云南师大附中2020届高考适应性月考卷（六）
理科数学参考答案

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	C	A	D	A	B	D	C	A	D	D	B

【解析】

1．因为$A=\{x|0<x<2\}$，$B=\{0,\ 1\}$，所以$A\cup B=\{x|0\leqslant x<2\}$，故选B.

2．$(1-\mathrm{i})(1-\mathrm{i}^3)=(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})=2$，故选C.

3．因为$\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2-|\vec{a}||\vec{b}|\cos30°$，所以$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，故选A.

4．如图1，作出不等式组$\begin{cases}x+y\geqslant1,\\2x-y\geqslant2,\\y\leqslant1\end{cases}$表示的平面区域，$\dfrac{y}{x}$的几何意义为可行域内的点与点$(0,\ 0)$连线的斜率，由图可知，当$x=\dfrac{3}{2}$，$y=1$时，$\dfrac{y}{x}$有最大值$\dfrac{2}{3}$，故选D.

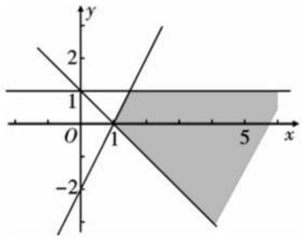

图1

5．双曲线C：$x^2-y^2=1$的渐近线方程为$y=\ \ x$，当$k\in(0,\ 1)$时，$y=kx$与曲线C有两个不同的交点；当$k\in[1,\ 3)$时，$y=kx$与曲线C没有交点，所以“直线$y=kx$与双曲线C：$x^2-y^2=1$有两个不同的交点”发生的概率为$\dfrac{1}{3}$，故选A.

6．由题意知，当$x=1$时，$(2x-1)(x+a)^3=27$，所以$a=2$，$(2x-1)(x+2)^3$展开式中x^2项为$2x\mathrm{C}_3^2 2^2x-\mathrm{C}_3^1 2x^2=18x^2$，$x^2$项的系数为18，故选B.

7．在$\triangle ABC$中，$a=\sqrt{2}b$，$\sin A=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，由正弦定理得$\sin A=\sqrt{2}\sin B$，所以$\sin B=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$．由题意知，$c>a>b$，所以$\cos A=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos B=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，在$\triangle ABC$中，$A+B+C=\pi$，所以$\cos C=-\cos(A+B)=-\cos A\cos B+\sin A\sin B=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以$C=\dfrac{3\pi}{4}$，故选D.

8．由面面平行可知，直线 AB 与平面 EFG 平行，选项 A，B 正确；选项 C 中，直线 AB 与平面 EFG 相交；选项 D 中，$AB // FG$，$AB \not\subset$ 平面EFG，$FG \subset$ 平面EFG，所以直线 AB 与平面 EFG 平行，故选 C．

9．O 为坐标原点，由题意知 $AB \perp OF$，点 $A\left(\dfrac{p}{2}, p\right)$，又因为 A 在椭圆上，所以 $|AF| = \dfrac{b^2}{a}$，设 $c^2 = a^2 - b^2$，则 $|OF| = c$，$\dfrac{|AF|}{|OF|} = \dfrac{p}{\frac{p}{2}} = 2$，得 $\dfrac{b^2}{a} = 2c$，所以椭圆 C 的离心率为 $\sqrt{2} - 1$，故选 A．

10．$a_1 = \log_2 3$，$a_2 = \log_3 4 = 2\log_3 2 = \dfrac{2}{\log_2 3}$，因为 $\log_2 3 > \log_2 2\sqrt{2} = \dfrac{3}{2} > \sqrt{2}$，所以 $a_1 > a_2$；$a_7 = \log_8 9 = \dfrac{2}{3}\log_2 3 < a_1$；$T_6 = \log_2 3 \times \log_3 4 \times \cdots \times \log_7 8 = \log_2 8 = 3$；$T_7 = T_6 \times \log_8 9$，因为 $T_6 > 0$，$\log_8 9 > 1$，所以 $T_7 > T_6$，故选 D．

