成都市2020级高中毕业班第二次诊断性检测

数　学(文科)

本试卷分选择题和非选择题两部分。第Ⅰ卷(选择题)1至2页，第Ⅱ卷(非选择题)3至4页，共4页，满分150分，考试时间120分钟。

注意事项：

1. 答题前，务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时，必须使用2B铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时，必须使用0.5毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后，只将答题卡交回。

第Ⅰ卷　(选择题，共60分)

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 设全集$U=\mathbf{R}$，集合$A=\{x \mid 2<x\leqslant 4\}$，则

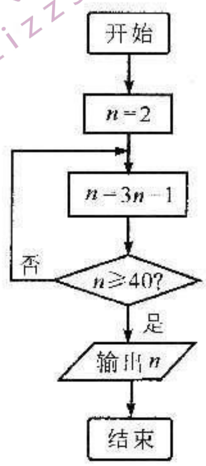
(A) $1\in A$　　(B) $2\in A$　　(C) $3\notin \complement_{\mathbf{R}}A$　　(D) $4\in \complement_{\mathbf{R}}A$

2. 函数$f(x)=\cos(x+\frac{3\pi}{2})+\cos x$的最小正周期为

(A) $\frac{\pi}{2}$　　(B) π

(C) 2π　　(D) 4π

3. 执行如图所示的程序框图，输出的n的值为



(A) 40　　(B) 41

(C) 119　　(D) 122

4. 若实数x,y满足约束条件$\begin{cases}x-y-1\geqslant 0,\\ x+y-3\leqslant 0,\\ y\geqslant 0.\end{cases}$则$\frac{y}{x}$的最大值为

(A) 0　　(B) $\frac{1}{3}$　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) 2

5. 设 F_1,F_2 分别是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点. P 为双曲线 C 右支上一点,若 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{2}$,$|PF_2|=2a$,则双曲线 C 的离心率为

(A) $\sqrt{5}$　　(B) 2　　(C) $\sqrt{3}$　　(D) $\sqrt{2}$

6. 某同学计划 2023 年高考结束后,在 A,B,C,D,E 五所大学中随机选两所去参观,则 A 大学恰好被选中的概率为

(A) $\frac{1}{5}$　　(B) $\frac{2}{5}$　　(C) $\frac{3}{5}$　　(D) $\frac{4}{5}$

7. 已知命题 p:空间中两条直线没有公共点,则这两条直线平行;命题 q:空间中三个平面 α,β,γ,若 $\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma,\alpha\cap\beta=l$,则 $l\perp\gamma$. 则下列命题为真命题的是

(A) $p\wedge q$　　(B) $p\wedge\neg q$　　(C) $p\vee\neg q$　　(D) $\neg p\wedge q$

8. 已知过抛物线 $C:y=\frac{x^2}{8}$ 的焦点 F,且倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线 l 交抛物线 C 于 A,B 两点,则 $|AB|=$

(A) 32　　(B) $\frac{32}{3}$　　(C) $\frac{28}{3}$　　(D) 8

9. 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=-f(x)$,且当 $x\in[0,1]$ 时,$f(x)=\frac{x}{4-2x}$,则 $f(23)=$

(A) -1　　(B) $-\frac{1}{2}$　　(C) 0　　(D) $\frac{1}{2}$

10. 若正三棱锥 $P-ABC$ 的高为 2,$AB=2\sqrt{6}$,其各顶点都在同一球面上,则该球的半径为

(A) $\sqrt{5}$　　(B) $\sqrt{6}$　　(C) $2\sqrt{2}$　　(D) 3

11. 已知 $a=\frac{1}{2023}$,$b=\ln\frac{2024}{2023}$,$c=\log_5\frac{2024}{2023}$,则

(A) $c<b<a$　　(B) $c<a<b$　　(C) $b<c<a$　　(D) $a<b<c$

12. 在△ABC 中,已知 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DC}$,$AC=3BC=3$,$\sin\angle BDC=3\sin\angle BAC$,则△$ABC$ 的面积为

(A) $\frac{1}{6}$　　(B) $\frac{1}{3}$　　(C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　(D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

第Ⅱ卷 （非选择题，共90分）

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．把答案填在答题卡上．

13. 复数 $z=2i+i^2+i^3$（i为虚数单位），则 $|z|$ 的值为______．

14. 已知 $\tan\theta=2$，则 $\cos2\theta=$______．

15. 函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+1$ 的极大值为______．

16. 若直线 $l_1: x+my-2=0$ 与 $l_2: mx-y+2=0(m\in\mathbf{R})$ 相交于点 P，过点 P 作圆 $C:(x+2)^2+(y+2)^2=1$ 的切线，切点为 M，则 $|PM|$ 的最大值为______．

