2021 届高三 新高大联考

数 学 试 卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为 120 分钟，满分 150 分

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x \mid x>2\}$，$B=\{x \mid x^2-3x<0\}$，则 $A\cup B=$

A. $(0,+\infty)$　　B. $(2,3)$　　C. $(0,3)$　　D. $(2,+\infty)$

2. 已知复数 z 满足 $z=(1+2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})$（i 为虚数单位），则 $|z|=$

A. 2　　B. 4　　C. 5　　D. $\sqrt{5}$

3. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，E 为 BC 的中点，则四面体 $AEDC_1$ 的体积为

A. 4　　B. $\frac{8}{3}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. 2

4. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为负数，若 $a_2a_8+2a_3a_9+a_7^2=16$，则 $a_5+a_7=$

A. -2　　B. -4　　C. -8　　D. -16

5. 已知直线 $l: x+y-3=0$ 交圆 $x^2+y^2+4x-2y-4=0$ 于 A、B 两点，则 $|AB|=$

A. 2　　B. 1　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{17}$

6. a,b 都为正数，则“$ab\geqslant\frac{1}{4}$”是“$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leqslant 4$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 公元 960 年，北宋的建立结束了五代十国割据的局面。北宋的农业、手工业、商业空前繁荣，科学技术突飞猛进，火药、指南针、印刷术三大发明在这种经济高涨的情况下得到广泛应用。1084 年秘书省第一次印刷出版了《算经十书》，为数学的发展创造了良好的条件. 11 至 14 世纪出现了一批著名的数学家和数学著作，如秦九韶的《数书九章》，李冶的《测圆海镜》，杨辉的《详解九章算法》、《日用算法》和《杨辉算法》，现从三位数学家的五部专著中任意选择两部作为学生课外兴趣拓展参考书目，则所选的两部中至少有一部不是杨辉著作的概率为

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{7}{10}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{9}{10}$

8. 已知函数$f(x)=2^x-1$，令$a=\frac{f(2^{\frac{1}{2}})}{2^{\frac{1}{2}}}$，$b=\frac{f(5^{\frac{1}{5}})}{5^{\frac{1}{5}}}$，$c=\frac{f(\log_3 2)}{\log_3 2}$，则$a,b,c$的大小关系是

A. $a<b<c$　　B. $c<b<a$

C. $c<a<b$　　D. $b<a<c$

二、多选题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得2分。

9. 已知抛物线$C:y^2=12x$的焦点为F，直线l过F交抛物线于A、B两点，交抛物线的准线于点P，(点A在P、F之间)，若$\overrightarrow{PF}=3\overrightarrow{AF}$，$O$为坐标原点，则

A. 点A的坐标为$(1,2\sqrt{3})$.　　B. $|BF|=12$.

C. 直线l的方程为$y=\pm\sqrt{3}(x-3)$.　　D. $|AO|=\sqrt{13}$.

10. 将函数$f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega\in\mathbf{N}^+)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位后得到函数$y=g(x)$的图象，若$f(x)$的所有对称中心与$g(x)$的所有对称中心重合，则$\omega$可以为

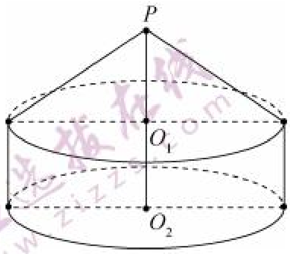
A. 3　　B. 6　　C. 9　　D. 12

11. 已知定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$，满足$f(x+2)=f(2-x)$，$f'(x)$为$f(x)$的导函数，且对于任意的$x\in\mathbf{R}$，都有$(x-2)f'(x)<0$，则

A. $f(0)=f(4)$　　B. $f(-1)>f(5)$

C. $\forall x\in\mathbf{R}, f(x)\leqslant f(2)$　　D. $\forall x\in\mathbf{R}, f(x)\geqslant f(2)$

12. 如图几何体为一个圆柱和圆锥的组合体，圆锥的底面和圆柱的一个底面重合，圆锥的顶点为P，圆柱的上、下底面的圆心分别为O_1，O_2，若该几何体有半径为1的外接球，且球心为O，则