11．在 Rt$\triangle ADC$ 中，$DC = 2r\sin\alpha$，故①不正确；因为 $BD = DC$，所以 $\angle BAC = 2\alpha$，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AB = 2r\cos 2\alpha$，故②正确；因为 $AE = AB$，$BD = DC$，易知 $\triangle ADB$ 与 $\triangle ADE$ 全等，故 $DE = BD = DC$，$DF \perp EC$，所以 $FC = r - \dfrac{AB}{2} = r(1 - \cos 2\alpha)$，又 $\dfrac{DC}{AC} = \dfrac{FC}{DC}$，所以 $DC^2 = AC \cdot FC = r(2r - AB)$，故③④正确．由 $DC = 2r\sin\alpha$，$AB = 2r\cos 2\alpha$，$DC^2 = r(2r - AB)$，可得 $(2r\sin\alpha)^2 = r(2r - 2r\cos 2\alpha)$，即 $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$，故选 D．

12．因为 $f(x) = \mathrm{e}^{|x|}\sin(\omega x + \varphi)$ 为偶函数，$y = \mathrm{e}^{|x|}$ 为偶函数，所以 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 为偶函数，又 $0 < \varphi < \pi$，所以 $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$，由图象及 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = 0$ 可知 $\omega = 2$，所以 $f(x) = \mathrm{e}^{|x|}\cos 2x$，因为 $y = f(x)$ 和 $y = \cos 2x$ 为偶函数，所以只需考虑 $x \geqslant 0$ 的情况．当 $x \geqslant 0$ 时，$f(x) = \mathrm{e}^x\cos 2x$，$f'(x) = \mathrm{e}^x(\cos 2x - 2\sin 2x) = \sqrt{5}\mathrm{e}^x\cos(2x + \varphi)$，其中 $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\varphi = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，当 $2x + \varphi = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 时，$f(x)$ 有极大值，此时 $\cos 2x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，故选 B．

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	-1	4	$y=-x+4$	2π

【解析】

13．$\forall x\in(0,\ +\infty)$，$x^2-2x-m\geqslant 0$，只需$(x^2-2x)_{\min}\geqslant m$，当$x=1$时，$x^2-2x$有最小值$-1$，所以$m\leqslant -1$，$m$的最大值为$-1$．

14．圆C：$(x-2)^2+y^2=4$的圆心为$(2,\ 0)$，半径为2，直线l：$ax+y-2a=0$过定点$(2,\ 0)$，所以弦AB为圆C的直径，所以弦AB的长为4．

15．由$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x},\ x\in(0,\ 2],\\ f(x-2),\ x\in(2,\ +\infty)\end{cases}$可知，当$x\in(2,\ 4]$时，$f(x)=\dfrac{1}{x-2}$，$f'(x)=-\dfrac{1}{(x-2)^2}$，所以$f(3)=1$，$f'(3)=-1$，$f(x)$在$x=3$处的切线方程为$y-1=-(x-3)$，即$y=-x+4$．

16．由题意作图 2，取线段OD的中点G，连接EG，CG，可知$EG\perp AD$，$CG\perp AD$，所以$\angle EGC$即为二面角$E-AD-C$的平面角，即$\cos\angle EGC=\dfrac{1}{3}$，又$EG=CG=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，由余弦定理可

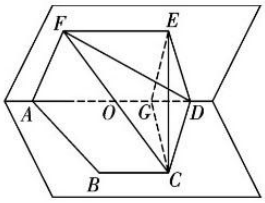

图 2

得$EC=1$．又因为$EG\cap CG=G$，所以$AD\perp$平面EGC，所以$AD\perp EC$．由$AD/\!/EF$，得$EF\perp EC$．因此在三棱锥$O-CEF$中，$OC=OF=OE=EC=EF=1$，$FC=\sqrt{2}$，三棱锥$O-CEF$外接球球心为线段FC的中点，半径为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以外接球表面积为2π．

三、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 12 分）

（1）解：当$n\geqslant 2$时，$S_{n-1}=2^n-n-1$，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n-1$，

