铁人中学2020级高三学年第二次模拟考试

数学参考答案

第Ⅰ卷(选择题 60 分)

四．单项选择题（本大题包括 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确选项填涂在答题卡上）

1．答案：B　2．答案：D　3．答案：D　4．答案:D　5．答案：C　6．答案：A　7．答案：B

8．答案：B

设 $A=\left\{x \mid x=\frac{q}{p}, p,q\text{为正整数}, \frac{q}{p}\text{是既约真分数}\right\}$，$B=\{x \mid x=0\text{或}x=1\text{或}x\text{为}[0,1]\text{上的无理数}\}$，则根据题意有：

①当 $\begin{cases} a\in A \\ b\in A \end{cases}$ 时，则 $R(a+b)\le R(a)+R(b)$，$R(a\cdot b)\ge R(a)\cdot R(b)$，

②当 $\begin{cases} a\in B \\ b\in B \end{cases}$ 时，$R(a+b)\ge R(a)+R(b)=0$，$R(a\cdot b)\ge R(a)\cdot R(b)=0$；

③当 $\begin{cases} a\in A \\ b\in B \end{cases}$ 时，$R(a+b)\le R(a)+R(b)=R(a)$，$R(a\cdot b)\ge R(a)\cdot R(b)=0$；

④当 $\begin{cases} a\in B \\ b\in A \end{cases}$ 时，$R(a+b)\le R(a)+R(b)=R(b)$，$R(a\cdot b)\ge R(a)\cdot R(b)=0$

五．多项选择题(本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分)

9．答案：ABD

10．答案：BCD

11．答案：BCD

12．答案：BC

第Ⅱ卷(非选择题 90 分)

六．填空题(本大题包括 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，把正确答案填在答题卡中的横线上)

13．答案：$(3,3)$

14. 答案：$-\frac{1}{2}$

15.答案：12 或 13（只填写一个即可）

$$1\leftarrow 2\leftarrow 4\leftarrow 8\leftarrow 16\leftarrow\begin{cases}32\leftarrow 64\leftarrow\begin{cases}128\leftarrow 256\leftarrow\begin{cases}512(\text{舍})\\85(\text{舍})\end{cases}\\21\leftarrow 42\leftarrow 84(\text{舍})\end{cases}\\5\leftarrow 10\leftarrow\begin{cases}20\leftarrow 40\leftarrow\begin{cases}80(\text{舍})\\13\end{cases}\\3\leftarrow 6\leftarrow 12\end{cases}\end{cases}$$

16. 答案：$\frac{\sqrt{10}}{5}$

四．解答题(本大题包括 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤)

17. 【答案】（1）解：选①：$\because \frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}=n$，$n\geq 2$时，$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}=n-1$，

$\therefore$ 两式相减得$\frac{a_n}{2^n}=1\left(n\geq 2\right)$，即$a_n=2^n(n\geq 2)$，又当$n=1$时，$\frac{a_1}{2}=1$，

$\therefore a_1=2$，满足上式，$\therefore a_n=2^n$；

选②：当$n=1$时，$S_1=2a_1-2=a_1$，$\therefore a_1=2$，

$\because S_n=2a_n-2$，$n\geq 2$时，$S_{n-1}=2a_{n-1}-2$，

$\therefore$ 两式相减得$a_n=2a_{n-1}(n\geq 2)$，

$\therefore$ 数列$\{a_n\}$是以 2 为首项 2 为公比的等比数列，

$\therefore a_n=2\times 2^{n-1}=2^n$；

选③：$\because a_1a_2a_3\cdots a_n=2^{\frac{n^2+n}{2}}$，$n\geq 2$时，$a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}=2^{\frac{(n-1)^2+(n-1)}{2}}=2^{\frac{n^2-n}{2}}$，

$\therefore$ 两式相除得$a_n=2^n(n\geq 2)$，当$n=1$时，$a_1=2$，满足上式，$\therefore a_n=2^n$；

(2)因为当 $n\in[2^{k-1},2^k)$时,$b_n=2^k,k\in N^*$,所以当 $n\in[2^0,2^1)$时,$b_1=2^1$,当 $n\in[2^1,2^2)$时,$b_2=b_3=2^2$,

