2021～2022 学年高三核心模拟卷(下)

理科数学(三)

注意事项:

1. 本卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答:用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 选考题的作答:先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用 2B 铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内,写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
5. 考试结束后,请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\left\{x\left|\frac{x-2}{x+1}\leqslant 0\right.\right\}$,$B=\{x|y=\ln x\}$,则 $A\cup B=$

A. $(0,2)$　　B. $(0,2]$　　C. $(-1,+\infty)$　　D. $[-1,+\infty)$

2. 已知 $a,b\in\mathbf{R}$,i 是虚数单位,$\frac{a-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=1+b\mathrm{i}$,则 $|a+b\mathrm{i}|=$

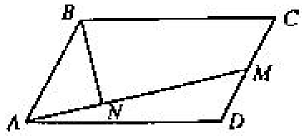
A. 2　　B. $\sqrt{10}$　　C. 4　　D. 10

3. 已知公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1>0$,则“$q>1$”是“$a_7>a_5$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 如图,在平行四边形 $ABCD$ 中,M 是 CD 的中点,点 N 是线段 AM 上的一点,且 $NM=2AN$,则 $\overrightarrow{BN}=$



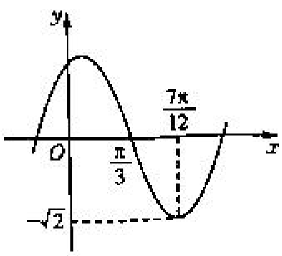
A. $-\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

B. $-\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

C. $-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

D. $-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

5. 已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\cos(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示,则 $f(x)$的单调递增区间为



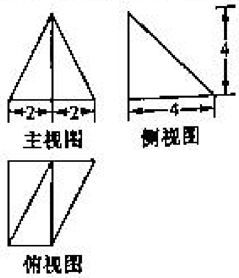
A. $\left[k\pi+\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right]$,$k\in\mathbf{Z}$

B. $\left[k\pi+\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{7\pi}{12}\right]$,$k\in\mathbf{Z}$

C. $\left[k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$,$k\in\mathbf{Z}$

D. $\left[k\pi-\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{\pi}{12}\right]$,$k\in\mathbf{Z}$

6. 某几何体的三视图如图所示(单位:cm),则该几何体的体积是



A. 16 cm^3　　B. 48 cm^3　　C. 64 cm^3　　D. 96 cm^3

7. 若 $(1-x)^{2022}=a_0+a_1(x+1)+\cdots+a_{2022}(x+1)^{2022}$,则 $a_1\cdot 3+a_2\cdot 3^2+\cdots+a_{2022}\cdot 3^{2022}$ 的值为

A. $-1-2^{2022}$　　B. $-1+2^{2022}$

C. $1+2^{2022}$　　D. $1-2^{2022}$

8. 我国古代数学名著《孙子算经》载有一道数学问题:"今有物不知其数,三三数之剩二,五五数之剩二,七七数之剩二,问物几何?"根据这一数学思想,所有被 3 除余 2 的自然数从小到大组成数列 $\{a_n\}$,所有被 5 除余 2 的自然数从小到大组成数列 $\{b_n\}$,把 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的公共项从小到大排列得到数列 $\{c_n\}$,记数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,则 $S_{30}=$

A. 6 581　　B. 6 583　　C. 6 585　　D. 6 587

9. 已知函数 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 为奇函数,若 $g(x)=2f(x)+1$,则 $g\left(\frac{1}{2\,022}\right)+g\left(\frac{2}{2\,022}\right)+\cdots+g\left(\frac{2\,021}{2\,022}\right)=$

A. 2 021　　B. 2 022　　C. 4 042　　D. 4 044

10. 在直棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,底面 $ABCD$ 是矩形,$AB=2AA_1=\frac{\sqrt{3}}{3}AD$,则直线 DD_1 与平面 A_1BD 所成的角的大小为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{12}$

11. 已知双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,点 P 是右支上异于顶点的一点,$\triangle PF_1F_2$ 的内切圆圆心为 I,过点 F_2 作直线 PI 的垂线,垂足为 M,O 为坐标原点,则 $|OM|=$

A. 2　　B. 4　　C. 8　　D. 16

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{e^{ax-1}}-x^2, & x<0,\\ e^{ax+1}-x^2, & x>0,\end{cases}$ 若 $f(x)$ 有四个不同的零点,则实数 a 的取值范围是

A. $(-\infty,2e^{-\frac{3}{2}})$　　B. $(-\infty,e)$

C. $(0,2e^{-\frac{3}{2}})$　　D. $(0,e)$

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=-1$,$a_{n+1}a_n-a_n+1=0$,则 $a_{2022}=$________.

