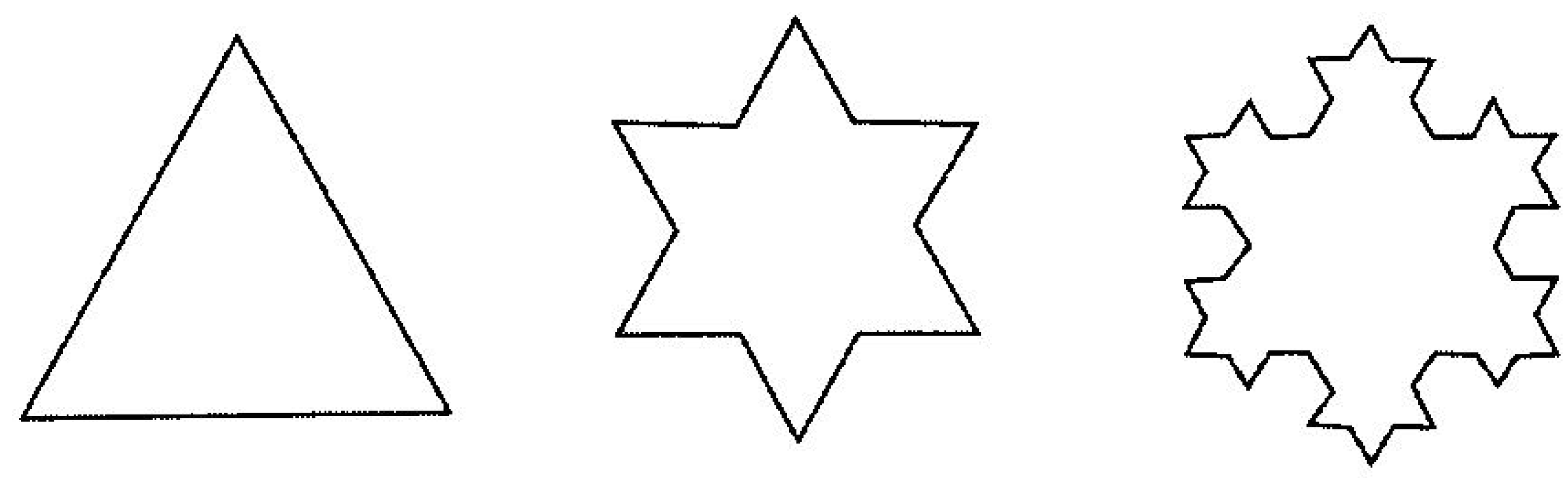


图1　　图2　　图3

第 16 题图

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=\begin{cases} a_n+n, & n\text{ 为奇数}, \\ a_n-n, & n\text{ 为偶数}; \end{cases}$ 数列 b_n 满足 $b_n=a_{2n}$.

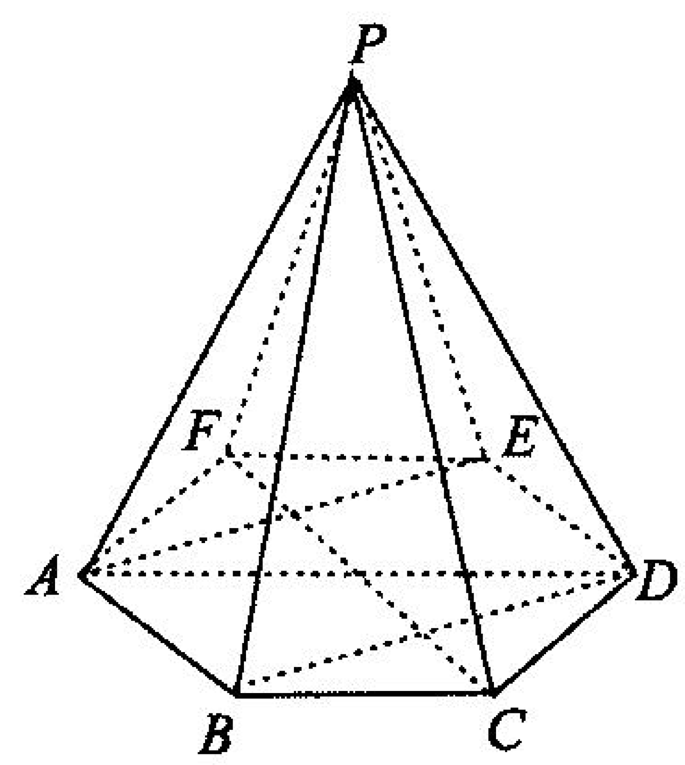
(1)求数列$\{b_n\}$的通项公式;