当$n=1$时，$a_1=S_1=2^2-1-2=1$满足$a_n=2^n-1$．

综上，当$n\in\mathbf{N}^*$时，$a_n=2^n-1$． ……………………………………（6 分）

（2）证明：当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$2^n-1\geqslant 2^{n-1}$，

所以 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{2^{n+1}-1}{2^n-1}=2+\dfrac{1}{2^n-1}\leqslant 2+\dfrac{1}{2^{n-1}}$，

所以 $\dfrac{a_2}{a_1}+\dfrac{a_3}{a_2}+\dfrac{a_4}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant 2n+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}=2n+\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$

$=2n+2\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]<2n+2$，

综上可得，当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$\dfrac{a_2}{a_1}+\dfrac{a_3}{a_2}+\dfrac{a_4}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<2n+2$．

……………………………………………………………………（12 分）

18．（本小题满分 12 分）

解：（1）A，B 一个包裹，C 一个包裹时，需花费 $15+15=30$（元），

A，C 一个包裹，B 一个包裹时，需花费 $20+15=35$（元），

B，C 一个包裹，A 一个包裹时，需花费 $25+10=35$（元），

综上，A，B 一个包裹，C 一个包裹时花费的运费最少，为 30 元.

……………………………………………………………………（6 分）

（2）由题意知，每日揽包裹数超过 200 件的概率为 $\dfrac{1}{3}$，

X 可取 0，1，2，3，4，$X\sim B\left(4,\dfrac{1}{3}\right)$，$P(X=k)=\mathrm{C}_4^k\left(\dfrac{1}{3}\right)^k\left(\dfrac{2}{3}\right)^{4-k}$ $(k=0,1,2,3,4)$，

则 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\dfrac{16}{81}$	$\dfrac{32}{81}$	$\dfrac{8}{27}$	$\dfrac{8}{81}$	$\dfrac{1}{81}$

$E(X)=4\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}$，

所以这 4 天中日揽收包裹数超过 200 件的天数期望为 $\dfrac{4}{3}$．

……………………………………………………………………（12 分）

19.（本小题满分 12 分）

（1）证明：设圆 O_1，O_2 的半径分别为 r，$2r$，

因为圆台的侧面积为 6π，

所以 $6\pi=\frac{1}{2}\times 2(2\pi r+4\pi r)$，可得 $r=1$，

因此，在等腰梯形 $A_1A_2B_2B_1$ 中，$A_1A_2=2B_1B_2=4$，$A_1B_1=2$，$O_1O_2=\sqrt{3}$．

如图 3，连接线段 O_1O_2，O_1C，O_2C，

在圆台 O_1O_2 中，$O_1O_2\perp$ 平面 B_1CB_2，$O_1C\subset$ 平面 B_1CB_2，

所以 $O_1O_2\perp O_1C$．

又 $O_1C=1$，所以在 $\triangle O_1CO_2$ 中，$CO_2=2$．

在 $\triangle CA_1A_2$ 中，$CO_2=\frac{1}{2}A_1A_2$，故 $\angle A_1CA_2=90^\circ$，即 $A_1C\perp A_2C$．

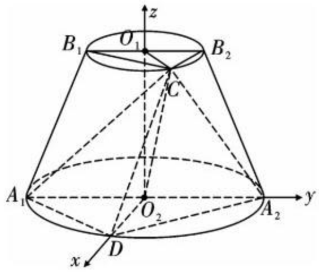

图 3

……………………………………………………………………（6 分）

（2）解：由题意可知，三棱锥 $C-A_1DA_2$ 的体积为 $V_{C-A_1DA_2}=\frac{1}{3}|O_1O_2|S_{\triangle A_1DA_2}=\frac{\sqrt{3}}{6}|A_1D||A_2D|$，

又在直角三角形 A_1DA_2 中，$A_1D^2+A_2D^2=A_1A_2^{\ 2}=16\geqslant 2|A_1D||A_2D|$，

所以当且仅当 $|A_1D|=|A_2D|=2\sqrt{2}$，

即点 D 为弧 A_1A_2 的中点时，$V_{C-A_1DA_2}$ 有最大值 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$．