A. 如果$PO_1=O_1O_2$，则O与O_1重合

B. $O_1O_2+2PO_1=2$

C. 如果$PO_1:O_1O_2=1:3$，则圆柱的体积为$\frac{96\pi}{125}$

D. 如果圆锥的体积为圆柱体积的$\frac{1}{6}$，则圆锥的体积为$\frac{\pi}{8}$

三、填空题：本大题有4小题，每小题5分，共20分。把答案填在题中横线上。

13. 已知向量$\boldsymbol{a}=(1,2)$，向量$\boldsymbol{b}$与向量$\boldsymbol{a}$共线，且$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=15$，则$|\boldsymbol{b}|=$________.

14. 已知F_1,F_2是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，点$M$为双曲线的左支上一点，满足$|MF_1|=2|F_1F_2|$，且$\cos\angle MF_1F_2=-\frac{5}{16}$，则该双曲线的离心率$e=$________.

15. 写出一个最小正周期为2的偶函数$f(x)=$________.

16. 已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2+4x+1, x\leqslant 0\\ |\log_2 x|, x>0\end{cases}$，则函数$y=f(f(x))-1$的零点个数为________.

四、解答题：本大题有 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，$b=4$，$(a-c)\sin A=(b-c)(\sin B+\sin C)$.

(1) 求角B；

(2) 求$\triangle ABC$周长的最大值.

18. (12 分)

已知等比数列$\{a_n\}$的公比为q，前n项和为S_n，$a_n>0$，$2a_2+a_3=a_4$，$S_5=4a_4-1$.

(1) 求a_n.

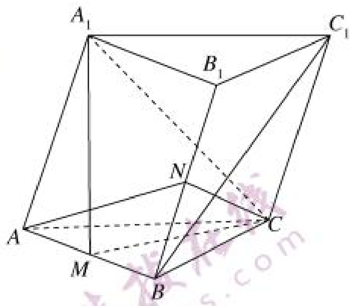
(2) 在平面直角坐标系xOy中，设点$Q_k(k,b_k)(k=1,2,3\cdots)$，直线$Q_kQ_{k+1}$的斜率为$2^k$，且$b_1=1$，求数列$\{b_n\}$的通项公式.

19. (12 分)

如图在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，侧面ABB_1A_1是边长为 2 的菱形，$\angle ABB_1=120°$，平面$AA_1B_1B\perp$平面ABC，M、N分别为AB、BB_1的中点，$AC=BC=\sqrt{2}$.

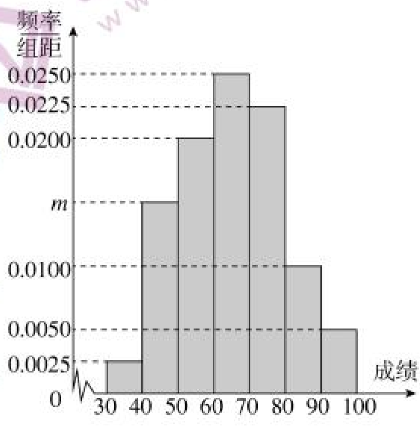
(1) 证明：BC_1∥平面A_1CM；

(2) 求二面角$M-AC-N$的余弦值.



20. (12 分)

某大型小区物业公司为增强居民对消防安全的认识，特对小区居民举办了一次消防安全知识测试. 并从中随机抽取了参加测试的 1000 人的成绩（满分：100 分），经统计得到如下频率分布直方图：



(1)（ⅰ）求m；

（ⅱ）由直方图可知，此次测试分数X近似服从正态分布$N(65,121)$，请用正态分布知识求$P(54<X\leq 87)$；

(2) 在 (1) 的条件下，为鼓励该小区居民多学习消防安全知识，本次测试制定如下奖励方案：

测试成绩低于 65 的居民获得 1 次随机红包奖励，成绩不低于 65 的居民获得 2 次随机红包

奖励. 每次随机红包钱数(单位:元)和对应的概率如下表:

随机红包	30	50
概率	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

该小区王大爷参加此次测试,记ξ为王大爷获得的红包奖励钱数(单位:元),求ξ的分布列及数学期望.