(2)求数列$\left\{\dfrac{1}{b_nb_{n+1}}\right\}$的前 n 项和 S_n.

18. (12 分)如图,在正六棱锥 $P\text{-}ABCDEF$ 中,$AB=2$,表面积为 $24\sqrt{3}$.

(1)证明:平面 $PAE\perp$平面 PFC;

(2)求二面角 $B\text{-}PD\text{-}A$ 的余弦值.



第 18 题图

19. (12 分)近年来,凭借主旋律电影的出色表现,我国逐渐成为全球电影票房最高的市场. 2022 年十一期间热映的某主旋律电影票房超过 16 亿元. 某研究性学习小组就是否看过该电影对影迷进行随机抽样调查,调查数据如下表(单位:人).

	是	否	合计
青年(30 岁以下)	45	5	50
中年(30 岁(含)以上)	35	15	50
合计	80	20	100

(1)是否有 99%的把握认为选择看该电影与年龄有关?

(2)将频率视为概率,若从众多影迷中随机抽取 10 人,记其中看过该电影的人数为 ξ,求随机变量 ξ 的数学期望及方差.

附:$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.050	0.010	0.001
k_0	3.841	6.635	10.828

20. (12 分)在$\triangle ABC$中,角A,B,C所对的边分别为a,b,c,满足$\dfrac{\cos(A+C)+\cos(A-C)-1}{\cos(A-B)+\cos C}=\dfrac{c}{b}$.

(1)求B;

(2)若$c=2$,点D在边AC上,且$AD=2DC$,$BD=\dfrac{2\sqrt{13}}{3}$,求b.

21. (12分)已知椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F$,点$C\left(1,-\frac{3}{2}\right)$在椭圆$E$上,$C$关于$y$轴的对称点为$C'$,且$|C'F|+|CF|=4$.

(1)求椭圆E的方程;

(2)直线AB过F(A点横坐标小于1)与椭圆E交于A,B两点,直线AC交直线$x=4$于点M,证明:直线MF平分$\angle BFC$.

22. (12 分)已知函数 $f(x)=\dfrac{a}{x}+x\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $a=1$ 时,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程;

(2)若函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1,x_2,证明:$x_1x_2>a$.

参考答案

1. A **2.** B **3.** B **4.** C **5.** D **6.** A **7.** C **8.** A **9.** ABC **10.** BCD **11.** BCD **12.** AD

13. 0 **14.** 4 **15.** $\frac{(3+\ln 2)\sqrt{5}}{5}$ **16.** 9

17. 解:(1)由题意知,$a_1=1$,

$a_2=a_1+1, a_3=a_2-2, a_4=a_3+3, a_5=a_4-4, \cdots, a_{2n-1}=a_{2n-2}-(2n-2)$, …………………… 2分

$a_{2n}=a_{2n-1}+2n-1$, …………………… 4分

从而 $b_n=a_{2n}=1+(1-2)+(3-4)+\cdots+(2n-3-2n+2)+2n-1=n+1$. …………………… 6分

(2)由(1)$\frac{1}{b_nb_{n+1}}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$, …………………… 7分