14. 已知 $2\sin\alpha-\cos\beta=1$,$2\cos\alpha+\sin\beta=\sqrt{2}$,则 $\sin(\beta-\alpha)=$________.

15. 若 $a>0,b>0$,$\lg a+\lg b=\lg(2a+b)$,则 $\frac{2a+b^2}{b}$ 的最小值为________.

16. 在平面直角坐标系 xOy 中,抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F,过点 F 的直线 l 交 C 于 A,B 两点(点 A 位于第一象限内),点 A 关于 x 轴的对称点为 A',若直线 l 的斜率是 2,则直线 $A'B$ 的斜率是________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

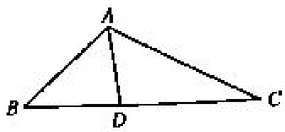
（一）必考题：共 60 分。

17.（本小题满分 12 分）

如图，在$\triangle ABC$中，$AB=6$，点 D 在 BC 边上，$AD=4$，$BD=5$.

（1）若 $DC=7$，求线段 AC 的长度；

（2）若$\angle BAD=\angle DAC$，求线段 AC 的长度.

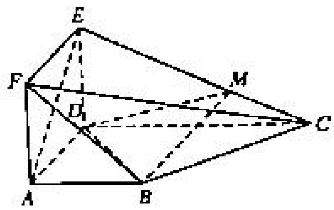


18.（本小题满分 12 分）

如图所示，梯形 $ABCD$ 所在的平面与正方形 $ADEF$ 所在的平面互相垂直，$AB/\!/DC$，$AB=AD=2$，$DC=4$，$EA\perp FC$，点 M 是线段 EC 上的一点，且 $EM=2MC$.

（1）求证：$DC\perp DA$；

（2）求二面角 $M-DB-C$ 的余弦值.



19.（本小题满分 12 分）

为了解国内不同年龄段的民众旅游消费基本情况，某旅游网站从其数据库中随机抽取了 1 500 条客户信息进行分析，把一年旅游消费金额不少于 8 千元的称为“高消费”，否则称为“低消费”. 这些客户一年的旅游消费金额如下表：

旅游消费（千元）	[0,2)	[2,4)	[4,6)	[6,8)	[8,10)	[10,+∞)	合计
年轻人（人）	135	120	105	90	90	60	600
中老年（人）	75	135	195	195	165	135	900

（1）完成 2×2 列联表，并判断能否有 99.9%的把握认为旅游消费高低与年龄有关？

	低消费	高消费	合计
年轻人（人）			
中老年（人）			
合计			

（2）按年龄用分层抽样的方法从这 1 500 人中随机抽取 10 人进行电话回访，再从这 10 人中随机抽取 3 人发放旅游优惠券，设 X 表示选出的 3 人中年轻人的个数，求 X 的分布列和数学期望.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

临界值表：

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.100	0.050	0.025	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(2,0)$，且 C 过点 $P\left(\frac{20}{9},-\frac{1}{9}\right)$.

(1)求 C 的方程；

(2)若点 M 是 C 上的一点，过 M 作直线 l 与 C 相切，直线 l 与 y 轴的正半轴交于点 A，过 M 与 PF 平行的直线交 x 轴于点 B，且 $AB\perp PF$，求直线 l 的方程.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\ln x+ax^2-ax(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $a=1$，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

(2)若 $f(x)\leqslant 0$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围.

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.（本小题满分 10 分）**选修 4－4：坐标系与参数方程**

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{2}+\sqrt{2}\cos\alpha,\\ y=\sqrt{2}\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1)求 C 的普通方程；

(2)已知点 A 的直角坐标为 $(-1,0)$，M 为 C 上的动点，点 P 满足 $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AP}$，求点 P 的轨迹 C_1 的极坐标方程.