参考数据:若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则$P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)\approx0.6827$;$P(\mu-2\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma)\approx0.9545$;$P(\mu-3\sigma<X\leqslant\mu+3\sigma)\approx0.9974$.

21. (12分)

已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦距为$4\sqrt{2}$,且过点$(\sqrt{6},\sqrt{2})$. 设点$P$为圆$O:x^2+y^2=3$上任意一点,过点$P$作圆的切线交椭圆$C$于点$E$、$F$.

(1)求椭圆C的方程;

(2)试判断$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$是否为定值? 若为定值,求出该定值;若不是定值,请说明理由.

22. (12分)

已知函数$f(x)=e^{-x}(\frac{1}{3}x^3-2x+2\sin x+1)$,$g(x)=\sin x+\cos x+x^2-2x$.

(1)求$g(x)$在点$(0,g(0))$处的切线方程;

(2)证明:对任意的实数$a\leqslant1$,$g(x)\geqslant af(x)$,在$[0,+\infty)$上恒成立.

2021届高三 新高考大联考

数学参考答案及评分意见

1. A 【解析】因为$B=\{x|0<x<3\}$，所以$A\cup B=\{x|x>0\}$. 故选A.

2. C 【解析】$z=(1+2i)(2+i)=5i$，所以$|z|=5$. 故选C.

3. C 【解析】如图所示，则四面体$ADEC_1$的体积$V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2^2\times2=\frac{4}{3}$. 故选C.

4. B 【解析】$a_2a_8+2a_3a_9+a_7^2=a_5^2+2a_5a_7+a_7^2=(a_5+a_7)^2=16$，因为等比数列$\{a_n\}$的各项均为负数，所以$a_5+a_7=-4$，故选B.

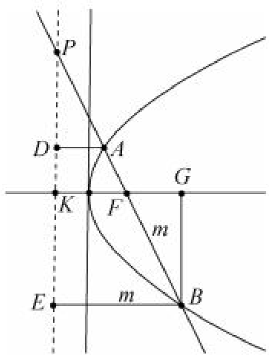
5. A 【解析】圆的标准方程为$(x+2)^2+(y-1)^2=9$，所以圆的圆心为$(-2,1)$，半径为3. 所以圆心到直线$x+y-3=0$的距离为$d=\frac{|-2+1-3|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$. 则$|AB|=2\sqrt{9-8}=2$. 故选A.

6. B 【解析】当$a=4$，$b=\frac{1}{8}$时，$ab=\frac{1}{2}\geqslant\frac{1}{4}$，但$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{4}+8=\frac{33}{4}\geqslant4$. 当$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leqslant4$时，$a+b\leqslant4ab$，又因为$a+b\geqslant2\sqrt{ab}$，所以$4ab\geqslant2\sqrt{ab}$，$2\sqrt{ab}\geqslant1$，$ab\geqslant\frac{1}{4}$，所以“$ab\geqslant\frac{1}{4}$”是“$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leqslant4$”的必要不充分条件，故选B.

7. B 【解析】由题意，5部专著中有3部是杨辉所著. 现从这5部专著中选择2部的基本事件总数$n=C_5^2=10$，所选2部专著中至少有一部不是杨辉著作包含的基本事件个数$m=C_2^2+C_2^1C_3^1=7$，则所选2部专著中至少有一部杨辉著作的概率为$p=\frac{m}{n}=\frac{7}{10}$. 故选B.

8. B 【解析】因为$2^{\frac{1}{2}}>1$，$b=5^{\frac{1}{5}}>1$，$0<\log_3 2<1$，$(2^{\frac{1}{2}})^{10}=2^5=32$，$(5^{\frac{1}{5}})^{10}=5^2=25$，所以$2^{\frac{1}{2}}>5^{\frac{1}{5}}>\log_3 2$. $\frac{f(x)}{x}$表示点$(x,f(x))$和原点连线的斜率，结合函数$f(x)=2^x-1$的图象特征可知$c<b<a$. 故选B.

