达州市普通高中 2023 届第一次诊断性测试

理科数学参考答案

一、选择题：

1. A　2. C　3. D　4. C　5. D　6. A　7. B　8. C　9. D　10. D　11. B　12. A

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．70　　14．$\dfrac{1}{24}$　　15．4　　16．1

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．解：(1) 由表知 x 的平均数为 $\overline{x}=\dfrac{1+2+3+4+5}{5}=3$.

$\therefore \sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2=(1-3)^2+(2-3)^2+\cdots+(5-3)^2=10$.

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(y_i-\overline{y})^2}}=\frac{1.28}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{0.17}}=\frac{1.28}{\sqrt{1.7}}\approx 0.98.$$

$\because 0.98>0.75$，$\therefore$ y 与 x 具有较高的线性相关程度.

(2) 设增长率为 p，则 $1.8(1+p)\geqslant 1.98$，解得 $p\geqslant 0.1$.

$\therefore p_{\min}=0.1=10\%$.

该市 2022 年农村居民人均可支配收入相对 2021 年增长率最小值为 10%.

18．解：(1)设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，$\because a_n>0$，$\therefore q>0$，$\therefore$ 由 $a_4=a_2^3$ 得 $a_1q^3=(a_1q)^3$.

$\therefore a_1=1$.

$\because S_n=2S_{n-1}+m$，$\therefore S_2=2S_1+m$，$S_3=2S_2+m$，$S_3-S_2=2(S_2-S_1)$，

即 $a_3=2a_2$，$\therefore q=\dfrac{a_3}{a_2}=2$.

所以 $a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)$\because S_2=2S_1+m$，$\therefore a_1+a_2=2a_1+m$，$\therefore m=a_2-a_1=1$.

$\therefore S_n=\dfrac{1\cdot(1-2^n)}{1-2}=2^n-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

$\therefore \dfrac{m\cdot 2^n}{S_n\cdot S_{n+1}}=\dfrac{m\cdot 2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$.

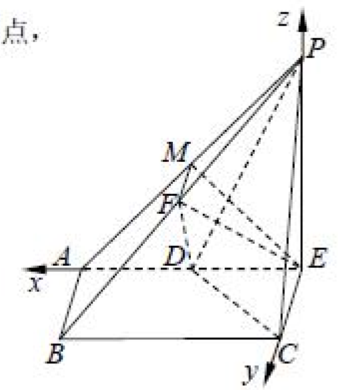
$\therefore T_n=(\dfrac{1}{2^1-1}-\dfrac{1}{2^2-1})+(\dfrac{1}{2^2-1}-\dfrac{1}{2^3-1})+\cdots+(\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1})=1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$.

19．(1)证明：$\because PE\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore PE\perp AB$.

$\because AB\perp BC$，$AD\,/\!/\,BC$，$\therefore AB\perp AD$.

又 $PE\cap AD=E$，$\therefore AB\perp$ 平面 PAD.

$\because PA\subset$ 平面 PAD，$\therefore PA\perp AB$.



取 PA 的中点 M，连接 EM，FM，∵ F 为 PB 的中点，

∴ $FM \parallel AB$.

∴ $FM \perp PA$.

∵ $\tan\angle PDA=-2$，∴ $\tan\angle PDE=2$，

∴ $\dfrac{PE}{DE}=2$，∴ $PE=2DE=2AD$，

∴ D 为 AE 的中点，∴ $PE=AE$，∴ $EM\perp PA$.

又 $EM\cap FM=M$，∴ $PA\perp$ 平面 EFM .

∵ $EF\subset$ 平面 EFM，∴ $EF\perp PA$.

(2)解：∵ $BC=2AD=2DE=2$，∴ $PE=2$.

∴ $BC\parallel AE$，且 $BC=AE$，∵ $AB\perp BC$，∴四边形 $ABCE$ 为矩形，∴ $CE\perp$ 平面 PAE .

$V_{E-PDC}=V_{P-DEC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle DEC}\cdot PE=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times1\times CE\times2=\dfrac{1}{3}$，∴ $CE=1$.