23.（本小题满分 10 分）**选修 4－5：不等式选讲**

已知函数 $f(x)=|x-2a|+|x-a-1|(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $a=2$ 时，求不等式 $f(x)\geqslant 4$ 的解集；

(2)若 $f(x)\geqslant 4$，求实数 a 的取值范围.

2021～2022学年高三核心模拟卷(下)

理科数学(三)参考答案

1. C　由题，$A=\left\{x\left|\frac{x-2}{x+1}\leqslant 0\right.\right\}=(-1,2]$，$B=\{x|y=\ln x\}=(0,+\infty)$，所以 $A\cup B=(-1,+\infty)$. 故选 C.

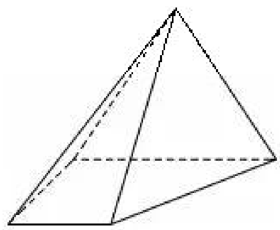
2. B　由于 $\frac{a-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\frac{(a-\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=\frac{2a-1-(a+2)\mathrm{i}}{5}=\frac{2a-1}{5}-\frac{a+2}{5}\mathrm{i}$，所以 $\frac{2a-1}{5}-\frac{a+2}{5}\mathrm{i}=1+b\mathrm{i}$，所以 $\begin{cases}\frac{2a-1}{5}=1,\\-\frac{a+2}{5}=b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=3,\\b=-1,\end{cases}$ 所以 $|a+b\mathrm{i}|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$. 故选 B.

3. A　由于公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1>0$，所以 $a_7>0$，$a_5>0$，若 $a_7>a_5$，则 $a_5q^2>a_5$，所以 $q^2>1$，即 $q>1$ 或 $q<-1$，所以公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1>0$，则“$q>1$”是“$a_7>a_5$”的充分不必要条件. 故选 A.

4. D　由题意知 $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$. 因为 M 是 CD 的中点，所以 $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，则 $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM})-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)-\overrightarrow{AB}=-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. 故选 D.

5. D　由图象知，$\frac{T}{4}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}$，$\therefore T=\pi$，$\therefore \frac{2\pi}{\omega}=\pi$，$\omega=2$，$\therefore f(x)=\sqrt{2}\cos(2x+\varphi)$ 过点 $\left(\frac{7\pi}{12},-\sqrt{2}\right)$，$\therefore 2\times\frac{7\pi}{12}+\varphi=2k\pi+\pi$，$\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{6}$，且 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \varphi=-\frac{\pi}{6}$，$\therefore f(x)=\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，令 $2k\pi-\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $k\pi-\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$，$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{\pi}{12}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$. 故选 D.

6. A　由三视图可得原几何体为四棱锥，如图所示：



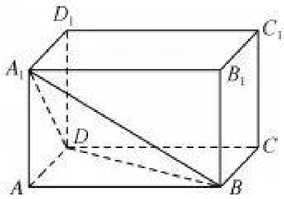
则体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(2+4)\times4\times4=16\ \mathrm{cm}^3$. 故选 A.

7. D　取 $x=-1$，得到 $a_0=2^{2\,022}$；取 $x=2$，则 $a_0+a_1\cdot3+a_2\cdot3^2+\cdots+a_{2\,022}\cdot3^{2\,022}=1$. 故 $a_1\cdot3+a_2\cdot3^2+\cdots+a_{2\,022}\cdot3^{2\,022}=1-2^{2\,022}$. 故选 D.

8. C　根据题意数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2，公差为 3 的等差数列，$a_n=2+3(n-1)=3n-1$，数列 $\{b_n\}$ 是首项为 2，公差为 5 的等差数列，$b_n=2+5(n-1)=5n-3$，数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的公共项从小到大排列得到数列 $\{c_n\}$，故数列 $\{c_n\}$ 是首项为 2，公差为 15 的等差数列，$c_n=2+15(n-1)=15n-13$，所以 $S_{30}=\frac{(2+15\times30-13)\times30}{2}=6\,585$. 故选 C.

