吉林省“BEST 合作体”2022-2023 学年度下学期期末考试
高二数学试题答案

一、选择题（每题 5 分，计 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	B	B	A	D	A	C

题号	9	10	11	12
答案	ABD	BCD	BD	BC

二、填空题（每题 5 分，计 20 分）

13. 5　　14. -51　　15. 4　　16. $\frac{6}{7}$

三、解答题(17 题 10 分，18-22 题，每题 12 分，总计 70 分）

17.（本小题满分 10 分）

解：（1）方法一：由题意可得：$P(A)=\frac{4}{7}$**，………1 分**

“第一次抽到女生且第二次抽到男生”就是事件 AB**：“第一次抽到男生且第二次抽到男生”就是事件** $\overline{A}B$**，从 7 个同学中每次不放回地随机抽取 2 人，试验的样本空间Ω包含** $n(\Omega)=A_7^2=7\times6=42$ **个等可能的样本点，**

因为 $n(AB)=A_4^1\times A_3^1=4\times3=12$**，** $n(\overline{A}B)=A_3^1\times A_2^1=6$**，**

所以 $P(B)=\frac{n(AB)+n(\overline{A}B)}{n(\Omega)}=\frac{12+6}{42}=\frac{3}{7}$, $P(AB)=\frac{n(AB)}{n(\Omega)}=\frac{12}{42}=\frac{2}{7}$**，………3 分**

故 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{7}}{\frac{4}{7}}=\frac{1}{2}$**. ………5 分**

方法二： $P(B)=\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}+\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{3}{7}$**，………1 分**

“在第一次抽到女生的条件下，第二次抽到男生”的概率就是事件 A **发生的条件下，事件** B **发生的概率，则** $P(A)=\frac{4}{7}$**，**

$P(AB)=\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{2}{7}$**，………3 分**

故 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{7}}{\frac{4}{7}}=\frac{1}{2}$**. ………5 分**

（2）被抽取的 3 人中女生人数 X 的取值为 0，1，2，3，………6 分

$P(X=0)=\frac{C_3^3}{C_7^3}=\frac{1}{35}$，$P(X=1)=\frac{C_4^1C_3^2}{C_7^3}=\frac{12}{35}$，$P(X=2)=\frac{C_4^2C_3^1}{C_7^3}=\frac{18}{35}$，$P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_7^3}=\frac{4}{35}$，………8 分

X 的分布列：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

………9 分

X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{35}+1\times\frac{12}{35}+2\times\frac{18}{35}+3\times\frac{4}{35}=\frac{12}{7}$.………10 分

18.（本题满分 12 分）

解：（1）$\overline{t}=\frac{1+2+3+4}{4}=2.5$，$\overline{y}=\frac{1}{4}(5.2+5.3+5.7+5.8)=5.5$，………1 分

$\sum_{i=1}^{4}(t_i-\overline{t})(y_i-\overline{y})=(-1.5)\times(-0.3)+(-0.5)\times(-0.2)+0.5\times0.2+1.5\times0.3=1.1$，………2 分

$\sum_{i=1}^{4}(t_i-\overline{t})^2=(-1.5)^2+(-0.5)^2+0.5^2+1.5^2=5$，$\sum_{i=1}^{4}(y_i-\overline{y})^2=(-0.3)^2+(-0.2)^2+0.2^2+0.3^2=0.26$，………3 分

$\therefore r=\frac{\sum_{i=1}^{4}(t_i-\overline{t})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(t_i-\overline{t})^2\sum_{i=1}^{4}(y_i-\overline{y})^2}}=\frac{1.1}{\sqrt{1.3}}\approx\frac{1.1}{1.14}\approx0.96>0.75$，………5 分

$\therefore$ 订单数量 y 与月份 t 的线性相关性较强；………6 分

（2）$\because \hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{4}(t_i-\overline{t})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{4}(t_i-\overline{t})^2}=\frac{1.1}{5}=0.22$，………8 分

$\therefore \hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{t}=5.5-0.22\times2.5=4.95$，………9 分

$\therefore$ 经验回归方程为 $\hat{y}=0.22t+4.95$，………10 分

令 $t=5$，$\hat{y}=0.22\times5+4.95=6.05$（万件），………11 分

即该企业 5 月份接到的订单数量预计为 6.05 万件.………12 分

19.（本题满分 12 分）

解：（1）解：选择条件① $a_2=a_1+2$，且 $2a_n=a_1+S_n$，由题意可得 $2a_{n+1}=a_1+S_{n+1}$，

$\therefore 2a_{n+1}-2a_n=S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$，即 $a_{n+1}=2a_n$，………2 分

