天一大联考
2022—2023 学年高中毕业班阶段性测试(四)

理科数学·答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. 答案　C

命题意图　本题考查集合的交运算.

解析　由题意,$A=\{x|x\geqslant 0\}$,$B=\{x|x\neq 1\}$,所以 $A\cap B=\{x|0\leqslant x<1$ 或 $x>1\}$.

2. 答案　A

命题意图　本题考查复数的四则运算.

解析　$\bar{z}=\dfrac{11+2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=\dfrac{(11+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}=\dfrac{15-20\mathrm{i}}{5}=3-4\mathrm{i}$,则 $z=3+4\mathrm{i}$.

3. 答案　D

命题意图　本题考查极值点的概念以及充分必要条件的判断.

解析　由极值点的定义,若 x_0 为 $f(x)$ 的极值点,则有 $f'(x_0)=0$,而由 $f'(x_0)=0$ 不一定推得 x_0 为 $f(x)$ 的极值点,例如 $f(x)=x^3$,故"$f'(x_0)=0$"是"x_0 是 $f(x)$ 的极值点"的必要不充分条件.

4. 答案　D

命题意图　本题考查平面向量的表示.

解析　由题意,$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$,设 $x\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AF}=\left(\dfrac{x}{2}+y\right)\overrightarrow{AB}+\left(x+\dfrac{y}{3}\right)\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$,由对应系数相等得 $\begin{cases}x+\dfrac{y}{3}=1,\\ \dfrac{x}{2}+y=1,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x=\dfrac{4}{5},\\ y=\dfrac{3}{5},\end{cases}$ $\therefore\overrightarrow{AC}=\dfrac{4}{5}\boldsymbol{m}+\dfrac{3}{5}\boldsymbol{n}$.

5. 答案　C

命题意图　本题考查二项式定理.

解析　原式即 $(1+xy^{-1})(x+2y)^6$,$\therefore\left(1+\dfrac{x}{y}\right)(x+2y)^6$ 的展开式中 x^2y^4 项为 $\mathrm{C}_6^5\cdot(xy^{-1})\cdot x\cdot(2y)^5+\mathrm{C}_6^4x^2\cdot(2y)^4=432x^2y^4$,系数为 432.

6. 答案　A

命题意图　本题考查三角恒等变换.

解析　由题意 $\dfrac{1-(1-2\sin^2\theta)}{2\sin\theta\cos\theta}=1-\tan\theta$,即 $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$,$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)=\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{4}+\tan\theta}{1-\tan\dfrac{\pi}{4}\tan\theta}=\dfrac{1+\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{2}}=3$.

7. 答案　B

命题意图　本题考查抛物线的性质.

解析　设 $A\left(\dfrac{y_1^2}{4},y_1\right)$,$\tan\angle AMO=k_{AM}=\dfrac{y_1-0}{\dfrac{y_1^2}{4}+1}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$,解得 $y_1=\sqrt{2}$ 或 $y_1=2\sqrt{2}$,所以 $A\left(\dfrac{1}{2},\sqrt{2}\right)$ 或 $A(2,2\sqrt{2})$,又

$F(1,0)$，所以 $k_{AF}=\dfrac{\sqrt{2}-0}{\dfrac{1}{2}-1}=-2\sqrt{2}$ 或 $k_{AF}=\dfrac{2\sqrt{2}-0}{2-1}=2\sqrt{2}$，所以 $|k_{AF}|=2\sqrt{2}$.

8. **答案** D

命题意图 本题考查三棱柱的外接球.

解析 设该正三棱柱棱长为 x，底面三角形的外接圆半径为 r，则 $\dfrac{1}{2}\sin 60°\cdot x^2\cdot x=16\sqrt{3}$，$\therefore x=4$，则 $r=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$. 设三棱柱的外接球 O 半径为 R，则 $R^2=r^2+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2=\dfrac{16}{3}+4=\dfrac{28}{3}$，$S_{表}=4\pi R^2=4\pi\times\dfrac{28}{3}=\dfrac{112}{3}\pi$.

9. **答案** C

命题意图 本题考查回归分析和数值的估算.