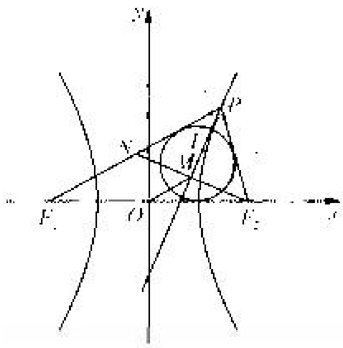
9. A　$\because$ 函数 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 为奇函数，$\therefore f\left(-x+\frac{1}{2}\right)=-f\left(x+\frac{1}{2}\right)$，即 $f(x)+f(1-x)=0$，$\therefore g(x)+g(1-x)=2f(x)+1+2f(1-x)+1=2$. 设 $S=g\left(\frac{1}{2\,022}\right)+g\left(\frac{2}{2\,022}\right)+g\left(\frac{3}{2\,022}\right)+\cdots+g\left(\frac{2\,021}{2\,022}\right)$，$S=g\left(\frac{2\,021}{2\,022}\right)+g\left(\frac{2\,020}{2\,022}\right)+g\left(\frac{2\,019}{2\,022}\right)+\cdots+g\left(\frac{1}{2\,022}\right)$，$\therefore 2S=\left[g\left(\frac{1}{2\,022}\right)+g\left(\frac{2\,021}{2\,022}\right)\right]+\left[g\left(\frac{2}{2\,022}\right)+g\left(\frac{2\,020}{2\,022}\right)\right]+\left[g\left(\frac{3}{2\,022}\right)+g\left(\frac{2\,019}{2\,022}\right)\right]+\cdots+\left[g\left(\frac{2\,021}{2\,022}\right)+g\left(\frac{1}{2\,022}\right)\right]=2\times2\,021$，$\therefore S=2\,021$. 故选 A.

10. C　不妨设 $AB=1$，则 $AA_1=\frac{1}{2}$，$AD=\sqrt{3}$，设 D_1 到平面 A_1BD 的距离为 h，



在直棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，易得 $A_1D=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+(\sqrt{3})^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$，$BD=\sqrt{3+1}=2$，$A_1B=\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{\sqrt{5}}{2}$. 在 $\triangle A_1BD$ 中，由余弦定理 $\cos\angle BA_1D=\frac{\frac{5}{4}+\frac{13}{4}-4}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{\sqrt{13}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{65}}$，所以 $\sin\angle BA_1D=\frac{8}{\sqrt{65}}$，所以 $S_{\triangle A_1BD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{\sqrt{13}}{2}\sin\angle BA_1D=1$. 因为 $V_{B-A_1DD_1}=V_{D_1-A_1BD}$，即 $\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle A_1DD_1}\cdot AB=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle A_1BD}\cdot h$，解得 $h=\frac{\sqrt{3}}{4}$. 设直线 DD_1 与平面 A_1BD 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{h}{DD_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $\theta=\frac{\pi}{3}$. 故选 C.

11. A　如图，延长 F_2M 交 PF_1 于点 N，则 $PN=PF_2$，点 M 是线段 NF_2 的中点，又点 O 是线段 F_1F_2 的中点，所以 $|OM|=\frac{1}{2}|F_1N|=\frac{1}{2}(|PF_1|-|PN|)=\frac{1}{2}(|PF_1|-|PF_2|)=\frac{1}{2}\times 4=2$. 故选 A.



12. C　当 $x>0$ 时，$-x<0$，$f(x)=e^{ax+1}-x^2$，$f(-x)=\frac{1}{e^{a(-x)-1}}-(-x)^2=e^{ax+1}-x^2=f(x)$；当 $x<0$ 时，$-x>0$，$f(-x)=e^{a(-x)+1}-(-x)^2=e^{-ax+1}-x^2$，$f(x)=\frac{1}{e^{ax-1}}-x^2=e^{-ax+1}-x^2=f(-x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数. 若 $f(x)$ 有四个不同的零点，即 $e^{ax+1}-x^2=0(x>0)$ 有两个解，即 $e^{ax+1}=x^2(x>0)$ 有两个解，两边取自然对数，$ax+1=2\ln x$，即 $y=ax+1$ 的图象与 $y=2\ln x$ 的图象有两个交点. 当直线 $y=ax+1$ 与 $y=2\ln x$ 的图象相切时，设切点为 $(x_0,2\ln x_0)$，则 $y'=\frac{2}{x_0}$，则 $\begin{cases}a=\frac{2}{x_0},\\ax_0+1=2\ln x_0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=e^{\frac{3}{2}},\\a=2e^{-\frac{3}{2}},\end{cases}$ 所以实数 a 的取值范围是 $(0,2e^{-\frac{3}{2}})$. 故选 C.