9. BCD 【解析】抛物线$C:y^2=12x$，$2p=12$，$p=6$，$F(3,0)$. 过A、B作准线的垂线，垂足分别为D、E，过B作x轴的垂线，垂足为G，由抛物线的定义可知：$|AF|=|AD|$，焦点F到准线的距离为6，由$\overrightarrow{PF}=3\overrightarrow{AF}$得$|AD|=4$，则点$A$横坐标为$|AD|-3=1$，故点$A$的坐标为$(1,\pm2\sqrt{3})$，$|AO|=\sqrt{13}$，直线$l$的斜率为$\pm\sqrt{3}$，倾斜角为60°或120°，设$|BF|=|BE|=m$，$m=2(m-6)$，$m=12$，即$|BF|=12$，直线$l$的方程为$y=\pm\sqrt{3}(x-3)$. 故选BCD.



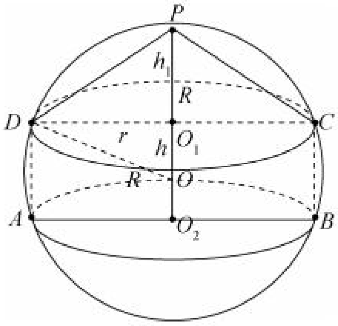
10. BD 【解析】由题易知函数$f(x)$和$g(x)$最小正周期T相同，若$f(x)$的所有对称中心与$g(x)$

的所有对称中心重合，即可得$\frac{\pi}{6}$为$\frac{T}{2}$的整数倍，即$\frac{\pi}{6}=k\cdot\frac{T}{2}=k\cdot\frac{\pi}{\omega}$，即$\omega=6k(k\in\mathbf{Z})$，因为$\omega\in\mathbf{N}^{+}$，所以$\omega$可以为6，12⋯，故选BD.

11. AC 【解析】由$f(x+2)=f(2-x)$可知$f(x)$的对称轴为$x=2$，由$(x-2)f'(x)<0$可知函数$f(x)$的图象在$(-\infty,2)$上单调递增，在$(2,+\infty)$上单调递减. 则可知$f(0)=f(4)$，$f(-1)=f(5)$，$x=2$时$f(x)$取最大值$f(2)$. 故选AC.

12. BCD 【解析】如图几何体的外接球心为O，它的半径为1，圆锥的顶点为P，圆柱的上、下底面的圆心为O_1，O_2，过P，O_1，O_2做几何体的截面为五边形$ABCPD$，其中$ABCD$为矩形，CPD为等腰三角形，$PC=PD$，O为线段O_1O_2的中点，所以A错误；

设圆锥的高为$h_1=PO_1$，圆柱的高为$2h=O_1O_2$，圆柱上下底面的半径为r，



由题意$r^2+h^2=1$，$h+h_1=1$，$O_1O_2+2PO_1=2$，所以B正确；

如果$PO_1:O_1O_2=1:3$，得$PO_1=\frac{2}{5}$，$2h=O_1O_2=\frac{6}{5}$，$r=\frac{4}{5}$，

则圆柱的体积为$\pi r^2O_1O_2=\frac{96\pi}{125}$，所以C正确.

如果圆锥的体积为圆柱体积的$\frac{1}{6}$，则$PO_1:O_1O_2=1:2$，$PO_1=O_1O$，$h=h_1$，$PO_1=\frac{1}{2}$，$r=\frac{\sqrt{3}}{2}$，圆锥的体积为$\frac{1}{3}\pi r^2PO_1=\frac{\pi}{8}$. 所以D正确. 故选BCD.

13. $3\sqrt{5}$ 【解析】由题$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$共线，所以$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda,2\lambda)$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=5\lambda=15$. 即$\lambda=3$，$\boldsymbol{b}=(3,6)$，$|\boldsymbol{b}|=3\sqrt{5}$.