三、解答题：本大题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（本小题满分12分）

某中学为了丰富学生的课余生活，欲利用每周一下午的自主活动时间，面向本校高二学生开设“厨艺探秘”“盆景栽培”“家庭摄影”“名画鉴赏”四门选修课，由学生自主申报，每人只能报一门，也可以不报．该校高二有两种班型——文科班和理科班（各有2个班），据调查这4个班中有100人报名参加了此次选修课，报名情况统计如下：

	厨艺探秘	盆景栽培	家庭摄影	名画鉴赏
文科1班	11	5	14	6
文科2班	12	7	11	4
理科1班	3	1	9	3
理科2班	5	1	6	2

（Ⅰ）若把“厨艺探秘”“盆景栽培”统称为“劳育课程”，把“家庭摄影”“名画鉴赏”统称为“美育课程”．请根据所给数据，完成下面的2×2列联表：

报名班型	课程		合计
	“劳育课程”	“美育课程”	
文科班			
理科班			
合计			

（Ⅱ）根据（Ⅰ）列联表中所填数据，判断是否有99%的把握认为课程的选择与班型有关．

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$．

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.50	0.40	0.25	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005
k_0	0.455	0.708	1.323	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879

18.（本小题满分 12 分）

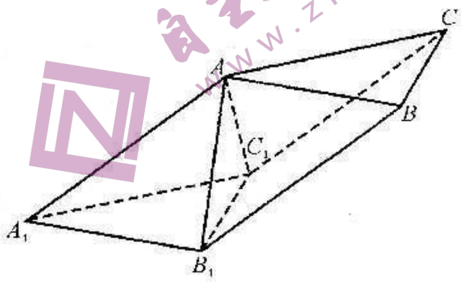
已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 3，且 a_1, a_2+3, a_3-6 成等差数列.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19.（本小题满分 12 分）

如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle AB_1C_1$ 均是边长为 2 的正三角形，且 $AA_1=\sqrt{6}$.



（Ⅰ）证明：平面 $AB_1C_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$；

（Ⅱ）求四棱锥 $A-BB_1C_1C$ 的体积.

20.（本小题满分 12 分）

已知中心为坐标原点 O，对称轴为坐标轴的椭圆 C 经过 $P(\sqrt{3},\frac{2\sqrt{6}}{3})$，$Q(\sqrt{6},\frac{2\sqrt{3}}{3})$ 两点.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设过点 $(0,1)$ 的直线 l 与椭圆 C 相交于 A，B 两点，$2\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}$，且点 E 在椭圆 C 上，求直线 l 的方程.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{e^x}{x^a}$，其中 $x>0, a>0$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若方程 $\frac{f(x)}{e}=x-a\ln x$ 恰有两个不相等的实数根，求 a 的取值范围.

请考生在第 22，23 题中任选择一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分. 作答时，用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的标号涂黑.

22.（本小题满分 10 分）选修 4－4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=3t^2 \\ y=3t \end{cases}$（$t$ 为参数）. 以坐标原点 O 为极点，x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{6})=3$.

（Ⅰ）求直线 l 的直角坐标方程与曲线 C 的普通方程；

（Ⅱ）已知点 P 的直角坐标为 $(-3,2\sqrt{3})$，直线 l 与曲线 C 相交于 A,B 两点，求 $|PA|+|PB|$ 的值.

23.（本小题满分 10 分）选修 4－5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x+1|+2|x-2|$.

（Ⅰ）画出 $y=f(x)$ 的图象；

（Ⅱ）求不等式 $f(x+2)>f(x)$ 的解集.

成都市 2020 级高中毕业班第二次诊断性检测

数学(文科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷 (选择题,共 60 分)

一、选择题:(每小题 5 分,共 60 分)

1.C; 2. C; 3.B; 4. C 5. A; 6. B; 7. D 8. A; 9.B; 12.D.

第Ⅱ卷 (非选择题,共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分,共 20 分)

13. $\sqrt{2}$; 14. $-\frac{}{5}$; 15. 1; 16. $\sqrt{31}$.

三、解答题:(共 70 分)

17. 解:(Ⅰ)由题意,列联表如下:

报名班型	课程		合计
	“劳育课程”	“美育课程”	
文科班	35	35	70
理科班	10	20	30
合计	45	55	100

……6 分

(Ⅱ) $\because K^2=\frac{100\times(35\times20-35\times10)^2}{45\times55\times70\times30}\ \frac{700}{297}\approx2.357<6.635$, ……10 分

$\therefore$ 没有 99%的把握认为“劳育课程”“美育课程”的选择与文理科有关. ……12 分

解:(Ⅰ)设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q

$\because a_1, a_2+3, a_3-6$ 成等差数列,

$\therefore 2(a_2+3)=a_1+a_3-6.$ ……2 分

$\therefore 2a_1q+6=a_1+a_1q^2-6.$ ……3 分

$\because q=3$,

解得 $a_1=3$. ……5 分

$\therefore a_n=3^n$. ……6 分

(Ⅱ)设 $b_n=na_n$,则 $b_n=n\cdot3^n$.