当 $n\in[2^2,2^3)$时,$b_4=b_5=\ldots=b_7=2^3$,

当 $n\in[2^3,2^4)$时,$b_8=b_9=\ldots=b_{15}=2^4$,

当 $n\in[2^4,2^5)$时,$b_{16}=b_{17}=\ldots=b_{31}=2^5$,

当 $n\in[2^5,2^6)$时,$b_{32}=b_{33}=\ldots=b_{63}=2^6$,

所以 $T_{40}=2^1+2\times2^2+4\times2^3+8\times2^4+16\times2^5+9\times2^6=1258$

18. 答案

解：(1) 由正弦定理得：$\dfrac{b}{\sin A+\sin C}=\dfrac{a-c}{\sin B-\sin C}\Rightarrow\dfrac{b}{a+c}=\dfrac{a-c}{b-c}$

整理得：$a^2=b^2+c^2-bc$，由余弦定理得：$A=\dfrac{\pi}{3}$ ……………………

(2) 由题意得：$\vec{AM}=\dfrac{2}{3}\vec{AB}+\dfrac{1}{3}\vec{AC}$，……………………………………

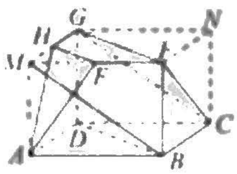
则 $\dfrac{|AM|^2}{S}=\dfrac{\frac{1}{9}(4c^2+2bc+b^2)}{\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{4}{9\sqrt{3}}\left(\dfrac{4c}{b}+\dfrac{b}{c}+2\right)\geqslant\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$ …………

当且仅当 $b=2c$ 时取最小值. 所以 $\dfrac{|AM|^2}{S}$ 最小值为 $\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$ …………

19. 答案

解：(1) 当 $BF=\sqrt{2}$ 时，$AE\perp CG$，证明如下：（1 分）

将该几何体补全为正四棱柱 $ABCD$-$MFNG$，连接 BM，如下图所示：



由题意可知底面 $ABCD$ 为正方形，则 $AB=BC=2$，且 $BD=2\sqrt{2}$，

因为 BD // 平面 AEH，FG // BD，所以 FG // 平面 AEH

又 $FG\subset$ 平面 $EFGH$，平面 $AEH\cap$ 平面 $EFGH=EH$ ．所以 FG // EH

又 $AB=2GH$，所以 H 为 GM 的中点，所以 E 为 MF 的中点。

因为 $BC // MG, BC = MG$,

所以四边形 $BCGM$ 为平行四边形,所以 $CG // BM$.(2 分)

因为 $CG \perp AE$,所以 $BM \perp AE$.

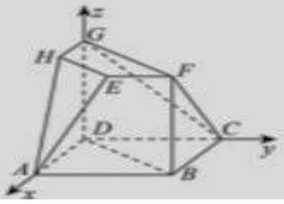
因为 $\angle AMB + \angle MAE = 90°$, $\angle MAE + \angle MEA = 90°$,

所以 $\angle AMB = \angle MEA$,所以 $\triangle AMB \backsim \triangle MEA$,

所以 $\frac{ME}{AM} = \frac{AM}{AB}$,即 $AM^2 = ME \cdot AB = 1 \times 2 = 2$,所以 $AM = \sqrt{2}$.

所以当 $BF = \sqrt{2}$ 时,$AE \perp CG$.(4 分)

(2)以 D 为坐标原点,分别以 DA, DC, DG 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.



平面 AEH 的法向量为 $\vec{m} = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1)$,平面 CFG 的法向量为 $\vec{n} = (-1, 1, \sqrt{2})$

$\therefore \cos < \vec{m}, \vec{n} > = \frac{\sqrt{10}}{10}$

$\therefore$ 平面 AEH 与平面 CFG 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$

20. 【答案】(1)$\frac{9}{64}$

(2)①$E(X_i) = \begin{cases} \frac{35}{2}, i = 1 \\ \frac{3}{2}E(X_{i-1}) + \frac{5}{2}, i \ge 2, i \in N^* \end{cases}$

(或写成 $E(X_i) = \frac{3}{2}E(X_{i-1}) + \frac{5}{2}$, $i \in \mathrm{N}^*, i \ge 2$,且 $E(X_1) = \frac{35}{2}$ 也给分)

②由①知,$E(X_1) = 20 \times \frac{3}{4} + 10 \times \frac{1}{4} = \frac{35}{2}$

且 $i \ge 2$ 时,$E(X_i) = \frac{3}{2}E(X_{i-1}) + \frac{5}{2}$,易知 $\{E(X_i)\}$ 为递增数列

则 $E(X_2) = \frac{3}{2}E(X_1) + \frac{5}{2} = \frac{115}{4} < 100$;$E(X_3) = \frac{3}{2}E(X_2) + \frac{5}{2} = \frac{365}{8} < 100$;

$E(X_4) = \frac{3}{2}E(X_3) + \frac{5}{2} = \frac{1135}{16} < 100$;$E(X_5) = \frac{3}{2}E(X_4) + \frac{5}{2} = \frac{3485}{32} > 100$

故 i 的最小值为 5.