13. $\frac{1}{2}$　由 $a_1=-1$，$a_{n+1}a_n-a_n+1=0$，所以 $a_2=\frac{a_1-1}{a_1}=2$，$a_3=\frac{a_2-1}{a_2}=\frac{1}{2}$. 由 $a_{n+1}a_n-a_n+1=0$，得 $a_{n+1}=\frac{a_n-1}{a_n}$，从而有 $a_{n+2}=\frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}}=\frac{\frac{a_n-1}{a_n}-1}{\frac{a_n-1}{a_n}}=\frac{-1}{a_n-1}$，即 $a_{n+2}=\frac{-1}{a_n-1}$，从而有 $a_{n+3}=\frac{-1}{a_{n+1}-1}=\frac{-1}{\frac{a_n-1}{a_n}-1}=a_n$，所以数列 $\{a_n\}$ 的周期为 3，所以 $a_{2\,022}=a_{673\times3+3}=a_3=\frac{1}{2}$.

14. $-\frac{1}{2}$　将两个等式两边平方可得$\begin{cases}4\sin^2\alpha-4\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos^2\beta=1,\\4\cos^2\alpha+4\cos\alpha\cdot\sin\beta+\sin^2\beta=2,\end{cases}$两式相加可得 $5-4\sin(\alpha-\beta)=3$，所以 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$，即 $\sin(\beta-\alpha)=-\frac{1}{2}$.

15. $2+2\sqrt{2}$　$\because \lg a+\lg b=\lg(2a+b)$，$\therefore ab=2a+b$，$a>0$，$b>0$，$\therefore \frac{2}{b}+\frac{1}{a}=1$，$\therefore \frac{2a+b^2}{b}=\frac{2a}{b}+b=\frac{2a}{b}+b\left(\frac{2}{b}+\frac{1}{a}\right)=\frac{2a}{b}+\frac{b}{a}+2\geqslant 2\sqrt{\frac{2a}{b}\cdot\frac{b}{a}}+2=2+2\sqrt{2}$，当且仅当$\sqrt{2}a=b$，即 $a=\sqrt{2}+1$，$b=2+\sqrt{2}$时取等号，$\therefore \frac{2a+b^2}{b}$的最小值为 $2+2\sqrt{2}$.

16. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$　由题意知，C 的焦点为 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，则直线 l：$y=2\left(x-\frac{p}{2}\right)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$(x_1>x_2)$，则 $A'(x_1,-y_1)$.

由$\begin{cases}y=2\left(x-\frac{p}{2}\right),\\y^2=2px,\end{cases}$得 $4x^2-6px+p^2=0$，所以$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{3p}{2},\\x_1x_2=\frac{p^2}{4},\end{cases}$所以直线 $A'B$ 的斜率 $k=\frac{y_2+y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_2+y_1}{\frac{y_2^2}{2p}-\frac{y_1^2}{2p}}=\frac{2p}{y_2-y_1}=$

$\frac{p}{x_2-x_1}=\frac{p}{-\sqrt{(x_2+x_1)^2-4x_2x_1}}=\frac{p}{-\sqrt{\left(\frac{3p}{2}\right)^2-4\times\frac{p^2}{4}}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

17. 解：(1)在$\triangle ABD$中，由余弦定理得 $\cos\angle ADB=\frac{AD^2+BD^2-AB^2}{2\cdot AD\cdot BD}=\frac{16+25-36}{2\times4\times5}=\frac{1}{8}$. ………… 2 分

所以 $\cos\angle ADC=\cos(\pi-\angle ADB)=-\cos\angle ADB=-\frac{1}{8}$. ………… 4 分

在$\triangle ADC$中，由余弦定理得

$AC^2=AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cdot\cos\angle ADC=4^2+7^2-2\times4\times7\times\left(-\frac{1}{8}\right)=72$，