$\therefore T_n=3+2\times3^2+3\times3^3+\cdots+n\times3^n$ ①

$\therefore 3T_n=3^2+2\times3^3+3\times3^4 \quad +n \quad 3^{n+1}$

由①－②得, $-2T_n=3+3^2+3^3+\cdots+3^n-n \quad 3^{n+1}$ ……8 分

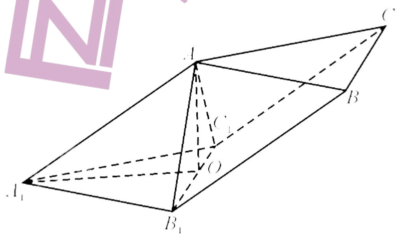
$-2T_n=\frac{3\times(1-3^n)}{1-3}-n \quad 3^{n+1}$ ……10 分

$\therefore T_n=\dfrac{(2n-1)3^{n+1}+3}{4}$. ……12 分

19. 解:(Ⅰ)取 B_1C_1 的中点 O,连接 AO,A_1O.

∵ $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle AB_1C_1$ 均是边长为 2 的正三角形,

∴ $AO\perp B_1C_1, A_1O\perp B_1C_1, A_1O=AO=\sqrt{3}$. ……2 分



∴ $\angle AOA_1$ 为二面角 $A-B_1C_1-A_1$ 的平面角. ……3 分

∵ $AA_1=\sqrt{6}$,

∴ $A_1O^2+AO^2=A_1A^2$.

∴ $A_1O\perp AO$. ……5 分

∴平面 $AB_1C_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$. ……6 分

(Ⅱ) $V_{A-BB_1C_1C}=V_{ABC-A_1B_1C_1}-V_{A-A_1B_1C_1}=2V_{A-A_1B_1C_1}$. ……9 分

由(Ⅰ)知,$A_1O\perp AO, AO\perp B_1C_1$.

∵ $A_1O\cap B_1C_1=O, B_1C_1\subset$ 面 $A_1B_1C_1, A_1O\subset$ 面 $A_1B_1C_1$,

∴ $AO\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$.

∴ AO 为三棱锥 $A-A_1B_1C_1$ 的高. ……10 分

∴ $V_{A-A_1B_1C_1}=\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle A_1B_1C_1}\times AO=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 4\times\sqrt{3}=1$. ……11 分

∴四棱锥 $A-BB_1C_1C$ 的体积为 2. ……12 分

20. 解:(Ⅰ)由题意,设椭圆 C 的方程 $mx^2+ny^2=1(m>0,n>0,m\neq n)$. ……1 分

∵ 椭圆 C 经过 $P(\sqrt{3},\dfrac{2\sqrt{6}}{3})$, $Q(\sqrt{6},\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$ 两点,

∴ $\begin{cases}3m+\dfrac{8}{3}n=1\\ 6m+\dfrac{4}{3}n=1\end{cases}$. 解得 $\begin{cases}m=\dfrac{1}{9}\\ n=\dfrac{1}{4}\end{cases}$. ……3 分

∴ 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$. ……5 分

(Ⅱ)当直线 l 斜率存在时,设直线 l 的方程为 $y=kx+1$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$.

则 $D(\dfrac{3x_2}{2},\dfrac{3y_2}{2})$, $E(x_1+\dfrac{3x_2}{2},y_1+\dfrac{3y_2}{2})$.

∵ 点 A,B,E 均在椭圆 C 上,

∴ $\dfrac{x_1^2}{9}+\dfrac{y_1^2}{4}=1$, $\dfrac{x_2^2}{9}+\dfrac{y_2^2}{4}=1$, $\dfrac{(x_1+\frac{3x_2}{2})^2}{9}+\dfrac{(y_1+\frac{3y_2}{2})^2}{4}=1$.

∴ $4x_1x_2+9y_1y_2+27=0$. ……7 分

∴ $(4+9k^2)x_1x_2+9k(x_1+x_2)+36=0$. ……8 分

由 $\begin{cases} y=kx+1, \\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$ 消去 y，得 $(9k^2+4)x^2+18kx-27=0$.

显然 $\Delta=432(3k^2+1)>0$.

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{-18k}{9k^2+4}, x_1x_2=\dfrac{-27}{9k^2+4}$. ……9 分

$\therefore \dfrac{-27}{9k^2+4}\times(4+9k^2)-\dfrac{18k}{9k^2+4}\times 9k+36=0$.