21．答案

解：

（1）依题意，离心率$e=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{5}$，$\dfrac{2}{a^2}-\dfrac{4}{b^2}=1$，解得$a^2=1,b^2=4$，

故双曲线E的方程为$x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ ……………………………………………4 分

（2）方法一：设$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，直线PQ为$x=ty+2(t\neq 0)$，代入双曲线方程$x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$

得：$(4t^2-1)y^2+16ty+12=0$，则$4t^2-1\neq 0$且$\triangle=16(4t^2+3)>0$，$y_1y_2=\dfrac{12}{4t^2-1}<0$

$\therefore 0<t^2<\dfrac{1}{4}$，$\because y_1+y_2=-\dfrac{16t}{4t^2-1}$，

$\therefore k_{AP}=\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\dfrac{y_1+y_2}{t(y_1+y_2)+4}=\dfrac{-\frac{16t}{4t^2-1}}{t\cdot\left(-\frac{16t}{4t^2-1}\right)+4}=4t$

$\therefore$直线AP方程为$y+y_2=4t(x+x_2)$，令$y=y_2$得：$x_M=\dfrac{y_2}{2t}-x_2$，$\therefore M\left(\dfrac{y_2}{2t}-x_2,y_2\right)$，$\because$

直线PQ为$x=ty+2$，令$x=-x_2$得：$y_N=\dfrac{-x_2-2}{t}=-y_2-\dfrac{4}{t}$，即$N\left(-x_2,-y_2-\dfrac{4}{t}\right)$，

设线段MN的中点坐标为$T(x_0,y_0)$，则$x_0=\dfrac{x_M+(-x_2)}{2}=\dfrac{y_2}{4t}-x_2$，$y_0=\dfrac{y_N+y_2}{2}=-\dfrac{2}{t}$ $\because$

过点P的切线方程为：$x_1x-\dfrac{y_1y}{4}=1$，要证双曲线在点P处的切线平分线段EF，即证点P处的切线经过线段MN的中点T．

$\because x_1x_0-\dfrac{y_1y_0}{4}=x_1\cdot\left(\dfrac{y_2}{4t}-x_2\right)-\dfrac{y_1}{4}\cdot\left(-\dfrac{2}{t}\right)=(ty_1+2)\left(\dfrac{y_2}{4t}-ty_2-2\right)+\dfrac{y_1}{2t}$

$=\dfrac{1-4t^2}{4}y_1y_2+\dfrac{1-4t^2}{2t}(y_1+y_2)-4=\dfrac{1-4t^2}{4}\cdot\dfrac{12}{4t^2-1}+\dfrac{1-4t^2}{2t}\cdot\left(-\dfrac{16t}{4t^2-1}\right)-4=1$

所以点P处的切线经过线段MN的中点T，即点P处的切线平分线段MN.…………12 分

方法二：设$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，则$A(-x_2,-y_2),B(-x_2,y_2)$.由题意可知，点M在直线PA上，且纵坐标为y_2，设$M(x_M,y_2)$，由$k_{PA}=k_{AM}$可得：$\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\dfrac{2y_2}{x_M+x_2}$，整理得：

$x_M=\dfrac{2x_1y_2+x_2y_2-x_2y_1}{y_1+y_2}$，$\therefore M\left(\dfrac{2x_1y_2+x_2y_2-x_2y_1}{y_1+y_2},y_2\right)$，同理可得

$N\left(-x_2,\dfrac{x_2y_2+x_1y_2-2x_2y_1}{x_1-x_2}\right)$，设线段$MN$的中点坐标为$T(x_0,y_0)$，

则$x_0=\dfrac{x_M+(-x_2)}{2}=\dfrac{x_1y_2-x_2y_1}{y_1+y_2}$，$y_0=\dfrac{y_2+y_N}{2}=\dfrac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1-x_2}$，又$\because$过点$P$的切线方程