所以 $AC=6\sqrt{2}$. ………… 6 分

(2)在$\triangle ABD$中，由余弦定理得 $\cos\angle BAD=\frac{AD^2+AB^2-BD^2}{2\cdot AD\cdot AB}=\frac{16+36-25}{2\times4\times6}=\frac{9}{16}$. ………… 8 分

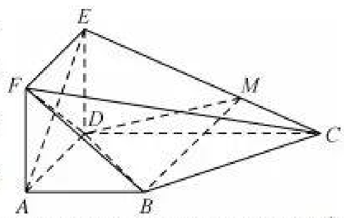
所以 $\sin\angle BAD=\sqrt{1-\cos^2\angle BAD}=\frac{5\sqrt{7}}{16}$，所以 $\sin\angle BAC=2\times\frac{5\sqrt{7}}{16}\times\frac{9}{16}=\frac{45\sqrt{7}}{128}$. ………… 9 分

由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADB}+S_{\triangle ADC}$，

得$\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC=\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\angle BAD+\frac{1}{2}AD\cdot AC\cdot\sin\angle DAC$，

即$\frac{1}{2}\times6AC\times\frac{45\sqrt{7}}{128}=\frac{1}{2}\times6\times4\times\frac{5\sqrt{7}}{16}+\frac{1}{2}\times4AC\times\frac{5\sqrt{7}}{16}$，解得 $AC=\frac{96}{11}$. ………… 12 分

18. (1)证明：连接 FD，如图所示.



因为正方形 $ADEF$，所以 $DF\perp EA$，又 $EA\perp FC$，$DF\cap FC=F$，$DF,FC\subset$平面 DFC，

所以 $EA\perp$平面 DFC. ………… 1 分

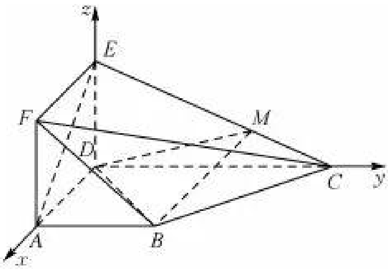
又 $DC\subset$平面 DFC，所以 $EA\perp DC$. ………… 2 分

因为正方形 $ADEF$，所以 $AD\perp DE$，又平面 $ABCD\perp$平面 $ADEF$，平面 $ABCD\cap$平面 $ADEF=AD$，$DE\subset$平面 $ADEF$，所以 $DE\perp$平面 $ABCD$. ………… 3 分

又 $DC\subset$平面 $ABCD$，所以 $DE\perp DC$. ………… 4 分

又 $DE\cap EA=E$，DE，$EA\subset$平面 DEA，所以 $DC\perp$平面 DEA. ………… 5 分

又 $DA\subset$平面 DEA，所以 $DC\perp DA$. ………… 6 分



(2)解：以 D 为原点，DA，DC，DE 所在直线分别为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，则 $D(0,0,0)$，$B(2,2,0)$，$C(0,4,0)$，$E(0,0,2)$，

所以 $\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{DE}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{EC}=(0,4,-2)$. ………… 7 分

所以 $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{DE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{EC}=(0,0,2)+\frac{2}{3}(0,4,-2)=\left(0,\frac{8}{3},\frac{2}{3}\right)$.

………… 8 分

设平面 MBD 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DM}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}2x+2y=0,\\ \frac{8}{3}y+\frac{2}{3}z=0,\end{cases}$

令 $x=1$，则 $y=-1$，$z=4$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,-1,4)$.

易得平面 BDC 的一个法向量为$\overrightarrow{DE}=(0,0,2)$. ………… 9 分

所以 $|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{DE}\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{DE}|}\right|=\frac{8}{3\sqrt{2}\times 2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. ………… 10 分

由图可知，二面角 $M-DB-C$ 为锐角，所以二面角 $M-DB-C$ 的余弦值是$\frac{2\sqrt{2}}{3}$. ………… 12 分

19. 解：(1)由题意，得 2×2 列联表如下：

	低消费	高消费	合计
年轻人(人)	450	150	600
中老年人(人)	600	300	900
合计	1 050	450	1 500

………… 2 分

所以 $K^2=\frac{1\,500\times(450\times300-150\times600)^2}{600\times900\times1\,050\times450}=\frac{250}{21}\approx11.905>10.828$. ………… 4 分