14. 2 【解析】依题设，$|F_1F_2|=2c$，$|MF_1|=4c$，$|MF_2|=4c+2a$，则在$\triangle MF_1F_2$中由余弦定理得，所以$(4c+2a)^2=4c^2+16c^2-2\times2c\times4c\times\left(-\frac{5}{16}\right)$，即$9c^2-16ac-4a^2=0$，所以$9e^2-16e-4=0$，解得$e=2$或$-\frac{2}{9}$（舍）.

15. $\cos\pi x$ 【解析】(答案不唯一)

16. 10个 【解析】函数$f(x)$的图象如图所示，函数$y=f(f(x))$的零点即为方程$f(f(x))=1$的根，令$t=f(x)$，则$f(t)=1$，解得$t=-4$或0或$\frac{1}{2}$或2. $f(x)=-4$方程无实根，$f(x)=0$方程有3个实根，$f(x)=\frac{1}{2}$方程有4个实根，$f(x)=2$方程有3个实根，所以$y=f(f(x))-1$的零点共10个.

17.【解析】(1)因为$(a-c)\sin A=(b-c)(\sin B+\sin C)$，

由正弦定理可得$a^2-ac=b^2-c^2$，即$a^2+c^2-b^2=ac$， ………… 2 分

所以$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{ac}{2ac}=\dfrac{1}{2}$， ………… 4 分

又因为$B\in(0,\pi)$，所以$B=\dfrac{\pi}{3}$. ………… 5 分

(2)由正弦定理可得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$. ………… 6 分

所以$a+b+c=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}(\sin A+\sin C)+4=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\left[\sin A+\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)\right]+4$

$=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\left[\sin A+\sin\dfrac{2\pi}{3}\cos A-\cos\dfrac{2\pi}{3}\sin A\right]+4$

$=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{3}{2}\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A\right)+4$

$=8\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)+4$ ………… 8 分

因为$A\in\left(0,\dfrac{2\pi}{3}\right)$

所以$A+\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right)$

所以$\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left(\dfrac{1}{2},1\right]$. ………… 9 分

所以$a+b+c\in(8,12]$

所以$\triangle ABC$周长的最大值为12 ………… 10 分

18.【解析】(1)$S_5=4a_4-1$；

因为等比数列$\{a_n\}$的公比为q，$2a_2+a_3=a_4$，$2a_1q+a_1q^2=a_1q^3$，

由已知$q>0$，$a_1>0$，得$q^2-q-2=0$， ………… 2 分

解得$q=2$或$q=-1$(舍)，$q=2$，$a_n=a_1q^{n-1}$. ………… 3 分

$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1(1-2^n)}{1-2}=(2^n-1)a_1$，由$S_5=4a_4-1$得$31a_1=4\times8a_1-1$， ………… 5 分

所以$a_1=1$，$a_n=2^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$. ………… 6 分

(2)由直线Q_kQ_{k+1}的斜率为2^k，得$\dfrac{b_{k+1}-b_k}{(k+1)-k}=2^k$，$b_{k+1}-b_k=2^k$. $k\in\mathbf{N}^*$， ………… 7 分

由$b_2-b_1=2^1$，$b_3-b_2=2^2$，$b_4-b_3=2^3$... $b_n-b_{n-1}=2^{n-1}$， ………… 9 分

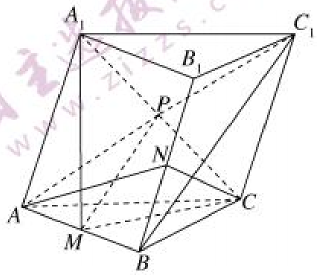
可得 $b_n-b_1=2^1+2^2\cdots+2^{n-1}(n\geqslant2)$

