2021～2022 学年度第一学期期末学业水平诊断

高三数学

注意事项：

1. 本试题满分 150 分，考试时间为 120 分钟。
2. 答卷前，务必将姓名和准考证号填涂在答题纸上。
3. 使用答题纸时，必须使用 0.5 毫米的黑色签字笔书写，要字迹工整，笔迹清晰；超出答题区书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{x\mid(x+1)(x-2)<0\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{0,1\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{-1,0,1\}$　　D. $\{0,1,2\}$

2. 命题“$\forall x\in\mathbf{R},2^x>0$”的否定为

A. $\exists x\in\mathbf{R},2^x\leqslant 0$　B. $\exists x\in\mathbf{R},2^x<0$　C. $\forall x\in\mathbf{R},2^x\leqslant 0$　D. $\forall x\in\mathbf{R},2^x<0$

3. 函数 $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\ln(x+1)}$ 的定义域为

A. $[-2,2]$　　B. $(-1,2]$　　C. $(-1,0)\cup(0,2]$　　D. $(-1,1)\cup(1,2]$

4. 在生活中，人们常用声强级 y（单位：dB）来表示声强度 I（单位：$\mathrm{W/m^2}$）的相对大小，具体关系式为 $y=10\lg(\dfrac{I}{I_0})$，其中基准值 $I_0=10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$. 若声强度为 I_1 时的声强级为 60 dB，那么当声强度变为 $4I_1$ 时的声强级约为（参考数据：$\lg 2\approx 0.3$）

A. 63 dB　　B. 66 dB　　C. 72 dB　　D. 76 dB

5. 若双曲线 $mx^2-y^2=1(m\in\mathbf{R})$ 的一条渐近线方程为 $3x-4y=0$，则其离心率为

A. $\dfrac{4}{3}$　　B. $\dfrac{5}{3}$　　C. $\dfrac{5}{4}$　　D. $\dfrac{7}{4}$

6. 已知 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\dfrac{1}{2}$，则 $\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}>=$

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{3}{4}$　　C. $\dfrac{\sqrt{6}}{12}$　　D. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

7. 若直线 $x-y+2=0$ 将圆 $(x-a)^2+(y-3)^2=9$ 分成的两段圆弧长度之比为 $1:3$，则实数 a 的值为

A. -4　　B. -4 或 2　　C. 2　　D. -2 或 4

8. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，且 $f(2)=0$，则满足 $(2x-1)f(x+1)\geqslant 0$ 的 x 的取值范围是

A. $(-\infty,-1]\cup[\frac{1}{2},3]$　　B. $(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$

C. $[-3,-1]\cup[\frac{1}{2},1]$　　D. $[-3,\frac{1}{2}]\cup[1,+\infty)$

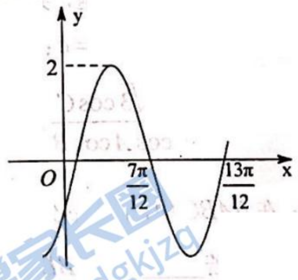
二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知 $a>0$，$b>0$，则下列命题成立的有

A. 若 $ab=1$，则 $a^2+b^2\geqslant 2$　　B. 若 $ab=1$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 2$

C. 若 $a+b=1$，则 $a^2+b^2\leqslant\frac{1}{2}$　　D. 若 $a+b=1$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 4$

10. 函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，则



A. ω 的值为 2

B. φ 的值为 $\frac{\pi}{6}$

C. $(-\frac{\pi}{4},0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个增区间

D. 当 $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）时，$f(x)$ 取最大值

11. 已知抛物线 $C:x^2=my$ 的焦点为 $F(0,1)$，点 A,B 为 C 上两个相异的动点，则

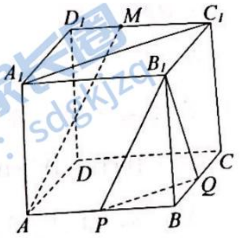
A. 抛物线 C 的准线方程为 $y=-1$

B. 设点 $P(2,3)$，则 $|AP|+|AF|$ 的最小值为 4

C. 若 A,B,F 三点共线，则 $|AB|$ 的最小值为 2

D. 若 $\angle AFB=60^\circ$，AB 的中点 M 在 C 的准线上的投影为 N，则 $|MN|\leqslant|AB|$

12. 如图所示，在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，P,Q分别为棱AB,BC的中点，则以下四个结论正确的是