所以有 99.9%的把握认为旅游消费的高低与年龄有关. ………… 5 分

(2)抽取的 10 人中年轻人、中老年的人数分别是：$10\times\frac{600}{1\,500}=4$(人)，$10\times\frac{900}{1\,500}=6$(人). ………… 6 分

X 的所有可能取值是 0，1，2，3. ………… 7 分

所以 $P(X=0)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}$，$P(X=1)=\frac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}$，$P(X=2)=\frac{C_6^1C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}$，

$P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}$.

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

………… 10 分

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=\frac{6}{5}$. ………… 12 分

20. 解：(1)由题意知$\begin{cases}\dfrac{\left(\frac{20}{9}\right)^2}{a^2}+\dfrac{\left(-\frac{1}{9}\right)^2}{b^2}=1,\\ a^2-b^2=4,\end{cases}$ ······ 2分

解得 $a=\sqrt{5}$，$b=1$， ······ 3分

所以 C 的方程为$\frac{x^2}{5}+y^2=1$. ······ 4分

(2)易得直线 PF 的方程为$y=\dfrac{-\frac{1}{9}}{\frac{20}{9}-2}(x-2)$，即 $y=-\frac{1}{2}x+1$. ······ 5分

显然直线 l 的斜率存在且不为0，设点 $M(x_0,y_0)(x_0\neq0,y_0\neq0)$，设直线 l 的方程为 $y-y_0=k(x-x_0)(k\neq0)$，即 $y=kx-kx_0+y_0$.

由$\begin{cases}\frac{x^2}{5}+y^2=1,\\ y=kx-kx_0+y_0\end{cases}$ 消去 y，得$\left(\frac{1}{5}+k^2\right)x^2+2k(y_0-kx_0)x+(y_0-kx_0)^2-1=0$.

因为过 M 作直线 l 与 C 相切，所以 $\Delta=[2k(y_0-kx_0)]^2-4\left(\frac{1}{5}+k^2\right)[(y_0-kx_0)^2-1]=0$，整理得$\left(y_0k+\frac{1}{5}x_0\right)^2=0$，即 $k=-\frac{x_0}{5y_0}$，所以直线 l 的方程为$\frac{x_0x}{5}+y_0y=1$. ······ 7分

令 $x=0$，得 $y_A=\frac{1}{y_0}$，所以 $A\left(0,\frac{1}{y_0}\right)$. ······ 8分

因为 $MB/\!/PF$，所以 $k_{MB}=-\frac{1}{2}$，所以直线 MB 的方程是 $y-y_0=-\frac{1}{2}(x-x_0)$，

即 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x_0+y_0$. ······ 9分

令 $y=0$，解得 $x_B=x_0+2y_0$，所以 $B(x_0+2y_0,0)$.

因为 $AB\perp PF$，所以$\dfrac{0-\frac{1}{y_0}}{x_0+2y_0-0}=\dfrac{1}{y_0(-2y_0-x_0)}=2$，即 $y_0(-2y_0-x_0)=\frac{1}{2}$，所以 $x_0=-2y_0-\frac{1}{2y_0}$，又因为$\frac{x_0^2}{5}+y_0^2=1$，所以$\frac{4y_0^2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{1}{20y_0^2}+y_0^2=1$， ······ 10分

解得 $y_0=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$，因为 $y_A>0$，所以 $y_0>0$，所以 $y_0=\frac{\sqrt{6}}{6}$，$x_0=-\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{3}{\sqrt{6}}=-\frac{5\sqrt{6}}{6}$. ······ 11分

所以直线 l 的方程是$\dfrac{-\frac{5\sqrt{6}}{6}x}{5}+\frac{\sqrt{6}}{6}y=1$，即 $x-y+\sqrt{6}=0$. ······ 12分