$\therefore 9k^2=4, k=\pm\dfrac{2}{3}$. ……11 分

当直线 l 斜率不存在时，$E(0,\pm 1)$ 不合题意.

$\therefore$ 所求直线 l 的方程为 $y=\pm\dfrac{2}{3}x+1$. ……12 分

21. 解：(Ⅰ)当 $a=1$ 时，$f(x)=\dfrac{e^x}{x}$.

$\therefore f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$. ……2 分

$\because x>0$,

$\therefore$ 当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 单调递减区间为 $(0,1)$，单调递增区间为 $(1,+\infty)$. ……4 分

(Ⅱ) $\because x>0, a>0$, $\dfrac{e^x}{ex^a}=\ln e^x-\ln x^a=\ln\dfrac{e^x}{x^a}$,

令 $t=\dfrac{e^x}{x^a}>0$，则 $\dfrac{t}{e}=\ln t$.

令 $h(t)=\ln t-\dfrac{t}{e}$，则 $h'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{e}$.

$\therefore$ 当 $0<t<e$ 时，$h'(t)>0$；当 $t>e$ 时，$h'(t)<0$.

$\therefore$ 函数 $h(t)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减.

$\because h(e)=0$,

$\therefore$ 方程 $\dfrac{t}{e}=\ln t$ 有唯一解 $t=e$.

$\therefore$ 方程 $\dfrac{e^x}{ex^a}=x-a\ln x$ 有两个不等的实数解等价于方程 $e=\dfrac{e^x}{x^a}$ 有两个不相等的实数解.

……7 分

等价于方程 $a\ln x=x-1$ 有两个不相等的实数解.

构造函数 $k(x)=a\ln x-x+1$，则 $k'(x)=\dfrac{a}{x}-1$.

$\because a>0$,

$\therefore$ 当 $0<x<a$ 时，$k'(x)>0$；当 $x>a$ 时，$k'(x)<0$.

$\therefore$ 函数 $k(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递增，在 $(a,+\infty)$ 上单调递减.

$\because x\to 0^+, k(x)\to-\infty$；$x\to+\infty, k(x)\to-\infty$.

$\therefore$ 只需要 $k(a)=a\ln a-a+1>0$，即 $\ln a+\dfrac{1}{a}-1>0$. ……9 分

构造函数 $m(a)=\ln a+\dfrac{1}{a}-1$，则 $m'(a)=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a^2}$.

$\therefore$ 当 $0<a<1$ 时，$m'(a)<0$；当 $a>1$ 时，$m'(a)>0$.

$\therefore$ 函数 $m(a)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

$\because m(1)=0$，

$\therefore$ 当 $a\neq 1$ 时，$\ln a+\dfrac{1}{a}-1>0$ 恒成立. ……11 分

$\therefore a$ 的取值范围为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$. ……12 分

22. 解：(Ⅰ) $\because$ 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=3t^2\\ y=3t\end{cases}$（$t$ 为参数），

$\therefore$ 曲线 C 的普通方程为 $y^2=3x$. ……2 分

$\because$ 直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})=3$，

$\therefore \sqrt{3}\rho\sin\theta+\rho\cos\theta=3$. ……3 分

$\because x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，

$\therefore$ 直线 l 的直角坐标方程为 $x+\sqrt{3}y-3=0$. ……5 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)知，点 P 在直线 l 上，

$\therefore$ 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-3-\dfrac{\sqrt{3}}{2}m\\ y=2\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}m\end{cases}$（$m$ 为参数），……7 分

代入 $y^2=3x$ 得，$m^2+14\sqrt{3}m+84=0$.

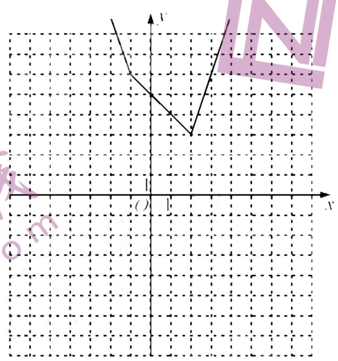
设 m_1, m_2 是上述方程的两根，

$\therefore \Delta>0, m_1+m_2=-14\sqrt{3}, m_1m_2=84>0$. ……9 分

$\therefore |PA|+|PB|=|m_1|+|m_2|=|m_1+m_2|=14\sqrt{3}$. ……10 分

23. 解：(Ⅰ)由题得，$f(x)=|x+1|+2|x-2|=\begin{cases}-3x+3, & x\leqslant -1\\ -x+5, & -1<x<2\\ 3x-3, & x\geqslant 2.\end{cases}$ ……3 分

函数 $y=f(x)$ 的图象为



……5 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。