连接 DO_2，因为 $O_1O_2\perp$ 平面 A_1DA_2，$DO_2\perp O_2A_2$，

所以以 O_2 为坐标原点，分别以 O_2D，O_2A_2，O_2O_1 的方向为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 O_2-xyz．

点 $A_1(0,\ -2,\ 0)$，$A_2(0,\ 2,\ 0)$，$D(2,\ 0,\ 0)$，

由 $\angle B_1B_2C=60^\circ$ 可知 $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ \sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{A_1D}=(2,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{A_1A_2}=(0,\ 4,\ 0)$，

$\overrightarrow{A_2C}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{3}{2},\ \sqrt{3}\right)$，

设平面 CA_1A_2 的法向量 $\vec{n}=(x,\ y,\ z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\vec{n}=0,\\ \overrightarrow{A_2C}\cdot\vec{n}=0,\end{cases}$ $\begin{cases}4y=0,\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{3}{2}y+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$ 取$\vec{n}=(2,\ 0,\ -1)$，

则$\cos\langle\vec{n},\ \overrightarrow{A_1D}\rangle=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1D}}{|\vec{n}||\overrightarrow{A_1D}|}=\dfrac{4}{2\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，

所以A_1D与平面CA_1A_2所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$．

……………………………………………………………………（12 分）

20．（本小题满分 12 分）

解：（1）抛物线C：$x^2=4y$，点$F(0,\ 1)$，

由题意知直线l的斜率存在，设直线l：$y=kx+1$，

代入抛物线方程$x^2=4y$，可得$x^2-4kx-4=0$，

设点$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，

因为$\Delta>0$，所以$x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4$,

因为$|AF|=\lambda|BF|$，所以$x_1=-\lambda x_2$，

又$x_2(1-\lambda)=4k$，$-\lambda x_2^2=-4$，可得$k^2=\dfrac{(1-\lambda)^2}{4\lambda}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\lambda}+\lambda-2\right)$,

当$\lambda\geqslant 2$时，$k^2\geqslant\dfrac{1}{8}$，

所以$k\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{4}$或$k\leqslant-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$．　…………………………………………………（6 分）

（2）对$y=\dfrac{1}{4}x^2$，$y'=\dfrac{1}{2}x$，则直线AP：$y-y_1=\dfrac{1}{2}x_1(x-x_1)$，

又$y_1=\dfrac{1}{4}x_1^2$，所以直线AP：$y=\dfrac{1}{2}x_1x-\dfrac{1}{4}x_1^2$，

同理可得直线BP：$y=\dfrac{1}{2}x_2x-\dfrac{1}{4}x_2^2$，

所以点$P\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{x_1x_2}{4}\right)$，即$P(2k,\ -1)$．

点P到直线l的距离$d=\dfrac{|2k^2+2|}{\sqrt{k^2+1}}=2\sqrt{k^2+1}$，$|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=4k^2+4$，

所以$\triangle ABP$面积$S=\frac{1}{2}|AB|d=4(1+k^2)\sqrt{1+k^2}\geqslant\frac{27}{8}\sqrt{2}$.

综上，$\triangle ABP$面积的取值范围为$\left[\frac{27}{8}\sqrt{2},\ +\infty\right)$.

……………………………………………………………（12分）

21.（本小题满分12分）

解：（1）$f(x)=\ln x+2x-ax^2$的定义域为$(0,\ +\infty)$，

$f'(x)=\frac{1}{x}+2-2ax=\frac{-2ax^2+2x+1}{x}$，

当$a=0$时，$f'(x)=\frac{2x+1}{x}>0$，所以$f(x)$在$(0,\ +\infty)$上单调递增；

当$a<0$时，$-2ax^2>0$，$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$(0,\ +\infty)$上单调递增；

当$a>0$时，令$-2ax^2+2x+1=0$，得$x_1=\frac{1+\sqrt{1+2a}}{2a}$，$x_2=\frac{1-\sqrt{1+2a}}{2a}$（舍）.