A. 棱C_1D_1上存在一点M，使得AM//平面B_1PQ

B. 直线A_1C_1到平面B_1PQ的距离为$\frac{2}{3}$

C. 过A_1C_1且与面B_1PQ平行的平面截正方体所得截面面积为$\frac{9}{8}$

D. 过PQ的平面截正方体的外接球所得截面面积的最小值为$\frac{3\pi}{8}$

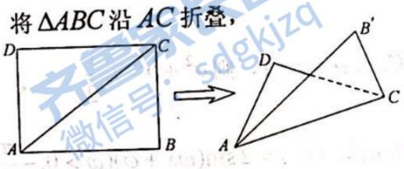
三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_2+a_4+a_5+a_9=8$，则$a_5=$______.

14. 已知$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{10}}{10}$，则$\cos\alpha$的值为______.

15. 若$x=-1$是函数$f(x)=(x^2+ax+1)e^{-x}$的极值点，则$f(x)$的极大值为______.

16. 如图，在矩形$ABCD$中，$AB=4$，$BC=3$，将ΔABC沿AC折叠，在折叠过程中三棱锥$B'-ACD$体积的最大值为______，此时异面直线AB'与CD所成角的余弦值为______.（第一空2分，第二空3分）



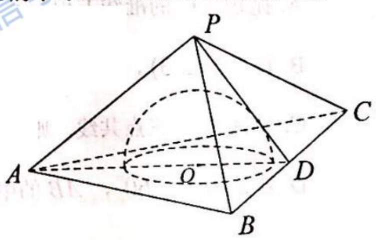
四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10分）在①$2a\cos B=c$；②向量$\boldsymbol{m}=(a,b-c)$，$\boldsymbol{n}=(a-b,c+b)$，$\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$；③$\tan A+\tan B=\frac{-\sqrt{3}\cos C}{\cos A\cos B}$这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并进行求解.

问题：在ΔABC中，a,b,c分别是内角A,B,C的对边，已知$a=\sqrt{3}$，$c=3$，D为AC边的中点，若______，求BD的长度.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18.（12分）如图，在正三棱锥$P-ABC$中，有一半径为1的半球，其底面圆O与正三棱锥的底面贴合，正三棱锥的三个侧面都和半球相切.



设点D为BC的中点，$\angle ADP=\alpha$.

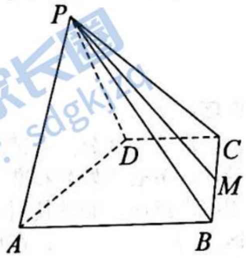
（1）用α分别表示线段BC和PD长度；

（2）当$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$时，求三棱锥的侧面积$S$的最小值.

19.（12 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$AB//CD$，$\angle ABC=90^\circ$，$AB=2BC=2CD=2$，ΔADP 为等边三角形，且面 $ADP\perp$ 底面 $ABCD$.

（1）若 M 为 BC 中点，求证：$PM\perp BC$；

（2）求面 PAD 与面 PBC 所成二面角的余弦值.



20.（12 分）已知椭圆 Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的长轴长为 4，点 $P(\dfrac{2\sqrt{6}}{3},1)$ 在 Γ 上.

（1）求椭圆 Γ 的方程；

（2）设椭圆 Γ 的左、右顶点分别为 A,B，过定点 $(1,0)$ 的直线与椭圆 Γ 交于 C,D 两点（异于点 A,B），试探究直线 AC,BD 交点的横坐标是否为定值？若是，求出该定值；若不是，说明理由.

21.（12 分）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=4$，$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}a_n+n,n\text{为奇数}\\ a_n-2n,n\text{为偶数}\end{cases}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（1）记 $b_n=a_{2n}-2$，证明：数列 $\{b_n\}$ 为等比数列，并求 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的前 $2n$ 项和 S_{2n}.

22.（12 分）已知函数 $f(x)=\ln x-ax+a$（$a\in\mathbf{R}$）.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有零点 x_0，

①求 a 的取值范围；

②求证：$\dfrac{2-a}{a}<x_0<e^{\frac{1}{a}}$.