解析 由题意，$y=e^{1+at}$ 两边取自然对数得 $\ln y=1+at$，令 $u=\ln y$，则 $u=1+at$. $\bar{u}=(\ln y_1+\ln y_2+\ln y_3)\times\dfrac{1}{3}=2$，$\bar{t}=(t_1+t_2+t_3)\times\dfrac{1}{3}=2$，$\because$ 回归直线必过样本点的中心，$\therefore 2=2a+1$，得 $a=\dfrac{1}{2}$，$\therefore u=1+\dfrac{t}{2}$，则 $y=e^{1+\frac{t}{2}}$. 当 $t=4$ 时，$y=e^3\approx 20.09<50$；当 $t=5$ 时，$y=e^{3.5}=\sqrt{e^3\cdot e^4}<50$；当 $t=6$ 时，$y=e^4\approx 54.60>50$，$\therefore$ 从第 6 个月开始，该物种的繁殖数量超过 5 000 只.

10. **答案** C

命题意图 本题考查解三角形.

解析 $\because A=2B$，$\therefore \sin A=\sin 2B=2\sin B\cos B$ 且 $B\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\sin C=\sin(A+B)=\sin 3B=3\sin B-4\sin^3 B$，由正弦定理可得 $\dfrac{3a-c}{b}=\dfrac{3\sin A-\sin C}{\sin B}=\dfrac{6\sin B\cos B-3\sin B+4\sin^3 B}{\sin B}=6\cos B+4(1-\cos^2 B)-3=-4\cos^2 B+6\cos B+1$，令 $\cos B=t\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，则 $\dfrac{3a-c}{b}=-4t^2+6t+1$，由二次函数性质知 $-4t^2+6t+1\in\left(3,\dfrac{13}{4}\right]$，$\therefore \dfrac{3a-c}{b}\in\left(3,\dfrac{13}{4}\right]$.

11. **答案** B

命题意图 本题考查双曲线的性质和离心率的求法.

解析 不妨设点 P 在直线 $y=\dfrac{b}{a}x$ 上，由题可知 $A(-a,0)$，$\therefore k_{AB}=\dfrac{b}{2a}$，$\therefore l_{AB}:y=\dfrac{b}{2a}x+\dfrac{b}{2}$，由 $\begin{cases}y=\dfrac{b}{2a}x+\dfrac{b}{2},\\ y=\dfrac{b}{a}x,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_P=a,\\ y_P=b,\end{cases}$ $\therefore P(a,b)$，同理 $Q\left(-\dfrac{a}{3},\dfrac{b}{3}\right)$，$\therefore PQ$ 的中点为 $\left(\dfrac{a}{3},\dfrac{2b}{3}\right)$，$PQ$ 的垂直平分线方程为 $y-\dfrac{2b}{3}=-\dfrac{2a}{b}\left(x-\dfrac{a}{3}\right)$，将 $\begin{cases}y=0,\\ x=a\end{cases}$ 代入整理得 $\dfrac{b^2}{a^2}=2$，则 $e=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{3}$.

12. **答案** B

命题意图 本题考查构造函数求参数范围.

解析 由 $f(x)>0$ 得 $xe^x+x>a\ln x+x^{a+1}$，所以 $xe^x+x+\ln x>a\ln x+\ln x+x^{a+1}$，构造函数 $g(x)=x+e^x$，则不等式转化为 $g(x+\ln x)>g(a\ln x+\ln x)$，又易知 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，故不等式等价于 $x+\ln x>a\ln x+\ln x$，即 $x-a\ln x>0$. 设 $h(x)=x-a\ln x$，若 $a<0$，则当 $x>0$ 且 $x\to 0$ 时，$h(x)\to-\infty$，不符合题意；若 $a=0$，则当

$x>0$ 时,$h(x)>0$,符合题意;若 $a>0$,则 $h'(x)=1-\dfrac{a}{x}$,$h(x)$在$(0,a)$上单调递减,在$(a,+\infty)$上单调递增,所以 $h(x)_{\min}=h(a)$,要使 $h(x)>0$ 恒成立,只需 $h(a)=a(1-\ln a)>0$,所以 $0<a<\mathrm{e}$. 综上可知 a 的取值范围是$[0,\mathrm{e})$.