$b_n=2^0+2^1+2^2\cdots+2^{n-1}=2^n-1$， …………………………………………………… 10 分

当 $n=1$ 时也满足 $b_n=2^n-1$， …………………………………………………… 11 分

所以 $b_n=2^n-1,n\in\mathbf{N}^*$. …………………………………………………… 12 分

19.【解析】(1)证明：连接 AC_1 交 A_1C 于点 P，连接 MP，如图，



在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，

因为四边形 A_1ACC_1 是平行四边形，

所以点 P 是 AC_1 的中点， …………………………………… 2 分

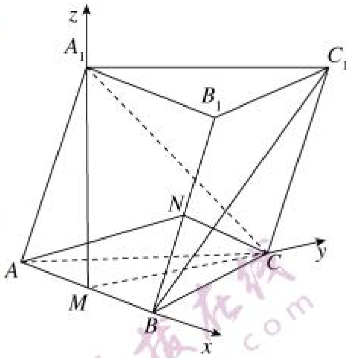
因为点 M 是 AB 的中点，

所以在 $\triangle ABC_1$ 中，$MP/\!/BC_1$， …………………………… 4 分

因为 $MP\subset$ 平面 A_1CM，$BC_1\not\subset$ 平面 A_1CM，

所以 $BC_1/\!/$ 平面 A_1CM. …………………………………………………… 5 分

(2)因为侧面 AA_1B_1B 垂直底面 ABC，侧面 ABB_1A_1 是菱形且 $\angle ABB_1=120°$，M 是 AB 的中点，



所以 $A_1M\perp$ 平面 ABC，

因为 $AC=BC$，M 是 AB 的中点，所以 $MB\perp MC$， ……… 7 分

所以以点 M 为原点，以 MB 方向为 x 轴正方向，以 MC 方向为 y 轴正方向，以 MA_1 方向为 z 轴正方向，建立空间直角坐标系 $M-xyz$，如图，

则点 $M(0,0,0)$，$C(0,1,0)$，$A(-1,0,0)$，$N(\frac{3}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{AN}=(\frac{5}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2})$. ……………………………………………………………………………… 9 分

因为平面 MAC 是底面 xOy，所以平面 MAC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$，

设平面 NAC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AN}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y=0\\ \frac{5}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\end{cases}$.

令 $x=-1$，解得 $y=1$，$z=\frac{5\sqrt{3}}{3}$，则平面 NAC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(-1,1,\frac{5\sqrt{3}}{3})$， ………… 11 分

$$\cos<\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}>=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{\frac{5\sqrt{3}}{3}}{1\times\sqrt{1+1+\frac{25}{3}}}=\frac{5\sqrt{31}}{31},$$

所以二面角 $M-AC-N$ 的余弦值为$\frac{5\sqrt{31}}{31}$. …………………………………………………… 12 分

20. **解**：(1)(ⅰ)由$(0.0025+0.005+0.01+m+0.02+0.0225+0.025)\times 10=1$ 得

$m=0.0150$；…………………………………………………………………………………… 2 分

(ⅱ)由上可知 $X\sim N(65,11^2)$，$54=65-11$，$87=65+2\times 11$，

所以 $P(54<X\leqslant 87)\approx\frac{0.6827}{2}+\frac{0.9545}{2}=0.8186$. ………………………………… 5 分

(2)易知 $P(X<\mu)=P(X\geqslant\mu)=\frac{1}{2}$. ……………………………………………………… 6 分

王大爷获得的红包奖励钱数 ξ 的所有可能取值为：30，50，60，80，100. 则有

$P(\xi=30)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{5}$，$P(\xi=50)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$，$P(\xi=60)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{25}$，

$P(\xi=80)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{25}$，$P(\xi=100)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{50}$.