2021～2022 学年度第一学期期末学业水平诊断

高三数学参考答案及评分标准

一、选择题

AACB　CDDC

二、选择题

9. ABD　10. AD　11. ABD　12. BCD

三、填空题

13. 2　14. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　15. $\frac{4}{e}$　16. $\frac{24}{5}$，$\frac{16}{25}$

四、解答题

17.解：若选①:因为$2a\cos B=c$，由正弦定理得$2\sin A\cos B=\sin C$. ············2 分

因为$\sin C=\sin(A+B)$，所以$2\sin A\cos B=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，··········3 分

整理得$\sin(A-B)=0$. 又$-\pi<A-B<\pi$，所以$A-B=0$，即$A=B$. ············5 分

所以$b=a=\sqrt{3}$. 所以$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{1}{2}$. ···································7 分

在ΔBCD中，由余弦定理$BD^2=(\sqrt{3})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-2\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C=\frac{21}{4}$，······9 分

所以$BD=\frac{\sqrt{21}}{2}$. ···10 分

若选②：因为$\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，所以$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$，即$a(a-b)+(b-c)(c+b)=0$，

整理得$a^2-ab-c^2+b^2=0$. ···2 分

所以$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$. ··3 分

因为$0<C<\pi$，所以$C=\frac{\pi}{3}$. ··5 分

在ΔABC中，由正弦定理$\frac{3}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sin A}$，得$\sin A=\frac{1}{2}$，

因为$0<A<C=\frac{\pi}{3}$，所以$A=\frac{\pi}{6}$. ··7 分

所以$B=\pi-A-C=\frac{\pi}{2}$，由勾股定理$b=\sqrt{a^2+c^2}=2\sqrt{3}$，·························9 分

又D为斜边AC中点，所以$BD=\frac{b}{2}=\sqrt{3}$ ··10 分

若选③：由已知$\dfrac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B}=\dfrac{-\sqrt{3}\cos C}{\cos A\cos B}$，……………………2 分

所以$\sin(A+B)=-\sqrt{3}\cos C$．……………………3 分

又$\sin C=\sin(A+B)$，所以$\tan C=-\sqrt{3}$，所以$C=\dfrac{2\pi}{3}$．……………………5 分

在ΔABC中，由正弦定理$\dfrac{3}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin A}$，得$\sin A=\dfrac{1}{2}$．

因为$0<A<C=\dfrac{2\pi}{3}$，所以$A=\dfrac{\pi}{6}$．……………………7 分

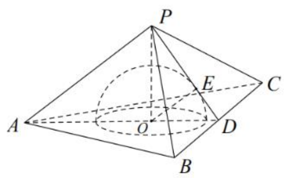
所以$B=\pi-A-C=\dfrac{\pi}{6}$，故$b=a=\sqrt{3}$．

在ΔBCD中，由余弦定理$BD^2=(\sqrt{3})^2+(\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2-2\times\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos C=\dfrac{21}{4}$，……9 分

所以$BD=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$．……………………10 分

18.解：（1）连接OP，由题意O为ΔABC的中心，且$PO\perp$面ABC，又$AD\subset$面ABC，所以$PO\perp AD$，所以ΔPOD为直角三角形.

设半球与面PBC的切点为E，则$|OE|=1$且$OE\perp PD$.



在$Rt\Delta ODE$中，$\dfrac{|OE|}{\sin\alpha}=|OD|=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}|BC|$，

所以$|BC|=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin\alpha}$．……………………2 分

在$Rt\Delta POD$中，$|PD|=\dfrac{|OD|}{\cos\alpha}=\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$．……………………4 分

（2）由题知，$S=3S_{\Delta PBC}=3\times\dfrac{1}{2}\times|BC|\times|PD|=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin\alpha}\times\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$，

化简得$S=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sin^2\alpha\cos\alpha}$，$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，……………………6 分

令$\cos\alpha=t$，则上述函数变形为$S(t)=\dfrac{3\sqrt{3}}{t-t^3}$，$t\in(0,1)$，……………………7 分

所以$S'(t)=\dfrac{3\sqrt{3}(3t^2-1)}{(t-t^3)^2}$，……………………8 分

令 $S'(t)=0$，得 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 当 $t\in(0,\frac{\sqrt{3}}{3})$ 时，$S'(t)<0$，$S(t)$ 单调递减，当 $t\in(\frac{\sqrt{3}}{3},1)$ 时，

$S'(t)>0$，$S(t)$ 单调递增，……………………………………………………………10 分

所以当 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，三棱锥的侧面积 S 的最小值为 $S(\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{27}{2}$.……………………12 分

19.解：（1）取 AD 中点 O，连接 OM. 因为在梯形 $ABCD$ 中，O,M 分别为 AD,BC 的中点，所以 $OM//AB$，又 $AB\perp BC$，所以 $OM\perp BC$. ……………………………2 分

因为 ΔADP 为等边三角形，故 $PO\perp AD$，又面 $ADP\perp$ 底面 $ABCD$，面 $ADP\cap$ 面 $ABCD=AD$，$PO\subset$ 面 ADP，

故 $PO\perp$ 底面 $ABCD$. ………………………………………………………………3 分

因为 $BC\subset$ 面 $ABCD$，所以 $PO\perp BC$.