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. **答案** $\dfrac{1}{6}$

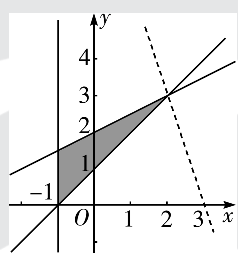
命题意图 本题考查正态分布.

解析 由题意可知 $P\left(X>\dfrac{3}{2}\right)+P\left(X\leqslant\dfrac{3}{2}\right)=3P\left(X>\dfrac{3}{2}\right)=1$,所以 $P\left(X>\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{3}$,所以 $P\left(1\leqslant X<\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$.

14. **答案** 9

命题意图 本题考查线性规划.

解析 根据不等式组作出可行域如图中阴影部分所示,当目标函数表示的直线经过点$(2,3)$时,$z=3x+y$ 取得最大值 9.



15. **答案** $\dfrac{2}{3}$

命题意图 本题考查导数的应用.

解析 设圆锥的底面半径为 R,圆锥的轴截面为等腰三角形,底边长为 $2R$,设其底角为 α,则圆锥的高为 $R\tan\alpha$,圆锥的体积为$\dfrac{\pi}{3}R^3\tan\alpha$. 设圆锥内接圆柱的底面半径为 r,高为 h,则$\dfrac{r}{R}=\dfrac{R\tan\alpha-h}{R\tan\alpha}$,即 $h=(R-r)\tan\alpha$,则圆柱的体积为 $\pi r^2h=\pi r^2(R-r)\tan\alpha=\pi(Rr^2-r^3)\tan\alpha$,$r\in(0,R)$. 圆柱与圆锥体积之比为$3\left(\dfrac{r^2}{R^2}-\dfrac{r^3}{R^3}\right)$,设 $t=\dfrac{r}{R}(0<t<1)$,$f(t)=t^2-t^3$,则$f'(t)=2t-3t^2=t(2-3t)$. 由 $f'(t)=0$,得 $t=\dfrac{2}{3}$,当 $0<t<\dfrac{2}{3}$时,$f'(t)>0$,当$\dfrac{2}{3}<t<1$ 时,$f'(t)<0$,所以当 $t=\dfrac{2}{3}$时,$f(t)$取得最大值,即圆柱与圆锥体积之比最大,此时$\dfrac{r}{R}=\dfrac{2}{3}$.

16. **答案** $\dfrac{15}{4}$

命题意图 本题考查三角函数.

解析 $f(x)=\cos 2\omega x-\sin 2\omega x+1=\sqrt{2}\cos\left(2\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)+1$. 先考虑$f(x)>0\left(\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{3}\right)$,令 $2\omega x+\dfrac{\pi}{4}=t$,当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$时,$t\in\left(\dfrac{\omega\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4},\dfrac{2\omega\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)$. 由 $f(x)>0$ 得 $\sqrt{2}\cos t+1>0$,即 $\cos t>-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore \begin{cases} -\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi \leqslant \dfrac{\omega\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}, \\ \dfrac{2\omega\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4} \leqslant \dfrac{3\pi}{4}+2k\pi \end{cases} (k\in\mathbf{Z})$，得 $-3+6k\leqslant\omega\leqslant\dfrac{3}{4}+3k(k\in\mathbf{Z})$，又$\because 0<\omega<4$，$\therefore$ 此时 ω 的最大值为$\dfrac{15}{4}$. 若 $\omega=\dfrac{15}{4}$，当 $x\in\left(\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right)$时，$t=\dfrac{15}{2}x+\dfrac{\pi}{4}\in\left(6\pi-\dfrac{3\pi}{4},6\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\sqrt{2}\cos t+1>0$，符合条件. 综上，$\omega$ 的最大值为$\dfrac{15}{4}$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查数列求通项和数列求和.