为：$x_1x-\dfrac{y_1y}{4}=1$，要证双曲线在点 P 处的切线平分线段 EF，即证点 P 处的切线经过线段 MN 的中点 T，$\because x_1x_0-\dfrac{y_1y_0}{4}=\dfrac{(x_1y_2-x_2y_1)(4x_1x_2-4+y_1y_2)}{4(y_1+y_2)(x_2-x_1)}$，

$\because x_1^2-\dfrac{y_1^2}{4}=1$，$x_2^2-\dfrac{y_2^2}{4}=1$

$\therefore x_1x_0-\dfrac{y_1y_0}{4}=\dfrac{(x_2y_2-x_1y_1+x_2y_1-x_1y_2)}{(y_1+y_2)(x_2-x_1)}=1$

所以点 P 处的切线经过线段 MN 的中点 T，即点 P 处的切线平分线段 MN.…………12 分

22. 解：(1) $f'(x)=\dfrac{\cos x-\sin x}{e^x}$，…………………………………………………… 1 分

令 $\cos x-\sin x>0\Rightarrow x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\cos x-\sin x<0\Rightarrow x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right)$

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，单调递减区间为 $\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right)$ …………………………… 4 分

(2) 由(1)可得 $l:y=\dfrac{\sqrt{2}(1-a)}{2e^{\frac{\pi}{4}a}}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{\sqrt{2}}{2e^{\frac{\pi}{4}a}}$，…………………………………………… 5 分

记 $g(x)=\dfrac{\sin x}{e^{ax}}-\dfrac{\sqrt{2}(1-a)}{2e^{\frac{\pi}{4}a}}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{\sqrt{2}}{2e^{\frac{\pi}{4}a}}$，则 $g'(x)=\dfrac{\cos x-a\sin x}{e^{ax}}-\dfrac{\sqrt{2}(1-a)}{2e^{\frac{\pi}{4}a}}$

$g''(x)=\dfrac{(a^2-1)\sin x-2a\cos x}{e^{ax}}$，易知 $x\subset\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$g''(x)>0$，所以 $g'(x)$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right)\uparrow$ ……… 6 分

当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$g''(x)=(a^2-1)\cos x\dfrac{\tan x-\dfrac{2a}{a^2-1}}{e^{ax}}$，记 $h(x)=\tan x-\dfrac{2a}{a^2-1}$

①当 $h\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1-\dfrac{2a}{a^2-1}\geqslant 0$，即 $a\geqslant 1+\sqrt{2}$，由 $1<a<1+\sqrt{2}$，不满足条件 ………………………… 7 分

②当 $h\left(\dfrac{\pi}{4}\right)<0$ 即 $1<a<1+\sqrt{2}$ 时，易有 $\exists t_1\in\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right)$ 使得 $g'(x)$ 在 $(0,t_1)\downarrow(t_1,\pi)\uparrow$.

因为 $g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$，所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)\uparrow$，而在 $\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right)$ 内只可能单减或者先减再增.

又因为 $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$，$g(0)=\dfrac{\sqrt{2}\cdot\dfrac{\pi}{4}(1-a)-\sqrt{2}}{2e^{\frac{\pi}{4}a}}<0$，所以存在 $x_1=\dfrac{\pi}{4}$ 为函数的一个零点.

所以只需 $g(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right)$ 上存在一个零点即可，…………………………………………………… 9 分

因为 $g(t_1)<0$，所以只需 $g(\pi)=0-\dfrac{3\pi}{4}\dfrac{\sqrt{2}(1-a)}{2e^{\frac{\pi}{4}a}}-\dfrac{\sqrt{2}}{2e^{\frac{\pi}{4}a}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2e^{\frac{\pi}{4}a}}\left[\dfrac{3\pi}{4}(a-1)-1\right]>0$ 即可，

解得 $1+\dfrac{4}{3\pi}<a<1+\sqrt{2}$，此时存在 $x_2\in\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right)$ 使得 $g(x_2)=0$，满足题意.

当 $g(\pi)\leqslant 0$ 时，$g(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right)$ 内再无零点. …………………………………………………… 11 分

综上：a 的取值范围是 $\left(1+\dfrac{4}{3\pi},1+\sqrt{2}\right)$. …………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线