所以 $S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$. …………………… 10分

18. (1)证明:设 O 为正六边形的中心,M 为 BC 的中点,

由正六边形可知,$AE\perp FC$,$PO\perp AE$,$PO\cap FC=O$,

所以 $AE\perp$ 平面 PFC, …………………… 2分

所以 $AE\subset$ 平面 PAE,

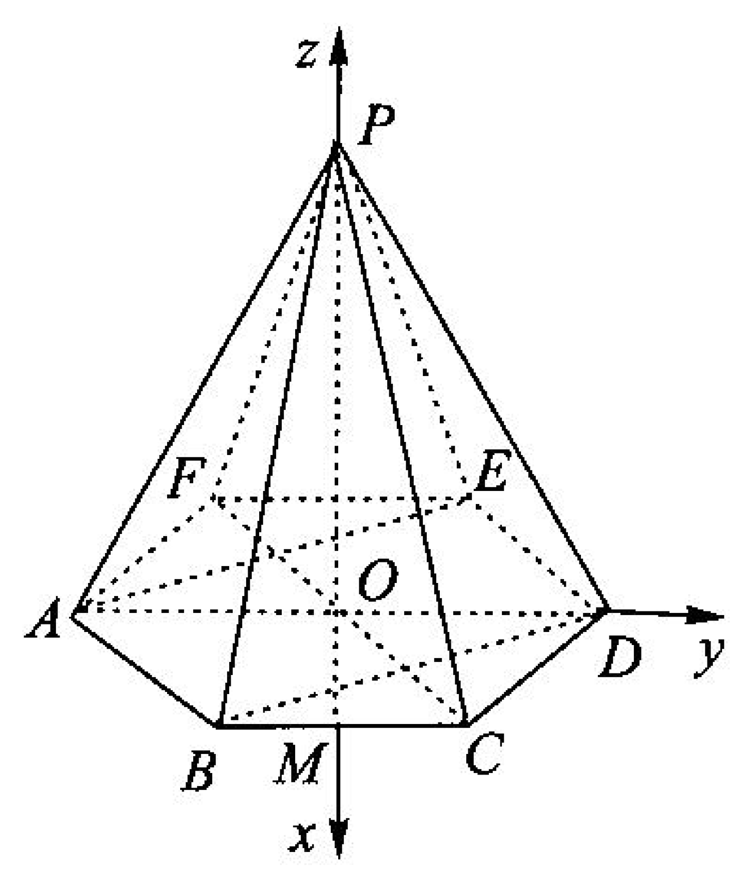
所以平面 $PAE\perp$ 平面 PFC. …………………… 4分

(2)解:设 $PO=h$,连接 OB,OM,PM,

由 $AB=2$,有 $OM=\sqrt{3}$,$PM=\sqrt{h^2+3}$,

所以 $24\sqrt{3}=6\times\frac{1}{2}\times 2\times(\sqrt{3}+\sqrt{h^2+3})$,

解得 $h=2\sqrt{6}$, …………………… 6分



第 18 题图

以 O 为坐标原点,OM,OD,OP 分别为 x,y,z 轴,建立空间直角坐标系,有

$P(0,0,2\sqrt{6})$,$B(\sqrt{3},-1,0)$,$D(0,2,0)$,$A(0,-2,0)$, …………………… 8分

从而平面 PAD 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$,

设平面 PBD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

由 $\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{n}=0$,$\overrightarrow{PD}\cdot\boldsymbol{n}=0$,

可得 $\begin{cases}\sqrt{3}x-y-2\sqrt{6}z=0,\\ 2y-2\sqrt{6}z=0,\end{cases}$ …………………… 10分

令 $z=1$,有 $x=3\sqrt{2}$,$y=\sqrt{6}$,$\boldsymbol{n}=(3\sqrt{2},\sqrt{6},1)$, …………………… 11分

从而二面角 $B\text{-}PD\text{-}A$ 的余弦值为

$\left|\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{3\sqrt{2}}{5}$. …………………… 12分

19. 解:(1)$K^2=\frac{100\times(45\times15-35\times5)^2}{80\times20\times50\times50}=6.25<6.635$, …………………… 3分