解析 （Ⅰ）$a_1=S_1=\dfrac{1-5}{2}=-2$，…………（1 分）

当 $n\geqslant2$ 时，有 $S_n=\dfrac{n^2-5n}{2}$，$S_{n-1}=\dfrac{(n-1)^2-5(n-1)}{2}$，…………（2 分）

两式相减得 $a_n=\dfrac{1}{2}[n^2-5n-(n-1)^2+5(n-1)]=n-3(n\geqslant2)$，…………（4 分）

当 $n=1$ 时，$a_1=-2$ 符合上式，…………（5 分）

故 $a_n=n-3$. …………（6 分）

（Ⅱ）设数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n，

则 $T_{30}=(b_1+b_2+\cdots+b_{10})+(b_{11}+b_{12}+\cdots+b_{20})+(b_{21}+b_{22}+\cdots+b_{30})$.

由题意得 $b_1+b_2+\cdots+b_{10}=a_1+a_2+\cdots+a_{10}=S_{10}$，…………（8 分）

$b_{11}+b_{12}+\cdots+b_{20}=2(b_1+b_2+\cdots+b_{10})=2S_{10}$，…………（9 分）

$b_{21}+b_{22}+\cdots+b_{30}=2(b_{11}+b_{12}+\cdots+b_{20})=2\times2S_{10}=4S_{10}$，…………（10 分）

$\therefore T_{30}=7S_{10}=\dfrac{7}{2}(10^2-50)=175$. …………（12 分）

18. **命题意图** 本题考查频率分布直方图和独立性检验.

解析 （Ⅰ）依题意有$(1.5+2.5+a+2.0+0.8+0.2)\times0.1=1$，得 $a=3.0$. …………（2 分）

$\bar{x}=0.35\times0.15+0.45\times0.25+0.55\times0.30+0.65\times0.20+0.75\times0.08+0.85\times0.02=0.537$. …………（5 分）

（Ⅱ）依题意作 2×2 列联表：

	降价	非降价	总计
不低于 0.6 万元	18	12	30
低于 0.6 万元	12	58	70
总计	30	70	100

…………（8 分）

$K^2=\dfrac{100\times(18\times58-12\times12)^2}{30\times70\times70\times30}\approx18.367$. …………（10 分）

因为 $18.367>5.024$，所以有 97.5% 的把握认为该商品的日销售收入不低于 0.6 万元与该日是否降价有关. …………（12 分）

19. **命题意图** 本题考查线线垂直的证明，以及利用空间向量求空间角.

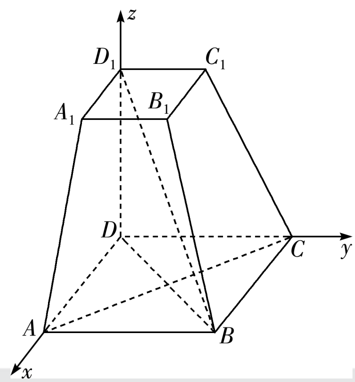
解析 （Ⅰ）$\because DD_1\perp$平面 $ABCD$，$AC\subset$平面 $ABCD$，$\therefore AC\perp DD_1$，…………（1 分）

如图，连接 BD，$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，$\therefore AC\perp BD$，…………（2 分）

又$\because DD_1\cap BD=D$，$\therefore AC\perp$平面 D_1DB，…………（4 分）

$\because BD_1 \subset$ 平面 D_1DB，$\therefore AC \perp BD_1$. ………………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）由题意知直线 DA，DC，DD_1 两两互相垂直，故以 D 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系.



由已知可得 $A(2,0,0)$，$B(2,2,0)$，$C(0,2,0)$，$B_1(1,1,2)$，………………………………………（6 分）

$\overrightarrow{B_1B}=(1,1,-2)$，$\overrightarrow{BC}=(-2,0,0)$，$\overrightarrow{BA}=(0,-2,0)$.

设平面 AB_1B 与平面 BB_1C 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$.

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{B_1B}=x_1+y_1-2z_1=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BA}=-2y_1=0,\end{cases}$ 令 $z_1=1$，则 $\boldsymbol{n}_1=(2,0,1)$，………………………………（8 分）

$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{B_1B}=x_2+y_2-2z_2=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BC}=-2x_2=0,\end{cases}$ 令 $z_2=1$，则 $\boldsymbol{n}_2=(0,2,1)$，………………………………（9 分）

$\therefore \cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{1}{5}$，………………………………………（11 分）

故二面角 $A-BB_1-C$ 的正弦值为 $\sqrt{1-\dfrac{1}{5^2}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$. ……………………………………（12 分）

20. **命题意图**　本题考查利用导数证明不等式.