当$x\in\left(0,\ \frac{1+\sqrt{1+2a}}{2a}\right)$时，$f'(x)>0$，当$x\in\left(\frac{1+\sqrt{1+2a}}{2a},\ +\infty\right)$时，$f'(x)<0$，

所以$f(x)$在$\left(0,\ \frac{1+\sqrt{1+2a}}{2a}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1+\sqrt{1+2a}}{2a},\ +\infty\right)$上单调递减.

综上所述，当$a\leqslant 0$时，$f(x)$在$(0,\ +\infty)$上单调递增；

当$a>0$时，$f(x)$在$\left(0,\ \frac{1+\sqrt{1+2a}}{2a}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1+\sqrt{1+2a}}{2a},\ +\infty\right)$上单调递减.

……………………………………………………………（6分）

（2）当$a=1$时，$g(x)=\ln x+2x-x^2-3\cos x$，

当$x\in(0,\ 1]$时，$f(x)=\ln x+2x-x^2$单调递增，$f(x)\leqslant f(1)=1$，$3\cos x\geqslant 3\cos 1>3\cos\frac{\pi}{3}$

$=\frac{3}{2}$，则$g(x)<0$，故不存在零点；

当$x\in\left(1,\ \frac{\pi}{2}\right]$时，$g'(x)=\frac{1}{x}+2-2x+3\sin x$，$f'(x)=\frac{1}{x}+2-2x$在$\left(1,\ \frac{\pi}{2}\right]$上单调递减，

所以$f'(x)\geqslant f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}+2-\pi$，$3\sin x>3\sin 1>3\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}$，

所以 $g'(x) > \frac{2}{\pi} + 2 - \pi + \frac{3}{2} > 0$， $g(x)$ 单调递增，

又 $g(1) = 1 - 3\cos 1 < 0$， $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln\frac{\pi}{2} + \pi - \frac{\pi^2}{4} > 0$，

所以存在唯一 $x_1 \in \left(1, \frac{\pi}{2}\right]$， 使得 $g(x_1) = 0$.

当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 时， $g'(x) = \frac{1}{x} + 2 - 2x + 3\sin x$， $g''(x) = -\frac{1}{x^2} - 2 + 3\cos x < 0$，

所以 $g'(x)$ 单调递减，

又 $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} + 2 - \pi + 3 > 0$， $g'(\pi) = \frac{1}{\pi} + 2 - 2\pi < 0$，

所以存在 $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$， 使得 $g'(x_0) = 0$，

当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, x_0\right]$ 时， $g'(x) > 0$， $g(x)$ 单调递增；

当 $x \in (x_0, \pi]$ 时， $g'(x) < 0$， $g(x)$ 单调递减，

又 $g\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$， $g(\pi) = \ln\pi + 2\pi - \pi^2 + 3 > 0$，

因此， $g(x) > 0$ 在 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上恒成立，故不存在零点.

当 $x \in (\pi, 4]$ 时， $g''(x) = -\frac{1}{x^2} - 2 + 3\cos x < 0$，所以 $g'(x)$ 单调递减，

因为 $g'(\pi) < 0$，所以 $g'(x) < 0$， $g(x)$ 单调递减，

又 $g(\pi) > 0$， $g(4) = \ln 4 + 8 - 16 - 3\cos 4 < 0$，

所以存在唯一 $x_2 \in (\pi, 4]$，使得 $g(x_2) = 0$.

当 $x \in (4, +\infty)$ 时， $g(x) < x - 1 + 2x - x^2 + 3 = -x^2 + 3x + 2 < 0$， 故不存在零点.

综上， $g(x)$ 存在两个零点 x_1， x_2， 且 $x_1 \in \left(1, \frac{\pi}{2}\right]$， $x_2 \in (\pi, 4]$，

因此 $n - m$ 的最小值为 3 . ……………………………………………………（12 分）

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

识别二维码，快速关注

福利：

1、关注后回复“答题模板”，即可获得高中 9 科答题模板资料

2、回复“清北华五”，即可获得清北华东五校特殊选拔考试模式及真题