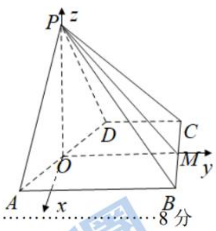
又因为 $OP\cap OM=O$，所以 $BC\perp$ 面 POM，……………………………………4 分

而 $PM\subset$ 面 POM，故 $PM\perp BC$. ……………………………………………5 分

（2）由（1）可知，以 O 为坐标原点，以向量 $\overrightarrow{MB},\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OP}$ 的方向分别作为 x,y,z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$，……………………………………6 分

则 $B(\frac{1}{2},\frac{3}{2},0)$，$C(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},0)$，$A(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$，$D(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$，$P(0,0,\frac{\sqrt{6}}{2})$，

所以 $\overrightarrow{AD}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{OP}=(0,0,\frac{\sqrt{6}}{2})$，



$\overrightarrow{CB}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{BP}=(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{6}}{2})$，…………………7 分

设 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$ 为平面 PAD 的一个法向量，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\bullet\overrightarrow{AD}=0\\ \boldsymbol{m}\bullet\overrightarrow{OP}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-x_1+y_1=0\\ \frac{\sqrt{6}}{2}z_1=0\end{cases}$，令 $x_1=1$，则 $\boldsymbol{m}=(1,1,0)$. ……………………8 分

设 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$ 为平面 PBC 的一个法向量，则有

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\bullet\overrightarrow{CB}=0\\ \boldsymbol{n}\bullet\overrightarrow{CP}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_2=0\\ -\frac{1}{2}x_2-\frac{3}{2}y_2+\frac{\sqrt{6}}{2}z_2=0\end{cases}$，令 $z_2=\sqrt{6}$，则 $\boldsymbol{n}=(0,2,\sqrt{6})$. … 10 分

于是 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\frac{\boldsymbol{m}\bullet\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

所以面 PAD 与面 PBC 所成的二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$. ………………………………12 分

20. 解：（1）由题意$2a=4$，……1分

又$P(\frac{2\sqrt{6}}{3},1)$在椭圆上，所以$\frac{8}{3a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，……2分

解得$a=2$，$b=\sqrt{3}$．……3分

所以椭圆Γ的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．……4分

（2）由（1）可得$A(-2,0),B(2,0)$，设过点$(1,0)$的直线为$x=my+1$，

$C(x_1,y_1),D(x_2,y_2)$，……5分

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\ x=my+1\end{cases}$，消$x$整理得$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，……6分

$\therefore y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4},y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$．……7分

直线AC的方程为$y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，直线BD的方程为$y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，

联立两条直线方程，解得$x=2\cdot\frac{y_1(x_2-2)+y_2(x_1+2)}{y_2(x_1+2)-y_1(x_2-2)}$．①……9分

将$x_1=my_1+1$，$x_2=my_2+1$代入①，

得$x=2\cdot\frac{2my_1y_2+3(y_1+y_2)-4y_1}{3(y_1+y_2)-2y_1}$．②……10分

将$y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4},y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$代入②，

得$x=2\cdot\frac{2m\times\frac{-9}{3m^2+4}+3\times\frac{-6m}{3m^2+4}-4y_1}{3\times\frac{-6m}{3m^2+4}-2y_1}=4\cdot\frac{\frac{9m}{3m^2+4}+y_1}{\frac{9m}{3m^2+4}+y_1}=4$．

$\therefore$直线AC,BD的交点的横坐标为定值4．……12分

21.解：（1）由题知：

$$\begin{aligned}b_{n+1}&=a_{2n+2}-2=\frac{1}{2}a_{2n+1}+(2n+1)-2\\&=\frac{1}{2}(a_{2n}-2\times 2n)+(2n+1)-2\\&=\frac{1}{2}a_{2n}-1\end{aligned}$$
……2分

所以 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\frac{1}{2}a_{2n}-1}{a_{2n}-2}=\frac{1}{2}$（$n\in\mathbf{N}^*$）. ……………………………………………3 分

又因为 $b_1=a_2-2=\frac{1}{2}a_1+1-2=1>0$，……………………………………………4 分

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 1 为首项，$\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，……………………………………………5 分