解析　（Ⅰ）令 $f(x)=0$，得 $x=1$，或 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k=0,1,2,\cdots$，

$\therefore x_0=1$. ……………………………………………………………………（2 分）

$f'(x)=\dfrac{\cos x}{x}-\sin x\cdot\ln x$，$\therefore f'(1)=\cos 1$，……………………………………（3 分）

$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=(x-1)\cos 1$. ………………………（5 分）

（Ⅱ）$\because \ln x$ 在 $(0,1)$ 上为负，在 $(1,\pi]$ 上为正，$\cos x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上为正，在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 上为负，

又 $f(1)=0$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，

$\therefore$ 当 $0<x<1$ 时，$f(x)<0$，当 $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ 时，$f(x)<0$，

故只需证 $x\in\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(x)<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. ……………………………………………（6 分）

令 $h(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}}-\ln x$，则 $h'(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}-\dfrac{1}{x}$，易知 $h'(x)$ 单调递增，

且 $h'(\mathrm{e})=0$，故当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$h'(x)<0$，$\therefore h(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递减，

$\therefore$ 当 $x\in\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$h(x)>h(\mathrm{e})=0$，即$\dfrac{x}{\mathrm{e}}>\ln x$. ……………………………………………………………………（7 分）

$\therefore \ln x\cdot\cos x<\dfrac{x}{\mathrm{e}}\cos x$，要证$f(x)<\dfrac{1}{\mathrm{e}}\left(1<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，只需证 $x\cos x<1\left(1<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$. ………………………（8 分）

令 $g(x)=x\cos x$，则 $g'(x)=\cos x-x\sin x$，易知 $g'(x)$在$\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$上单调递减， ……………………………（9 分）

$\therefore g'(x)<g'(1)=\cos 1-\sin 1<0$，$\therefore g(x)$在$\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$上单调递减， ………………………………………（10 分）

$\therefore g(x)<g(1)=\cos 1<1$，故 $x\cos x<1$ 在$\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$上恒成立. …………………………………………………（11 分）

综上可得原命题成立. ……………………………………………………………………………………………………（12 分）

21. **命题意图** 本题考查椭圆方程和定直线的证明.

解析 （Ⅰ）设椭圆 C 的焦距为 $2c(c>0)$，

由题意得$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{3},\\ \dfrac{7}{a^2}+\dfrac{10}{9b^2}=1,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a^2=9,\\ b^2=5,\end{cases}$ ………………………………………………………………（4 分）

$\therefore C$ 的标准方程为$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$. ……………………………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）由题可知 $A(-3,0)$，$B(3,0)$，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $M'(-x_1,-y_1)$，设 $l_{MN}:x=my+n$.

联立$\begin{cases}x=my+n,\\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1,\end{cases}$消去 x 得$(5m^2+9)y^2+10mny+5(n^2-9)=0$，

$\therefore y_1+y_2=\dfrac{-10mn}{5m^2+9}$，$y_1y_2=\dfrac{5(n^2-9)}{5m^2+9}$， ……………………………………………………………（6 分）

$\begin{cases}k_{AM'}=\dfrac{y_1}{x_1-3},\\ k_{BN}=\dfrac{y_2}{x_2-3},\end{cases}$ $\therefore l_{AM'}:y=\dfrac{y_1}{x_1-3}(x+3)$，$l_{BN}:y=\dfrac{y_2}{x_2-3}(x-3)$， ………………………………（7 分）

