陕西师大附中 2022-2023 学年度高三年级第十次模考

数学（理科） 参考答案

一、选择题： $CBCCDB\quad DABBAD$

二、填空题

13. 2 14. 6 15. $3+\sqrt{2}$ 16. $\dfrac{(e+1)(e^n-1)}{2e^n(e-1)}$

三. 解答题

17. 解：(1) $\because \sin C\cos B-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin B\sin C=\sin[\pi-(C+B)]=\sin C\cos B+\cos C\sin B$.

$\therefore -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin B\sin C=\cos C\sin B$.

由于 $\sin B>0$，所以 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin C=\cos C$，即 $\tan C=-\sqrt{3}$.

$\because C\in(0,\pi)$.

$\therefore \mathrm{C}=\dfrac{2\pi}{3}$.

（2）因为CD为角C的角平分线，且$CD=2, S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ACD}+S_{\Delta BCD}$,

根据三角形面积公式可得

$\dfrac{1}{2}ab\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{1}{2}b\cdot CD\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{2}a\cdot CD\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}$,

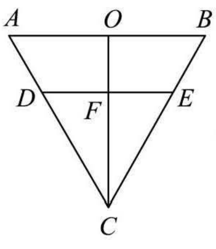
等式两边同除以$\dfrac{1}{2}ab\cdot CD$可得$\dfrac{\sin\frac{2\pi}{3}}{CD}=\dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{a}+\dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{b}$,即$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2}$,

则$a+2b=2(a+2b)(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b})=2(3+\dfrac{2b}{a}+\dfrac{a}{b})\ge 6+4\sqrt{2}$,

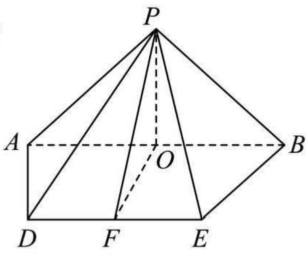
当且仅当$b=2+\sqrt{2}, a=2+2\sqrt{2}$时等式成立，

故$a+2b$的最小值为$6+4\sqrt{2}$.

18. 解：（1）因为$\triangle ABC$为等边三角形，$AD=BE=\dfrac{1}{3}AC$，$DE\parallel AB$，



图一



图二

CO为AB边上的高线，故$DE\perp OF, DE\perp PF$，

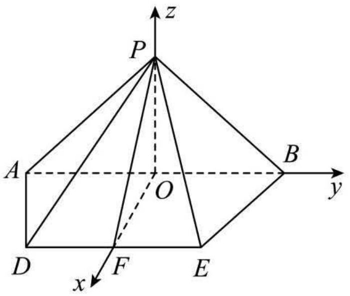
又$OF\cap PF=F$，$OF,PF\subset$平面FOP，所以$DE\perp$平面FOP.

因为 $OP\subset$ 平面 FOP，所以 $DE\perp OP$.

在 $\triangle FOP$ 中，$OF=\sqrt{3},OP=3,PF=2\sqrt{3}$，所以 $OF^2+OP^2=PF^2$，故 $OP\perp OF$，

而 $DE\subset$ 平面 $ABED$，$OF\subset$ 平面 $ABED,OF\cap DE=F$，故 $OP\perp$ 平面 $ABED$.

（2）分别以 $\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OP}$ 方向为 x,y,z 轴正方向建立空间直角坐标系，



则 $P(0,0,3),B(0,3,0),E(\sqrt{3},2,0),F(\sqrt{3},0,0)$，

则 $\overrightarrow{PE}=(\sqrt{3},2,-3),\overrightarrow{BE}=(\sqrt{3},-1,0),\overrightarrow{EF}=(0,-2,0)$.

设平面 BPE 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，平面 PEF 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PE}=\sqrt{3}x_1+2y_1-3z_1=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BE}=\sqrt{3}x_1-y_1=0\end{cases}$，且

$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{PE}=\sqrt{3}x_2+2y_2-3z_2=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{EF}=-2y_2=0\end{cases}$，

取 $x_1=1$，$x_2=\sqrt{3}$，

得到平面 BPE 的一个法向量 $\overrightarrow{n_1}=(1,\sqrt{3},\sqrt{3})$，平面 PEF 的一个法向量 $\overrightarrow{n_2}=(\sqrt{3},0,1)$，

设二面角 $B-PE-F$ 大小为 θ，则 $|\cos\theta|=\dfrac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}\times 2}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$，

所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

19.解：（1）将 $(-1,\dfrac{3}{2})$ 代入椭圆方程，得到 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{4\times 3}=1$，故 $a^2=4$，

故椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$…………2 分

当直线 PQ 的斜率为 0 时，此时 O,P,Q 三点共线，不合要求，舍去；

当直线 PQ 的斜率不为 0 时，设直线 PQ 的方程为 $x=ty+\sqrt{3}$，

与椭圆方程 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 联立，得 $(3t^2+4)y^2+6\sqrt{3}ty-3=0$，

设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=-\dfrac{6\sqrt{3}t}{3t^2+4},y_1y_2=-\dfrac{3}{3t^2+4}$，