所以没有 99%的把握认为选择看该电影与年龄有关；…………………………………………………… 4 分

(2)由题意知，看过该电影的频率为$\frac{8}{10}$，

将频率视为概率，则 $\xi \sim B\left(10,\frac{8}{10}\right)$，…………………………………………………………………… 6 分

所以随机变量 ξ 的数学期望为 $E(\xi)=10\times\frac{8}{10}=8$， ……………………………………………… 9 分

方差为 $D(\xi)=10\times\frac{8}{10}\times\left(1-\frac{8}{10}\right)=1.6$. …………………………………………………… 12 分

20. 解：(1)由$\frac{\cos(A+C)+\cos(A-C)-1}{\cos(A-B)+\cos C}=\frac{c}{b}$，

可得$\frac{2\cos A\cos C-1}{2\sin A\sin B}=\frac{\sin C}{\sin B}$， ………………………………………………………………… 3 分

进而 $\cos A\cos C-\sin A\sin C=\frac{1}{2}$，

$\cos(A+C)=\frac{1}{2}, A+C=\frac{\pi}{3}, B=\frac{2\pi}{3}$. ………………………………………………………………… 5 分

(2)在△ABC 和△ABD 中，由余弦定理，得

$b^2=4+a^2+2\times a\times 2\times\frac{1}{2}=a^2+2a+4$， ……………………………………………………… 8 分

$\cos A=\frac{4+\frac{4b^2}{9}-\frac{52}{9}}{2\times 2\times\frac{2b}{3}}=\frac{4+b^2-a^2}{2\times 2\times b}$，…………………………………………………………… 11 分

解得 $a=4, b=2\sqrt{7}$. ……………………………………………………………………………………… 12 分

21. (1)解：由题意可知 $|C'F|+|CF|=2a=4$，解得 $a=2$；

由$\frac{1}{4}+\frac{9}{4b^2}=1$，解得 $b=\sqrt{3}$，…………………………………………………………………………… 2 分

所以椭圆 E 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………………………… 3 分

(2)证明：设 $AB: x=ty+1$，

不妨设 $A(x_1,y_1)(x_1<1, y_1>0)$，$B(x_2,y_2)$，

联立直线 AB 与椭圆 E 的方程有 $(3t^2+4)y^2+6ty-9=0$， ……………………………………… 5 分

由 $AC: y+\frac{3}{2}=\frac{y_1+\frac{3}{2}}{x_1-1}(x-1)$，得 $M\left(4, 3\times\frac{y_1+\frac{3}{2}}{x_1-1}-\frac{3}{2}\right)$，

整理得 $M\left(4, 3\times\frac{y_1+\frac{3}{2}}{ty_1}-\frac{3}{2}\right)$，

从而有 $k_{MF}=\frac{3\times\frac{y_1+\frac{3}{2}}{ty_1}-\frac{3}{2}}{3}=\frac{y_1+\frac{3}{2}}{ty_1}-\frac{1}{2}$，$k_{AB}=\frac{1}{t}$. ………………………………………… 7 分

根据倾斜角间关系，

$$\tan\angle MFB-\tan\angle MFC=\frac{\frac{1}{t}-k_{MF}}{1+\frac{1}{t}\times k_{MF}}+\frac{1}{k_{MF}}=\frac{k_{MF}(1-tk_{MF})+t+k_{MF}}{(t+k_{MF})k_{MF}}$$

$$=\frac{\left(\frac{y_1+\frac{3}{2}}{ty_1}-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{y_1+\frac{3}{2}}{y_1}+\frac{t}{2}\right)+t+\frac{y_1+\frac{3}{2}}{ty_1}-\frac{1}{2}}{(t+k_{MF})k_{MF}}$$

$$=\frac{\frac{-t^2y_1^2+2ty_1^2+6ty_1-9}{4ty_1^2}+t+\frac{1}{t}-\frac{1}{2}}{(t+k_{MF})k_{MF}}.$$ ………………………………………… 9 分