所以 $b_n=2^{1-n}$，$n\in\mathbf{N}^*$. ……………………………………………6 分

（2）由（1）知，$a_{2n}=b_n+2=2^{1-n}+2$，（$n\in\mathbf{N}^*$）

所以 $a_2+a_4+\cdots+a_{2n}=(b_1+b_2+\cdots b_n)+2n$

$=\frac{1-2^{-n}}{1-\frac{1}{2}}+2n=2-2^{1-n}+2n=2-\frac{2}{2^n}+2n$. ……………………………………………8 分

又 $a_{2n}=a_{2n-1+1}=\frac{1}{2}a_{2n-1}+2n-1$，所以 $a_{2n-1}=2(a_{2n}+1-2n)$，……………………………………………9 分

所以 $a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}=2(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})+2n-4(1+2+\cdots+n)$，

$=4-\frac{4}{2^n}+4n+2n-\frac{4n(n+1)}{2}=4-\frac{4}{2^n}-2n^2+4n$. ……………………………………………11 分

所以 $S_{2n}=6-\frac{6}{2^n}-2n^2+6n$. ……………………………………………12 分

22．解：（1）$f'(x)=\frac{1}{x}-a$，$x\in(0,+\infty)$. ……………………………………………1 分

当 $a\le 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………………………2 分

当 $a>0$ 时，$f'(x)=\frac{-a(x-\frac{1}{a})}{x}$，当 $x\in(0,\frac{1}{a})$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(\frac{1}{a},+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减. ……………………………………………3 分

综上，$a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，当 $a>0$ 时 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$ 上单调递增，在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上单调递减. ……………………………………………4 分

（2）①注意到，$f(1)=\ln 1-a+a=0$，

由（1）知，当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，对任意 $x>1$，恒有 $f(x)>f(1)=0$，不合题意；……………………………………………5 分

同理，当$a\ge 1$时，$f(x)$在$(\frac{1}{a},+\infty)$上单调递减，又$\frac{1}{a}<1$，所以对任意$x>1$，恒有

$f(x)<f(1)=0$，不合题意；……………………………………………………6分

当$0<a<1$时，$\frac{1}{a}>1$，由（1）知，$f(x)$在$[1,\frac{1}{a})$上单调递增，在$(\frac{1}{a},+\infty)$上单调递减，

所以$f(\frac{1}{a})>f(1)=0$， 又当$x\to+\infty$时，$f(x)\to-\infty$，由零点存在定理知，存在唯一

一点$x_0\in(\frac{1}{a},+\infty)$，使得$f(x_0)=0$，满足题意.……………………………………7分

综上所述，a的取值范围为$\{a\,|\,0<a<1\}$. ………………………………………………8分

②由①知，当$0<a<1$时，$f(x_0)=\ln x_0-ax_0+a=0$，解得$a=\dfrac{\ln x_0}{x_0-1}$.

要证$x_0>\dfrac{2-a}{a}$，只需证$\ln x_0>\dfrac{2(x_0-1)}{x_0+1}$.

令$g(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}$，$x\in(1,+\infty)$，则$g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$，

所以$g(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}$在$(1,+\infty)$上单调递增，又$g(1)=0$，

所以$g(x)>0$在$(1,+\infty)$上恒成立，

即$\ln x_0>\dfrac{2(x_0-1)}{x_0+1}$，即$x_0>\dfrac{2-a}{a}$. ……………………………………………10分

要证$x_0<e^{\frac{1}{a}}$，只需证$\ln x_0<\dfrac{1}{a}$，即$\ln x_0<\dfrac{x_0-1}{\ln x_0}$.

又因为$x_0>1$，即证$(\ln x_0)^2<x_0-1$.

令$h(x)=(\ln x)^2-x+1$，$x\in(1,+\infty)$，则$h'(x)=\dfrac{2\ln x-x}{x}$.

又$(2\ln x-x)'=\dfrac{2}{x}-1=\dfrac{2-x}{x}$，所以函数$y=2\ln x-x$在$(1,2)$上单调递增，在$(2,+\infty)$上单调递减，当$x=2$时，$(2\ln x-x)_{\max}=2\ln 2-2<0$，所以$h'(x)<0$在$(1,+\infty)$恒成立，

所以$h(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，又$x_0>1$，所以$h(x_0)<h(1)=0$，即$(\ln x_0)^2<x_0-1$，

不等式得证.………………………………………………………………………12分

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索