21. 解：(1)若 $a=1$，则 $f(x)=\ln x+x^3-x$，$f'(x)=\frac{1}{x}+3x^2-1$， ······ 1分

所以 $f'(1)=3$，$f(1)=0$， ······ 2分

所以曲线 $y=f(x)$在 $x=1$ 处的切线方程是 $y-0=3(x-1)$，即 $3x-y-3=0$. ······ 3分

(2)当 $a\geqslant0$ 时，$f(2)=\ln 2+8a-2a=\ln 2+6a>0$，不符合题意； ······ 4分

当 $a<0$ 时，$f(x)\leqslant0$ 在 $x\in[1,+\infty)$上恒成立，即$\frac{\ln x}{x}+ax^2-a\leqslant0$ 在 $x\in[1,+\infty)$上恒成立. ······ 6分

令 $h(x)=\frac{\ln x}{x}+ax^2-a$，则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}+2ax=\frac{1-\ln x+2ax^3}{x^2}$，

令 $u(x)=1-\ln x+2ax^3$，所以 $u(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减.

若 $u(1)=1+2a\leqslant 0$，即 $a\leqslant -\frac{1}{2}$ 时，$u(x)\leqslant u(1)\leqslant 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，所以 $h'(x)\leqslant 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，即 $h(x)\leqslant h(1)=0$，符合题意； …………………………………………………… 8 分

若 $u(1)=1+2a>0$，即 $a>-\frac{1}{2}$ 时，$u(e)=1-\ln e+2ae^3=2ae^3<0$，又 $u(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $\exists x_0\in(1,e)$，使得 $u(x_0)=0$，当 $x\in(1,x_0)$ 时，$u(x)>0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$u(x)<0$，所以当 $x\in(1,x_0)$，$h'(x)>0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$，$h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $h(x_0)>h(1)=0$，不符合题意. …………………………………………………………………………………… 11 分

综上所述，实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$. …………………………………………………… 12 分

22. 解：(1)由曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{2}+\sqrt{2}\cos\alpha,\\ y=\sqrt{2}\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数)，消去参数 α，

得 $(x-\sqrt{2})^2+y^2=2$，即曲线 C 的普通方程为 $(x-\sqrt{2})^2+y^2=2$. ……………………………………… 3 分

(2)设 $P(x,y)$，$M(x_1,y_1)$，因为 $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AP}$，所以 $(x_1+1,y_1)=3(x+1,y)$，即 $\begin{cases}x_1=3x+2,\\ y_1=3y.\end{cases}$ ……………… 5 分

又点 $M(x_1,y_1)$ 为 C 上的动点，所以 $(x_1-\sqrt{2})^2+y_1^2=2$，所以 $(3x+2-\sqrt{2})^2+(3y)^2=2$. ……………… 7 分

将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入，得 $9\rho^2+6(2-\sqrt{2})\rho\cos\theta+4-4\sqrt{2}=0$.

即点 P 的轨迹 C_1 的极坐标方程是 $9\rho^2+6(2-\sqrt{2})\rho\cos\theta+4-4\sqrt{2}=0$. ……………………………… 10 分

23. 解：(1)当 $a=2$ 时，$f(x)=|x-4|+|x-3|$. …………………………………………………………………… 1 分

当 $x\leqslant 3$ 时，$f(x)=4-x+3-x=7-2x\geqslant 4$，解得 $x\leqslant\frac{3}{2}$； ……………………………………………… 2 分

当 $3<x<4$ 时，$f(x)=4-x+x-3=1\geqslant 4$，无解； ……………………………………………………… 3 分

当 $x\geqslant 4$ 时，$f(x)=x-4+x-3=2x-7\geqslant 4$，解得 $x\geqslant\frac{11}{2}$. …………………………………………… 4 分

综上所述，不等式 $f(x)\geqslant 4$ 的解集为 $\left\{x\middle|x\leqslant\frac{3}{2}\text{或}x\geqslant\frac{11}{2}\right\}$. ……………………………………… 5 分

(2) $f(x)=|x-2a|+|x-a-1|\geqslant|(x-2a)-(x-a-1)|=|-a+1|$，(当且仅当 $(x-2a)(x-a-1)\leqslant 0$ 时取等号)， ………………………………………………………………………………………………… 8 分

所以 $|-a+1|\geqslant 4$， ………………………………………………………………………………… 9 分

解得 $a\leqslant -3$ 或 $a\geqslant 5$，

所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-3]\cup[5,+\infty)$. ………………………………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。