以 E 为原点，分别以 $\overrightarrow{EA}$，$\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{EP}$ 方向为 x 轴，y 轴，z 轴建立如图所示空间直角坐标系 $Exyz$. 则 $D(1,0,0)$，$C(0,1,0)$，$F(1,\dfrac{1}{2},1)$，∴ $\overrightarrow{ED}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{EF}=(1,\dfrac{1}{2},1)$，

易知 $\boldsymbol{n}_1=(0,0,1)$ 是平面 DEC 的一个法向量．设平面 FDE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$，

∴ $\begin{cases}\overrightarrow{ED}\cdot\boldsymbol{n}_2=0,\\ \overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}_2=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x=0,\\ x+\dfrac{1}{2}y+z=0.\end{cases}$ 不妨取 $y=-2$，得 $\boldsymbol{n}_2=(0,-2,1)$.

∴ $\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{1}{\sqrt5}=\dfrac{\sqrt5}{5}$.

由图知二面角 $F-DE-C$ 的平面角为锐角，∴二面角 $F-DE-C$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt5}{5}$.

20．解：(1)由题知 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$.

设 F_1 关于直线 l 的对称点坐标为 (x',y')，则 $\begin{cases}\dfrac{y'}{x'+1}=-\dfrac{1}{k},\\ \dfrac{y'}{2}=k\cdot\dfrac{x'-1}{2}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x'=\dfrac{k^2-1}{k^2+1},\\ y'=-\dfrac{2k}{k^2+1}.\end{cases}$

根据条件得 $\dfrac{(k^2-1)^2}{2(k^2+1)^2}+\dfrac{4k^2}{(k^2+1)^2}=1$，解得 $k^2=1$，即 $k=1$.

(2)设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$. 把 $y=x$ 带入椭圆 C 方程得 A，B 的坐标为 $(\dfrac{\sqrt6}{3},\dfrac{\sqrt6}{3})$，$(-\dfrac{\sqrt6}{3},-\dfrac{\sqrt6}{3})$. 由已知得直线 MN 的方程为 $y=k_1(x-1)$ ①交线段 AB 于 D，

∴ $\dfrac{-\dfrac{\sqrt6}{3}}{1-\dfrac{\sqrt6}{3}}\leqslant k_1\leqslant\dfrac{\dfrac{\sqrt6}{3}}{1+\dfrac{\sqrt6}{3}}$，即 $-\sqrt6-2\leqslant k_1\leqslant\sqrt6-2$.

设 $D(x_D,y_D)$，在①中令 $y=x$，得 $x_D=\dfrac{k_1}{k_1-1}$，∴ $|F_2D|=\sqrt{1+\cdots}$ … $\sqrt{1+k_1^2}$

把①代入$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$并化简得$(1+2k_1^2)x^2-4k_1^2x+2k_1^2-2=0$．

$\Delta>0$，$x_1+x_2=\dfrac{4k_1^2}{1+2k_1^2}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{2k_1^2-2}{1+2k_1^2}$．

$\therefore |MN|=\sqrt{1+k_1^2}\,|x_1-x_2|=\dfrac{2\sqrt{2}(1+k_1^2)}{1+2k_1^2}$．

$\therefore \dfrac{|F_2D|^2}{|MN|}=\dfrac{1+2k_1^2}{2\sqrt{2}(1-k_1)^2}$．

令$t=1-k_1$，则$\dfrac{1+2k_1^2}{(1-k_1)^2}=3(\dfrac{1}{t}-\dfrac{2}{3})^2+\dfrac{2}{3}$，当，$t=\dfrac{3}{2}$即$k_1=-\dfrac{1}{2}$时，$\dfrac{1+2k_1^2}{(1-k_1)^2}$取得最小值$\dfrac{2}{3}$．

所以$\dfrac{|F_2D|^2}{|MN|}$的最小值为$\dfrac{\sqrt{2}}{6}$．

21．解：(1)由$f(x)=xe^{-mx}-\ln x$得$x>0$，且$f'(x)=e^{-mx}-mxe^{-mx}-\dfrac{1}{x}$．

$\because x=1$是函数$f(x)$的极值点，$\therefore f'(1)=e^{-m}-me^{-m}-1=0$，即$\dfrac{1-m}{e^m}-1=0$．

设$f_1(x)=\dfrac{1-x}{e^x}-1$，则$f_1'(x)=\dfrac{x-2}{e^x}$．当$x<2$时，$f_1'(x)<0$，$f_1(x)$单调递减，当$x>2$时$f_1'(x)>0$，$f_1(x)$单调递增．