由于$(3t^2+4)y_1^2+6ty_1-9=0$，

故上式$=\frac{\frac{-t^2y_1^2+2ty_1^2-(3t^2+4)y_1^2}{4ty_1^2}+t+\frac{1}{t}-\frac{1}{2}}{(t+k_{MF})k_{MF}}=\frac{\frac{2t-4t^2-4}{4t}+t+\frac{1}{t}-\frac{1}{2}}{(t+k_{MF})k_{MF}}$

$=\frac{\frac{1}{2}-t-\frac{1}{t}+t+\frac{1}{t}-\frac{1}{2}}{(t+k_{MF})k_{MF}}=0$， ………………………………………… 11 分

所以$\angle MFB=\angle MFC$，即直线 MF 平分$\angle BFC$. ………………………………………… 12 分

22. 解：(1)由题意知，$f(1)=1$，$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\ln x+1$，$f'(1)=0$， ………………………………………… 1 分

故过点$(1,1)$的切线方程为 $y=1$. ………………………………………… 2 分

(2)$f(x)=x\left(\frac{a}{x^2}+\ln x\right)$，

令 $g(x)=\frac{a}{x^2}+\ln x$，

则 $f(x)$有两个零点等同于 $g(x)$有两个零点 x_1,x_2， ………………………………………… 3 分

设 $x_1<x_2$，$g'(x)=-\frac{2a}{x^3}+\frac{1}{x}=\frac{x^2-2a}{x^3}$，

当 $a\leqslant 0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，没有两个零点；

当 $a>0$ 时，令 $g'(x)<0$，$x\in(0,\sqrt{2a})$，$g'(x)>0$，$x\in(\sqrt{2a},+\infty)$，

所以 $g(x)$在$(0,\sqrt{2a})$上单调递减，

在$(\sqrt{2a},+\infty)$上单调递增， ………………………………………… 5 分

令 $g(\sqrt{2a})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2a<0$，

有 $0<a<\frac{1}{2\mathrm{e}}$，$a<\sqrt{2a}<\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}<1$，$g(1)=a>0$，$g(a)=\frac{1}{a}+\ln a$，

函数 $y=\frac{1}{x}+\ln x(0<x<1)$，$y'=\frac{x-1}{x^2}<0$，

所以 $g(a)=\frac{1}{a}+\ln a>\frac{1}{\frac{1}{2\mathrm{e}}}+\ln\frac{1}{2\mathrm{e}}=2\mathrm{e}-\ln 2\mathrm{e}>0$，

故在$(0,1)$区间上函数 $g(x)$有两个零点， ………………………………………… 7 分

由 $g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=ae-\frac{1}{2}<0$,

$\sqrt{2a}<\frac{1}{\sqrt{e}}<x_2<1$,

$\frac{a}{x_2}<\frac{a}{\sqrt{2a}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}<\sqrt{2a}$,

要证 $x_1x_2>a$,

只需证 $x_1>\frac{a}{x_2}$,

只需证 $g\left(\frac{a}{x_2}\right)>g(x_1)=0$, …………………………………………………………………… 9分

由 $a=-x_2^2\ln x_2$,

$g\left(\frac{a}{x_2}\right)=\frac{x_2^2}{a}+\ln\frac{a}{x_2}$

$=\frac{1}{-\ln x_2}+\ln(-x_2\ln x_2)$

$=\frac{1}{-\ln x_2}+\ln x_2+\ln(-\ln x_2)$. ………………………………………………………… 10分

令 $t=-\ln x_2$,

$h(t)=\frac{1}{t}-t+\ln t(0<t<1)$,

$h'(t)=-\frac{1}{t^2}-1+\frac{1}{t}=\frac{-t^2+t-1}{t^2}<0$,

所以 $h(t)=\frac{1}{t}-t+\ln t$ 单调递减,

$h(t)>h(1)=0$,

所以 $g\left(\frac{a}{x_2}\right)>0$,

故 $x_1>\frac{a}{x_2}$,$x_1x_2>a$. ………………………………………………………………… 12分