$\therefore \{a_n\}$ 为公比 $q=2$ 的等比数列，………3 分

$\because a_2=a_1+2$，$\therefore 2a_1=a_1+2$，解得 $a_1=2$，………5 分

$\therefore a_n=2^n\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$；………6 分

选择条件② $\{a_n\}$ 为等比数列，且满足 $S_n=2^{n+1}+k$，………2 分

由题意可得 $a_2=S_2-S_1=(8+k)-(4+k)=4,\ a_3=S_3-S_2=(16+k)-(8+k)=8$，………4 分

$\therefore q=\dfrac{a_3}{a_2}=2$，………5 分　　$\therefore a_n=a_2q^{n-2}=2^n\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$；………6 分

（2）由（1）得 $a_n=2^n\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$，$\therefore b_n=\dfrac{1}{\log_2 a_{2n+1}\cdot\log_2 a_{2n+3}}=\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3}\right)$，………8 分

$\therefore T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3}\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2n+3}\right)$，………10 分

$\because n\in\mathrm{N}^*$，$\dfrac{1}{2n+3}>0,\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2n+3}<\dfrac{1}{3}$，$\therefore T_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2n+3}\right)<\dfrac{1}{6}$………11 分

$\therefore$ 不等式 $T_n<\lambda$ 恒成立时，$\lambda\geq\dfrac{1}{6}$，即 λ 的最小值为 $\dfrac{1}{6}$．………12 分

20.（本题满分 12 分）

解:（1）由 $f(x)=\mathrm{e}^x-1-a\sin x\Rightarrow f'(x)=\mathrm{e}^x-a\cos x$，所以 $f'(0)=1-a$，………1 分

又曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=-x$，即 $f'(0)=1-a=-1$，所以 $a=2$；………3 分

（2）当 $a=2$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^x-1-2\sin x,\therefore f'(x)=\mathrm{e}^x-2\cos x$,

由 $y=\mathrm{e}^x$、$y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上分别单调递增、单调递减可得：$f'(x)=\mathrm{e}^x-2\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，………5 分

而 $f'(0)=-1<0, f'(\pi)=\mathrm{e}^{\pi}+2>0$，………6 分

即 $\exists x_0\in(0,\pi)$，使得 $f'(x_0)=0$，故 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，(x_0,π) 上单调递增，

且 $f(0)=0<f(\pi)=\mathrm{e}^{\pi}-1$，即 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的最大值为 $\mathrm{e}^{\pi}-1$；………7 分

（3）$\because x\in[0,\pi]$，$f'(x)=\mathrm{e}^x-a\cos x$，令 $g(x)=f'(x)\Rightarrow g'(x)=\mathrm{e}^x+a\sin x$，………8 分

①当 $a<0$ 时，$a\sin x\leq 0,\mathrm{e}^x-1\geq 0$，易知 $f(x)=\mathrm{e}^x-1-a\sin x\geq 0$ 在 $x\in[0,\pi]$ 上恒成立，当 $x=0$ 时取得等号，符合题意；………9 分

②当 $0\leq a\leq 1$ 时，易知 $a\sin x\geq 0$，则 $g'(x)=\mathrm{e}^x+a\sin x>0$ 在 $x\in[0,\pi]$ 上恒成立，即 $f'(x)$ 在 $x\in[0,\pi]$ 时单调递增，

又 $f'(0)=1-a\geq 0$，故 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，

$\because f(0)=0$，$\therefore$ 恒有 $f(x)\geq 0$，符合题意；………10 分

③当 $a>1$ 时，由②知 $f'(x)$ 在 $x\in[0,\pi]$ 时单调递增，而 $f'(0)=1-a<0<f'(\pi)=\mathrm{e}^{\pi}+a$，

即$\exists x_0 \in (0,\pi)$，使得$f'(x_0)=0$，故$f(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，(x_0,π)上单调递增，

又$f(0)=0$，则$f(x_0)<f(0)=0$，不满足题意；………11 分

综上当$a\in(-\infty,1]$，能满足任意的$x\in[0,\pi]$，恒有$f(x)\geq 0$.………12 分

21.（本题满分 12 分）

解:（1）由题可知，小周第 1 个月摇上号的概率为$\frac{300}{3000}=\frac{1}{10}$，………1 分

所以小周连续三个月摇上号的概率为$(\frac{1}{10})^3$，………2 分

小周连续三个月摇上号的前提下，三个月集齐三款模型共有A_3^3种情况，三个月获得模型共有3^3种情况，

所以在小周连续三个月摇上号的前提下，三个月集齐三款模型的概率为$\frac{A_3^3}{3^3}$,………4 分

设事件 A 为“小周在这三个月集齐三款模型”，则$P(A)=\left(\frac{1}{10}\right)^3\frac{A_3^3}{3^3}=\frac{1}{4500}$． ………6 分