则 $S_{\triangle OPQ}=\dfrac{1}{2}|OP|\cdot|y_1-y_2|=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\left(-\dfrac{6\sqrt{3}t}{3t^2+4}\right)^2+\dfrac{12}{3t^2+4}}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{108t^2}{\left(3t^2+4\right)^2}+\frac{12}{3t^2+4}}=6\sqrt{\frac{3t^2+1}{\left[\left(3t^2+1\right)+3\right]^2}}=6\sqrt{\frac{3t^2+1}{\left(3t^2+1\right)^2+6\left(3t^2+1\right)+9}}$

$=6\sqrt{\frac{1}{\left(3t^2+1\right)+\frac{9}{3t^2+1}+6}}\le 6\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{\left(3t^2+1\right)\cdot\frac{9}{3t^2+1}}+6}}=\sqrt{3}$,

当且仅当$3t^2+1=\frac{9}{3t^2+1}$，即$t=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$时，等号成立，

故$\triangle OPQ$面积的最大值为$\sqrt{3}$，此时直线PQ的方程为$\sqrt{3}x+\sqrt{2}y-3=0$或$\sqrt{3}x-\sqrt{2}y-3=0$；………8 分

（2）在x轴上存在点$S\left(\frac{4\sqrt{3}}{3},0\right)$使得$\angle PST=\angle QST$恒成立，理由如下：

因为$\angle PST=\angle QST$，所以$k_{PS}+k_{QS}=0$，即$\frac{y_1}{x_1-s}+\frac{y_2}{x_2-s}=0$，

整理得$\left(x_2-s\right)y_1+\left(x_1-s\right)y_2=0$，即$\left(ty_2+\sqrt{3}\right)y_1+\left(ty_1+\sqrt{3}\right)y_2-s\left(y_1+y_2\right)=0$，

所以$2ty_1y_2+\left(\sqrt{3}-s\right)\left(y_1+y_2\right)=0$，

则$2t\left(-\frac{3}{3t^2+4}\right)+\left(\sqrt{3}-s\right)\left(-\frac{6\sqrt{3}t}{3t^2+4}\right)=0$，解得$s=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

故在x轴上存在点$S\left(\frac{4\sqrt{3}}{3},0\right)$，使得$\angle PST=\angle QST$恒成立.………12 分

20.（1）

P（每次扑出点球）$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{9}$.

X的所有可能取值为 0，1，2，3，4. ∴$P\left(X=0\right)=C_4^0\times\left(\frac{1}{9}\right)^0\times\left(\frac{8}{9}\right)^4=\frac{4096}{6561}$.

$P\left(X=1\right)=C_4^1\times\left(\frac{1}{9}\right)\times\left(\frac{8}{9}\right)^3=\frac{2048}{6561}$.

$P\left(X=2\right)=C_4^2\times\left(\frac{1}{9}\right)^2\times\left(\frac{8}{9}\right)^2=\frac{384}{6561}$.

$P\left(X=3\right)=C_4^3\times\left(\frac{1}{9}\right)^3\times\left(\frac{8}{9}\right)=\frac{32}{6561}$.

$P\left(X=4\right)=C_4^4\times\left(\frac{1}{9}\right)^4=\frac{1}{6561}$.

∴X的分布列

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{4096}{6561}$	$\frac{2048}{6561}$	$\frac{384}{6561}$	$\frac{32}{6561}$	$\frac{1}{6561}$

$\therefore E(X)=4\times\frac{1}{9}=\frac{4}{9}$.

（2）若甲队恰在第4轮取得胜利，则前3轮结束时比分可能为$1:0$，$2:0$，$2:1$，$3:1$，$3:2$．分别记前3轮比分为$1:0$，$2:0$，$2:1$，$3:1$，$3:2$且甲队恰在第4轮取得胜利，事件分别为A，B，C，D，E．

$$P(A)=C_3^1\times\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{768}.$$

$$P(B)=C_3^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{10}{768}.$$

$$P(C)=C_3^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}\times C_3^1\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{6}{256}=\frac{18}{768}.$$

$$P(D)=\left(\frac{3}{4}\right)^3\times C_3^1\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{20}{256}=\frac{60}{768}.$$

$$P(E)=\left(\frac{3}{4}\right)^3\times C_3^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{12}{256}=\frac{36}{768}.$$

故P（甲队恰在第4轮取得胜利）$=\frac{1}{768}+\frac{10}{768}+\frac{18}{768}+\frac{60}{768}+\frac{36}{768}=\frac{125}{768}$.

$\therefore$甲队恰在第4轮取得胜利的概率为$\frac{125}{768}$.