ξ 的分布列为

ξ	30	50	60	80	100
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{50}$

期望 $E\xi=30\times\frac{2}{5}+50\times\frac{1}{10}+60\times\frac{8}{25}+80\times\frac{4}{25}+100\times\frac{1}{50}=51$. ………………………… 12 分

21.【**解析**】(1)由题可得$\begin{cases}2c=4\sqrt{2}\\ \frac{6}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=2\sqrt{3}\\ b=2\end{cases}$

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$. …………………………………………………… 4 分

(2)当过点 P 且与圆 O 相切的切线斜率不存在时，不妨设切线方程为 $x=\sqrt{3}$，则 $P(\sqrt{3},0)$，$E(\sqrt{3},\sqrt{3})$，$F(\sqrt{3},-\sqrt{3})$，所以$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=-3$. ………………………………………………… 6 分

当过点 P 且与圆 O 相切的切线斜率存在时，可设切线的方程为 $y=kx+m$，$E(x_1,y_1)$，$F(x_2,y_2)$，$P(x_0,y_0)$，直线与圆联立得$(1+k^2)x^2+2kmx+m^2-3=0$，由相切可得 $m^2=3(1+k^2)$，$x_0=-\frac{km}{k^2+1}$.

由联立直线和椭圆的方程得：$(1+3k^2)x^2+6kxm+3m^2-12=0$，

$\Delta=36k^2m^2-4(1+3k^2)(3m^2-12)>0$，所以 $x_1+x_2=-\dfrac{6km}{1+3k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{3m^2-12}{1+3k^2}$. …… 9 分

所以 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=(x_1-x_0,y_1-y_0)\cdot(x_2-x_0,y_2-y_0)$

$=(x_1-x_0)(x_2-x_0)+(y_1-y_0)(y_2-y_0)$

$=(k^2+1)(x_1-x_0)(x_2-x_0)=(k^2+1)[x_1x_2-x_0(x_1+x_2)+x_0^2]$

$=(k^2+1)[\dfrac{3m^2-12}{1+3k^2}+\dfrac{6km\cdot(-\frac{km}{k^2+1})}{1+3k^2}+(\dfrac{km}{k^2+1})^2]$

$=\dfrac{-9k^2-3}{1+3k^2}=-3$

综上可知，$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$ 为定值 -3. …………………………………………………………… 12 分

22. (1) 由题意，设该切线的切线方程为 $y=kx+b$，由 g 分 $(x)=\cos x-\sin x+2x-2$，……… 2 分

故 $k=g'(0)=-1$，由 $g(0)=1$，解得 $b=1$，故该切线的切线方程为 $y=-x+1$. …… 4 分

(2) 证明：设 $h(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x+2\sin x+1$，则 $h'(x)=x^2-2+2\cos x$，则 $h''(x)=2x-2\sin x$ $\geqslant 0$，

故 $h'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$h'(x)\geqslant h'(0)=0$，故 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x)\geqslant h(0)>0$，所以 $f(x)>0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，

故 $g(x)-af(x)\geqslant g(x)-f(x)$，…………………………………………………………… 8 分

故只需证 $g(x)\geqslant f(x)$，即证 $e^x(\sin x+\cos x+x^2-2x)-\left(\dfrac{1}{3}x^3-2x+2\sin x+1\right)\geqslant 0$ ………
…………………………………………………………………………………………… 10 分

设 $F(x)=e^x(\sin x+\cos x+x^2-2x)-\left(\dfrac{1}{3}x^3-2x+2\sin x+1\right)$.

则 $F'(x)=e^x(2\cos x+x^2-2)-(2\cos x+x^2-2)=(2\cos x+x^2-2)(e^x-1)\geqslant 0$，

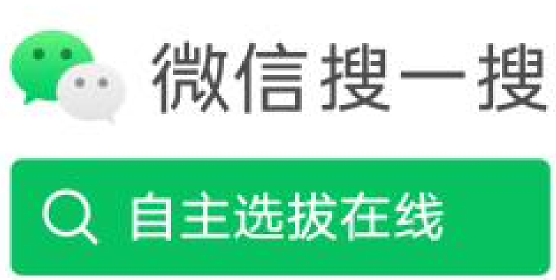
则 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$F(x)\geqslant F(0)=0$，故 a 的取值范围为 $a\in(-\infty,1]$ … 12 分

故对任意的 $a\in(-\infty,1]$，$g(x)\geqslant af(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》