又$\because$ 点 P 为直线 AM'和 BN 的交点，$\therefore\begin{cases}\dfrac{x_1-3}{y_1}\cdot y_P=x_P+3,\\ \dfrac{x_2-3}{y_2}\cdot y_P=x_P-3,\end{cases}$ ……………………………………（8 分）

$$\begin{aligned}\text{故可得 } 2x_P&=\left(\frac{x_1-3}{y_1}+\frac{x_2-3}{y_2}\right)y_P\\&=\left(\frac{my_1+n-3}{y_1}+\frac{my_2+n-3}{y_2}\right)y_P\\&=\left[2m+(n-3)\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}\right]y_P\\&=\left[2m+(n-3)\cdot\frac{-10mn}{5(n^2-9)}\right]y_P,\end{aligned}$$

$\therefore x_P=\dfrac{3m}{n+3}y_P$，故 $l_{OP}:x=\dfrac{3m}{n+3}y$. …………………………………………………………………（10 分）

联立$\begin{cases} l_{OP}: x=\dfrac{3m}{n+3}y, \\ l_{MN}: x=my+n, \end{cases}$ 消去 y 得 $x_Q=-3$，…………………………………………………………（11 分）

因此，点 Q 位于定直线 $x=-3$ 上. …………………………………………………………………………（12 分）

22. **命题意图** 本题考查极坐标与参数方程.

解析 （Ⅰ）$x^2=\dfrac{16t^2}{(4+t^2)^2}, y^2=\dfrac{4(4-t^2)^2}{(4+t^2)^2}$，

$\therefore x^2+\dfrac{y^2}{4}=\dfrac{16t^2+(4-t^2)^2}{(4+t^2)^2}=\dfrac{(4+t^2)^2}{(4+t^2)^2}=1$，

又 $y=\dfrac{8-2t^2}{4+t^2}=-2+\dfrac{16}{4+t^2}>-2$，

$\therefore$ 曲线 C 的普通方程为 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1(y\neq -2)$. …………………………………………………（4 分）

（Ⅱ）设 P 到 l 的距离为 d.

令$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta, \end{cases}$得直线 l 的直角坐标方程为 $x+y-4=0$，…………………………………………（6 分）

设 $P(\cos\alpha, 2\sin\alpha), \alpha\in[0,2\pi)$ 且 $\alpha\neq\dfrac{3\pi}{2}$，

则 $d=\dfrac{|\cos\alpha+2\sin\alpha-4|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|\sqrt{5}\sin(\alpha+\varphi)-4|}{\sqrt{2}}$，其中 $\tan\varphi=\dfrac{1}{2}$，……………………………（8 分）

$\therefore d$ 的取值范围是 $\left[\dfrac{4\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}, \dfrac{4\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}\right]$. ………………………………………………………（10 分）

23. **命题意图** 本题考查不等式的证明.

解析 （Ⅰ）由题意知 $f(x)=\begin{cases} -4x, x<-\dfrac{1}{4}, \\ 1, -\dfrac{1}{4}\leqslant x<\dfrac{1}{4}, \\ 4x, x\geqslant\dfrac{1}{4}. \end{cases}$ ……………………………………………………（2 分）

令 $f(x)=3$，得 $x=-\dfrac{3}{4}$ 或 $\dfrac{3}{4}$，…………………………………………………………………………（3 分）

结合图象可知 $f(x)<3$ 的解集为 $\left\{x\ \middle|\ -\dfrac{3}{4}<x<\dfrac{3}{4}\right\}$. ………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）由题意可知 $\dfrac{2a}{a+2}+\dfrac{b}{b+1}=1$，$\therefore 2-\dfrac{4}{a+2}+1-\dfrac{1}{b+1}=1$，

$\therefore \dfrac{4}{a+2}+\dfrac{1}{b+1}=2$. ………………………………………………………………………………………（7 分）

令 $m=a+2, n=b+1$，则 $\dfrac{4}{m}+\dfrac{1}{n}=2$，

$a+b=m+n-3=\dfrac{1}{2}(m+n)\left(\dfrac{4}{m}+\dfrac{1}{n}\right)-3=\dfrac{1}{2}\left(5+\dfrac{4n}{m}+\dfrac{m}{n}\right)-3\geqslant\dfrac{1}{2}(5+4)-3=\dfrac{3}{2}$，

当且仅当 $m=2n=3$，即 $a=1, b=\dfrac{1}{2}$ 时等号成立. ………………………………………………………（10 分）