（2）由题意得$P(X=k)=\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}\frac{1}{10}(k=1,2,\cdots,11)$，$P(X=12)=\left(\frac{9}{10}\right)^{11}$，………7 分

则$E(X)=\sum_{k=1}^{11}\frac{k}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}+12\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{11}$，………8 分

两边同乘$\frac{9}{10}$得$\frac{9}{10}E(X)=\sum_{k=1}^{11}\frac{k}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{k}+\frac{54}{5}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{11}$，………9 分

两式相减得$\frac{1}{10}E(X)=\frac{1}{10}\times(\frac{9}{10})^0+\frac{1}{10}\times(\frac{9}{10})^1+\frac{1}{10}\times(\frac{9}{10})^2+\cdots+\frac{1}{10}\times(\frac{9}{10})^{11}-\frac{11}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{12}+\frac{12}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{11}$

$=\frac{1}{10}\times[(\frac{9}{10})^0+(\frac{9}{10})^1+(\frac{9}{10})^2+\cdots+(\frac{9}{10})^{11}]=\frac{1}{10}\times\frac{1-(\frac{9}{10})^{12}}{1-\frac{9}{10}}=1-(\frac{9}{10})^{12}$，………10 分

所以$E(X)=10-10\times(\frac{9}{10})^{12}=10-10\times\frac{9}{10}\times(\frac{9}{10})^{11}=10-9\cdot(\frac{9}{10})^{11}$. ………12 分

22.（本题满分 12 分）

解:（1）$f(x)$，$g(x)$定义域均为$(0,+\infty)$，　$f'(x)=-\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{-a+x}{x^2}$，，　………1 分

当$a\leq 0$时，则$f'(x)>0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，无极值，与题不符；

当$a>0$时，令$f'(x)=0$，解得：$x=a$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 单调递减，在 $(a,+\infty)$ 单调递增，

$\therefore$ 在 $x=a$ 取极小值，且 $f(a)=1+\ln a$； ………3 分

又 $g'(x)=a-\dfrac{1}{x}$，

当 $a\le 0$ 时：$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，无极值，与题不符；

当 $a>0$ 时：令 $g'(x)=0$，解得：$x=\dfrac{1}{a}$，

所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 单调递减，在 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 单调递增，

$\therefore$ 在 $x=\dfrac{1}{a}$ 取极小值，且 $g\left(\dfrac{1}{a}\right)=-1+\ln a$； ………4 分

由题：，解得：$a=1$.………5 分

（2）令 $m=\dfrac{1}{x_1},n=\dfrac{1}{x_2}$，因为 $x_1\ne x_2$，所以 $m\ne n$，

由 $f(x_1)=f(x_2)=2(x_1\ne x_2)$ 可得：$\begin{cases}\dfrac{a}{x_1}+\ln x_1=2\\ \dfrac{a}{x_2}+\ln x_2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}am-\ln m=2\cdots(1)\\ an-\ln n=2\cdots(2)\end{cases}$，………6 分

（1）-（2）得：$a(m-n)=\ln m-\ln n$，所以 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{m-n}{\ln m-\ln n}$，

要证：$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}>\dfrac{2}{a}$，只要证：$m+n>\dfrac{2}{a}$，只要证：$m+n>2\dfrac{m-n}{\ln m-\ln n}$，………7 分

不妨设 $0<n<m$，所以只要证：$\ln\dfrac{m}{n}>\dfrac{2(m-n)}{m+n}$，即证：$\ln\dfrac{m}{n}>\dfrac{2\left(\dfrac{m}{n}-1\right)}{\dfrac{m}{n}+1}$，………8 分

令 $t=\dfrac{m}{n}(t>1)$，只要证：$\ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$，

令 $h(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$，$h'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{2(t+1)-2(t-1)}{(t+1)^2}=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}$，

所以 $h(t)$ 在 $t\in(1,+\infty)$ 上单调递增，………11 分

$\therefore$ 即有 $\ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$ 成立，所以 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}>\dfrac{2}{a}$ 成立.………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。