21. 解：（1）函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，且$f'(x)=\frac{x^2+ax-1}{x^2}$，令$f'(x)=0$，

得$x^2+ax-1=0$，解得$x_1=\frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}$，$x_2=\frac{-a-\sqrt{a^2+4}}{2}<0$（舍去），

所以$f(x)$在$(0,x_1)$上单调递减，在$(x_1,+\infty)$单调递增，所以$f(x)_{\min}=f(x_1)=x_1+\frac{1}{x_1}+a\ln x_1$，即

$h(a)=\sqrt{a^2+4}+a\ln\frac{\sqrt{a^2+4}-a}{2}$，

由x_1是方程$x^2+ax-1=0$的根，则$a=\frac{1}{x_1}-x_1$，所以$h(a)=x_1+\frac{1}{x_1}+\left(\frac{1}{x_1}-x_1\right)\ln x_1$，

令$H(x)=x+\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}-x\right)\ln x$，可知$H\left(\frac{1}{x}\right)=H(x)$.

又因为$H'(x)=-\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\ln x$，所以$H(x)$在$(0,1)$单调递增，在$(1,+\infty)$单调递减.

而$H\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{3}{e^2}-e^2<0$，$H(1)=2>0$，所以有且仅有唯一$x_0\in(0,1)$，使得$H(x_0)=0$，

所以存在$\frac{1}{x_0}\in(1,+\infty)$，有$H\left(\frac{1}{x_0}\right)=0$．所以方程$H(x)=0$有且仅有两个根$x_0$，$\frac{1}{x_0}$，

即$x_1+\frac{1}{x_1}+\left(\frac{1}{x_1}-x_1\right)\ln x_1=0$有且仅有两根$x_0$，$\frac{1}{x_0}$，

又因为$a=\frac{1}{x_1}-x_1(x_1>0)$单调递减，所以$y=h(a)$有两个零点设为$a_1$，$a_2$，

则$a_1+a_2=\left(\frac{1}{x_0}-x_0\right)+\left(\frac{1}{\frac{1}{x_0}}-\frac{1}{x_0}\right)=0$．

（2）由题意知$a=1$时，$g(x)=f(x)-x=\ln x+\frac{1}{x}$，

因为$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，

令$g'(x)>0$，得$x>1$；$g'(x)<0$，得$x<1$，

所以$g(x)$在$(0,1)$上递减，在$(1,+\infty)$递增，则有$g(x)\geq g(1)=1$，

因为$x_1\in(0,1)$，所以$x_2=g(x_1)>1$，$x_3=g(x_2)>1$，…，$x_{n+1}=g(x_n)>1$．

令$m(x)=g(x)-x=\frac{1}{x}+\ln x-x$，$x\geq1$，

$m'(x)=\frac{-x^2+x-1}{x^2}=\frac{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}}{x^2}<0$，所以$m(x)$在区间$[1,+\infty)$单调递减，

所以$m(x_{n+2})>m(x_{n+1})$，即$g(x_{n+2})-x_{n+2}>g(x_{n+1})-x_{n+1}$，

即$x_{n+3}-x_{n+2}>x_{n+2}-x_{n+1}$，所以$x_{n+1}+x_{n+3}>2x_{n+2}$．

22. 解：(1) 直线l的参数方程为：$\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=2+t\sin\alpha\end{cases}$ (t为参数) $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$．……2 分

曲线C：$\rho\cos^2\theta=2\sin\theta$，$\therefore\rho^2\cos^2\theta=2\rho\sin\theta$．……3 分

由$x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$得：曲线$C$的直角坐标方程为：$x^2=2y$．……5 分

(2) 设A,B两点对应的参数分别为t_1,t_2，

将直线l的参数方程代入曲线C的方程$x^2=2y$得：$t^2\cos^2\alpha=2(2+t\sin\alpha)$，……6 分

化简得：$(\cos^2\alpha)t^2-(2\sin\alpha)t-4=0$，$\therefore t_1+t_2=\frac{2sin\alpha}{\cos^2\alpha},t_1t_2=\frac{-4}{\cos^2\alpha}$．……7 分

$\therefore|PM|=\left|\frac{t_1+t_2}{2}\right|=\frac{|\sin\alpha|}{\cos^2\alpha}$，$|PA|\cdot|PB|=|t_1t_2|=\frac{4}{\cos^2\alpha}$．……8 分

$\because |PA|,|PM|,|PB|$ 成等比数列，$\therefore |PM|^2=|PA|\cdot|PB|$，$\therefore \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha}=\dfrac{4}{\cos^2\alpha}$，……9 分

$\therefore \tan^2\alpha=4$，$\therefore \tan\alpha=\pm 2$．故直线 l 的斜率为 2 或 -2．……10 分

23. 解：（1）若不等式 $f(x)\ge|m-1|$ 有解，只需 $f(x)_{max}\ge|m-1|$ 即可.

因为 $f(x)=\sqrt{x^2-2x+1}-|x+2|=|x-1|-|x+2|\le|(x-1)-(x+2)|=3$，………4 分.

所以 $|m-1|\le 3$，解得 $-2\le m\le 4$，

所以实数 m 的最大值 $M=4$．…………5 分.

（2）根据（1）知正实数 a，b 满足 $3a^2+b^2=4$，

由柯西不等式可知 $(3a^2+b^2)(3+1)\ge(3a+b)^2$，…………8 分.

所以，$(3a+b)^2\le 16$，因为 a,b 均为正实数，

所以 $3a+b\le 4$（当且仅当 $a=b=1$ 时取"="）．…………10 分.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。