又当$x>2$时，$f_1(x)<0$，且$f_1(0)=0$，$\therefore m=0$．

当$m=0$时，$f(x)=x-\ln x$，$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}$．若$0<x<1$，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；若$x>1$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，$\because f'(1)=0$，$\therefore x=1$是$f(x)$的极小值点．

所以$f(x)$的单调减区间为$(0,1]$，增区间为$[1,+\infty)$．

(2)证明：$\because m<-\dfrac{1}{2}$，$x>0$，$\therefore -mx>\dfrac{1}{2}x$，$\therefore e^{-mx}>e^{\frac{1}{2}x}$．

$\therefore f(x)=xe^{-mx}-\ln x>xe^{\frac{1}{2}x}-\ln x$．

构造函数$g(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{2}x}}{x}$，则$g'(x)=\dfrac{(x-2)e^{\frac{1}{2}x}}{2x^2}$，当$0<x<2$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，当$x>2$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增．由于$g'(2)=0$，$\therefore g(x)_{\min}=g(2)=\dfrac{e}{2}$．

设$h(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}+1$，则$h'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$，当$0<x<\sqrt{e}$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，当$x>\sqrt{e}$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减．由于$h'(\sqrt{e})=0$，$\therefore h(x)_{\max}=h(\sqrt{e})=\dfrac{1}{2e}+1$．

$\because \dfrac{e}{2}-(\dfrac{1}{2e}+1)=\dfrac{e^2-2e-1}{2e}>0$，$\therefore g(x)_{\min}>h(x)_{\max}$，$\therefore g(x)>h(x)$，$\therefore \dfrac{e^{\frac{1}{2}x}}{x}>\dfrac{\ln x}{x^2}+1$，

即$xe^{\frac{1}{2}x}-\ln x>x^2$．$\therefore f(x)>x^2$．

所以曲线$y=f(x)$上所有的点都在抛物线$x^2=y$内．

22．解：(1)将$\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$代入C的极坐标方程$\rho^2-2\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta-2=0$得曲线$C$为$x^2+y^2-2x-2y-2=0$，即$(x-1)^2+(y-1)^2=4$．……4分

(2)易知点P在直线l上，将直线l的参数方程$\begin{cases}x=2+t\cos\theta,\\ y=2+t\sin\theta\end{cases}$($t$为参数)代入曲线$C$方程

得$(1+t\cos\theta)^2+(1+t\sin\theta)^2=4$，整理得$t^2+2(\sin\theta+\cos\theta)t-2=0$.

设点A，B对应该的参数分别为t_1，t_2，则$t_1+t_2=-2(\sin\theta+\cos\theta)$，$t_1t_2=-2<0$，

由参数t的几何意义不妨令$|t_1|=|PA|$，$|t_2|=|PB|$.

$\therefore |PA|+|PB|=|t_1|+|t_2|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{4\sin 2\theta+12}$.

当$\sin 2\theta=-1$，即$\theta=k\pi-\dfrac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$时，$(|PA|+|PB|)_{\min}=2\sqrt{2}$.

23．(1)解：不等式可化为$2^{|x|}>2^{|x+m-1|}$，$\therefore |x-1|>|x+m-1|$，两边同时平方可得

$2mx<2m-m^2$.

$\because$原不等式解集为$\{x\,|\,x<0\}$，$\therefore m>0$，即$x<1-\dfrac{m}{2}$.

$\therefore 1-\dfrac{m}{2}=0$，$m=2$.

(2)解：$\because f(a)=f(b)$，$\therefore 2^{|a-1|}=2^{|b-1|}$，$|a-1|=|b-1|$.

$\because f(1+x)=2^{|x|}=f(1-x)$，$\therefore y=f(x)$关于直线$x=1$对称，$\therefore 0<a<1<b$，

$\therefore 1-a=b-1$，即$a+b=2$.

所以$(\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b-1})(a+b-1)=5+\dfrac{4(b-1)}{a}+\dfrac{a}{b-1}\geqslant 5+2\sqrt{4}=9$，当且仅当$\dfrac{4(b-1)}{a}=\dfrac{a}{b-1}$，

即$a=\dfrac{2}{3},b=\dfrac{4}{3}$时取“=”，$\therefore \dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b-1}$的最小值为9.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。